ΑΣΚΗΣΗ 50

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f'(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = e$

1) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$
2) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f\big(a(a+2\beta)\big) + f(\beta^2) \leq 2$
3) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων τους εξίσωσης $f(x) = \kappa^2 - 1$
4) Να μελετήσετε την f ως τους την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2e$
5) Να αποδείξετε ότι
$$\int_2^3 f(x)dx + e > e^4 + \int_1^2 f(x)dx$$
6) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ>0 ώστε $f(x) \geq \lambda x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
7) Έστω F μια αρχική της f με $F(1) = 0$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_F και τους άξονες συντεταγμένων
8) Να λύσετε την εξίσωση $F(3^x) + F(5^x) = F(23^x) + F(2019^x)$
9) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x+5) - f(x)$ με $x \geq 0$
    i) Να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών
    $$g([0, +\infty)] = [e^{25} - 1, +\infty)$$
    ii) Να λύσετε την εξίσωση
    $$e^{(x+5)^2} - e^{x^2} + e^{x^2+10x+26} = 1 - e^x + e^{x^2+1}$$
10) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{x^2}dx + \int_1^e \sqrt{lnx}dx = e$
11) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2019}^{2019} f(x)dx$
12) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x \cdot F(x)}$

Ντάνος Γιώργος – Μαθηματικός

Ενδεικτική Λύση

1. $f'(x) = 2xf(x) \Leftrightarrow f'(x) - 2xf(x) = 0 \overset{e^{-x^2}}{\Longleftrightarrow} f'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xf(x) \cdot e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-x^2} \cdot f(x)\right)' = 0 \overset{Σ.Θ.Μ.Τ.}{\Longleftrightarrow} e^{-x^2} \cdot f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = \frac{c}{e^{-x^2}}$$

Για $x = 1$ είναι $e = ce \Leftrightarrow c = 1$. Οπότε $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

2. Ισχύει $x^2 \geq 0 \overset{e^x \nearrow}{\Longleftrightarrow} e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ άρα η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$ με τιμή $f(0) = 1$

$f\big(a(a + 2\beta)\big) + f(\beta^2) \leq 2 \Leftrightarrow f(a^2 + 2a\beta) + f(\beta^2) \leq 2$

Ισχύει $f(a^2 + 2a\beta) \geq 1$ και $f(\beta^2) \geq 1$ τότε $f(a^2 + 2a\beta) + f(\beta^2) \geq 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$ οπότε $\begin{cases} a^2 + 2a\beta = 0 \\ \beta^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

3. Για x<0 η f γνησίως φθίνουσα και συνεχής έχει σύνολο τιμών

$$f((-\infty, 0]) = [1, +\infty)$$

Για x>0 η f γνησίως αύξουσα και συνεχής έχει σύνολο τιμών

$$f([0, +\infty)) = [1, +\infty)$$

Αν $\kappa^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow \kappa \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ τότε αδύνατη

Αν $\kappa^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow \kappa = \pm\sqrt{2}$ τότε μοναδική λύση $x_0 = 0$

Αν $\kappa^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow \kappa \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ τότε ακριβώς δύο λύσεις

4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} > 0$$

Άρα f κυρτή

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\Sigma(1, e)$ έχει εξίσωση:

(ε): $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = 2e(x-1) \Leftrightarrow y = 2ex - e$. Οπότε ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 2ex - e$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $x = 1$. Τότε με ολοκλήρωση κατά μέλη προκύπτει

$$\int_0^2 f(x)dx > \int_0^2 (2ex - e)dx = [ex^2 - ex]_0^2 = 2e$$

5. Επειδή f κυρτή , δηλαδή f' γνησίως αύξουσα από Θ.Μ.Τ. $[x, x+1]$ προκύπτει $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$ με

$$\xi \in (x, x+1) \Leftrightarrow x < \xi < x+1 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1)$$

Άρα $f'(x) < f'(\xi)$ οπότε $f'(x) < f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow -f'(x) + f(x+1) - f(x) > 0$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη προκύπτει $\int_1^2 \big(\Leftrightarrow -f'(x) + f(x+1) - f(x)\big)dx > 0$

$$\int_1^2 f(x+1)dx > \int_1^2 f'(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

Θέτω $u = x + 1$ τότε $\int_1^2 f(x+1)dx = \int_2^3 f(u)du = \int_2^3 f(x)dx$

Άρα $\int_2^3 f(x)dx > \int_1^2 f'(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = f(2) - f(1) + \int_1^2 f(x)dx \Leftrightarrow$

$$\int_2^3 f(x)dx + e > e^4 + \int_1^2 f(x)dx$$

6. Αρκεί να δείξω ότι

$$e^{x^2} \geq \lambda x \overset{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} xe^{-x^2} \leq \frac{1}{\lambda}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $w(x) = xe^{-x^2}$ τότε

$$w'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

Παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στη θέση $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ με τιμή $w\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$

Αρκεί λοιπόν $\frac{1}{2\sqrt{e}} \le \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \le \sqrt{2e}$ άρα η μέγιστη τιμή του λ είναι $\sqrt{2e}$

7. Ισχύει $F'(x) = f(x) = e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε F γνησίως αύξουσα

Για $x > 1 \overset{F \nearrow}{\Leftrightarrow} F(x) > F(1) \Leftrightarrow F(x) > 0$

Για $x < 1 \overset{F \nearrow}{\Leftrightarrow} F(x) < F(1) \Leftrightarrow F(x) < 0$

$$E = \int_0^1 |F(x)|dx = \int_0^1 -F(x)dx = -\int_0^1 (x)' \cdot F(x)dx = -[x \cdot F(x)]_0^1 + \int_0^1 x \cdot F'(x)dx =$$

$$= 0 + \int_0^1 x \cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)\tau.\mu.$$

8. Παρατηρούμε ότι για $\mathrm{x} = 0$, $F(3^0) + F(5^0) = F(23^0) + F(2019^0) \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει. Άρα προφανής ρίζα $x = 0$. Η F γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε για

x>0 ισχύει $3^x < 23^x \overset{F \nearrow}{\Leftrightarrow} F(3^x) < F(23^x) \quad (1)$

και $5^x < 2019^x \overset{F \nearrow}{\Leftrightarrow} F(5^x) < F(2019^x) \quad (2)$ με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$F(3^x) + F(5^x) < F(23^x) + F(2019^x)$$

Όμοια για x<0 $F(3^x) + F(5^x) > F(23^x) + F(2019^x)$

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $\mathrm{x} = 0$

9. Για $x \ge 0$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+5]$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+5) \Leftrightarrow x < \xi < x+5$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+5) - f(x)}{x+5-x}$$

Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $x \ge 0$ και είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων τότε $g'(x) = f'(x+5) - f'(x)$

Για $x \geq 0$ είναι $f'(x)$ γνησίως αύξουσα

Επειδή ισχύει $x < x+5 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x+5) \Leftrightarrow f'(x+5) - f'(x) > 0$. Οπότε $g'(x) > 0$ άλλα g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Θα έχει σύνολο τιμών $g\big([0,+\infty)\big) = [g(0), \lim_{x\to+\infty} g(x)) = [f(5) - f(0), +\infty) = [e^{25} - 1, +\infty)$

Για $x \geq 0$ είναι $f'(x)$ γνησίως αύξουσα

Επειδή $x < \xi \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi)$ οπότε

$$f'(x) < \frac{f(x+5) - f(x)}{5} \Leftrightarrow 5f'(x) < f(x+5) - f(x) \Leftrightarrow 5f'(x) < g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10xe^{x^2} < g(x)$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} 10xe^{x^2} = +\infty$ τότε $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

10. Ισχύει

$$e^{(x+5)^2} - e^{x^2} + e^{x^2+10x+26} = 1 - e^x - e^{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$e^{(x+5)^2} - e^{x^2} + e^{(x+5)^2} \cdot e^x - e^{x^2} \cdot e^x = 1 - e^x \Leftrightarrow$$

$$g(x)(1 + e^x) = 1 - e^x \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

Αδύνατη διότι η συνάρτηση $\frac{1-e^x}{1+e^x}$ έχει σύνολο τιμών $(-1,1)$

11. Στο διάστημα [0,1] η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέφεται με $y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{x^2} \Leftrightarrow lny = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{lny} = x$ διότι $x \geq 0$

Άρα $f^{-1}(x) = \sqrt{lnx}$, $x \in [1, e]$, διότι $D_{f^{-1}} = [f(1), f(e)]$

Οπότε $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{lnx} dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^e f^{-1}(x) dx$

Θέτω $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Rightarrow f'(y) dy = dx$, οπότε

Για $x = 1 \Leftrightarrow f(y) = 1 \Leftrightarrow f(y) = f(0) \overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow} y = 0$

Για $x = e \Leftrightarrow f(y) = e \Leftrightarrow f(y) = f(1) \overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow} y = 1$

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^e f^{-1}(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 yf'(y)dy =$$

$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 \big((x)'f(x) + xf'(x)\big)dx =$$

$$= \int_0^1 \big(x \cdot f(x)\big)'dx = [x \cdot f(x)]_0^1 = 1f(1) - 0 = e$$

12. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x)$ άρα η συνάρτηση f είναι άρτια

$$I = \int_{-2019}^{2019} f(x)dx = \int_{2019}^{-2019} f(-y)(-dy)$$

Θέτω $y = -x \Rightarrow dy = -dx$

Για $x = 2019$ τότε $y = -2019$, Για $x = -2019$ τότε $y = 2019$

$$I = \int_{2019}^{-2019} f(-y)(-dy) = -\int_{-2019}^{2019} f(y)dy = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

13. Η συνάρτηση $F(x)$ είναι γνησίως αύξουσα , άρα για $x > 1 \Leftrightarrow F(x) > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x \cdot F(x)} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^{x^2}}{x \cdot e^{x^2} + F(x)} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\big(e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}\big)}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} + f(x)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{x^2}(1 + 2x^2)}{e^{x^2}(1 + 2x^2 + 1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2 + 4x^2)}{(2 + 2x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \frac{4}{2} = 2$$