Άσκηση 14

Έστω συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 0$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο Τ=3

β. Εάν επιπλέον , $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2$ να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης

$$\Pi = f(3{,}75) + f(12{,}75)$$

γ. Εάν ισχύει ότι $f(x) \leq f\left(\frac{3}{4}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η ημιτονοειδής συνάρτηση f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να δείξετε ότι έχει τύπο $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

δ. Να σχεδιάσετε την f στο διάστημα $[0, T]$

ε. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωση $f(x) = f^2(x)$ στο $[0, T]$

στ. Να λύσετε την εξίσωση $(\varepsilon\varphi 13°)^{f(x)} = f(-2{,}25) - 1$ στο $[0, T]$

ζ. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{f(x) - 2} + \sqrt{2 - f(x)} + (\frac{5}{2} - x)^{2019} = -\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ στο $[0, T]$

Ντάνος Γεώργιος

Ενδεικτική Λύση

α. Αρκεί να δείξω ότι εάν $T \in \mathbb{R}$ και $-T \in \mathbb{R}$ και $f(x+3) = f(x-3) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f(x+1) = -f(x) - f(x+2)$ (1) . Για να εμφανίσω το $f(x+3)$ θέτω στη σχέση της υπόθεση όπου x το $x+1$, τότε $f(x+1) + f(x+2) + f(x+3) = 0 \Leftrightarrow f(x+1) = -f(x+2) - f(x+3)$ (2). Από (1),(2) προκύπτει $= -f(x) - f(x+2) = -f(x+2) - f(x+3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x+3)$$

Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστώ όπου x το x-3 προκύπτει

$$\Leftrightarrow f(x-3) = f(x)$$

β. $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow f(0{,}75) = 2 \overset{T=3}{\Longleftrightarrow} f(3+0{,}75) = 2 \Leftrightarrow f(4 \cdot 3 + 0{,}75) = 2$.Οπότε

$$\Pi = 2 + 2 = 4$$

γ. Ισχύει $f(x) \leq f\left(\frac{3}{4}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στη θέση $x_0 = \frac{3}{4}$ με τιμή $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2$.

Είναι ημιτονοειδής άρα θα έχει τη μορφή $f(x) = a + \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$.

Από τη περίοδο

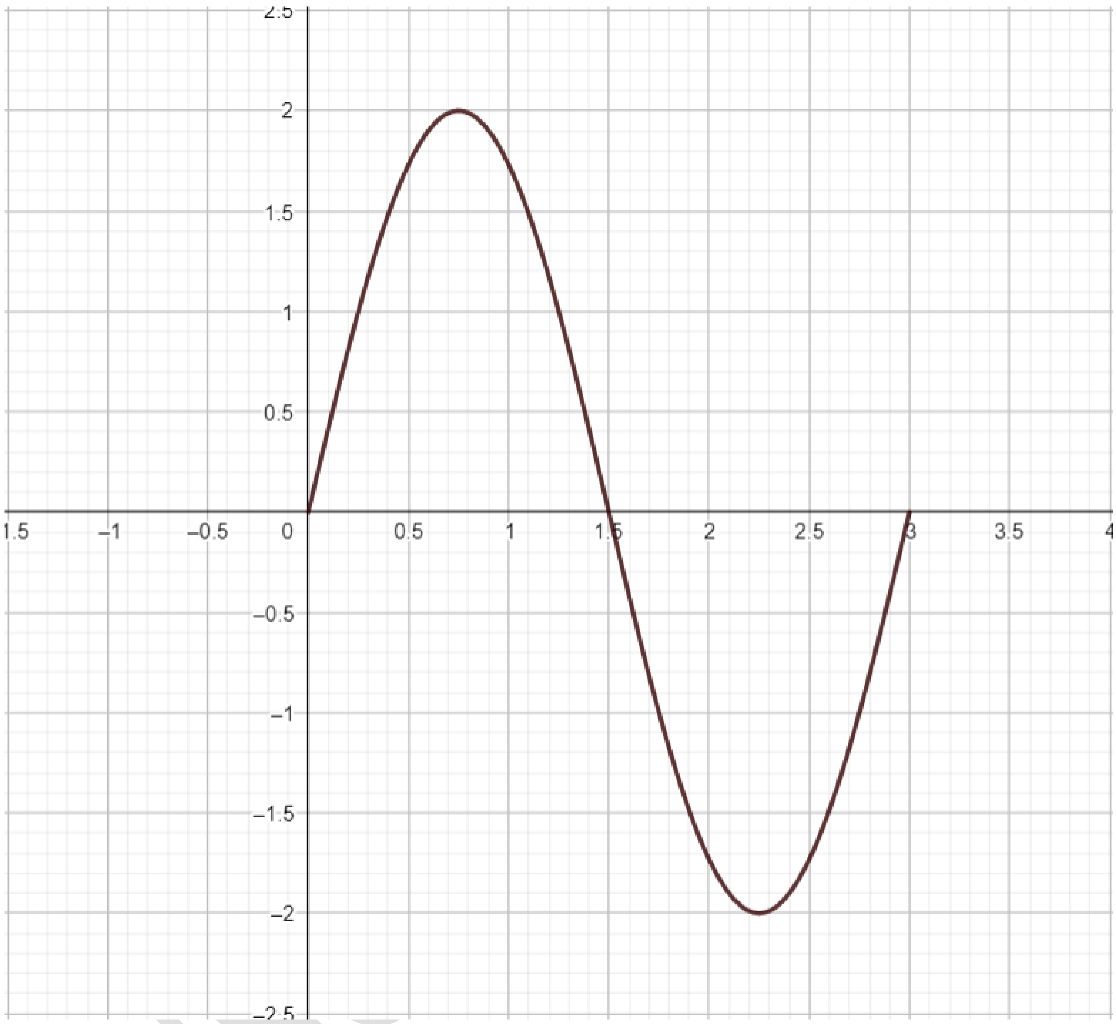
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3 \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{3}$$

Άρα έχει τη μορφή $f(x) = a + \rho \cdot \eta\mu(\frac{2\pi}{3}x)$. Διέρχεται από το $O(0,0)$ οπότε

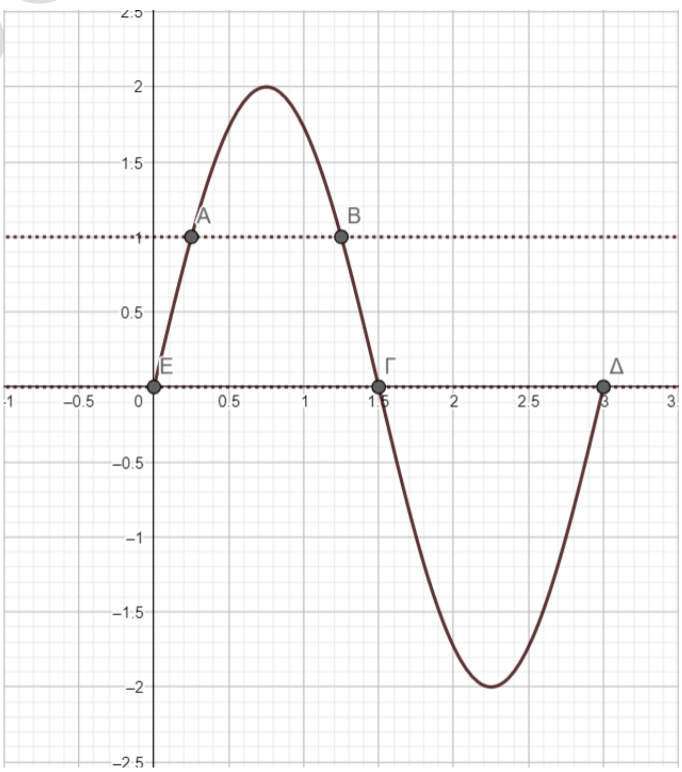
$$f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = a + \rho \cdot \eta\mu(0) \Leftrightarrow 0 = a$$

Άρα είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\frac{2\pi}{3}x)$. Τέλος $f\left(\frac{3}{4}\right) = 2$ οπότε $\rho = |2| = 2$

Τελικά έχει τη μορφή $f(x) = 2 \cdot \eta\mu(\frac{2\pi}{3}x)$



δ.



ε. $f(x) = f^2(x) \Leftrightarrow f(x) - f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\big(1 - f(x)\big) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ ή $f(x) = 1$. Δηλαδή αναζητώ τα σημεία τομής της C_f με τις ευθείες $y = 0$ και $y = 1$, από σχήμα προκύπτει ότι 5 λύσεις

στ. $f(-2{,}25) - 1 = 2 - 1$

$= 1$, διότι έχει περίοδο Τ=3

Οπότε $(\varepsilon\varphi 13°)^{f(x)} = 1$, άρα $f(x) = 0$ από σχήμα προκύπτει ότι x=0 ή $x = \frac{3}{2}$ ή $x = 3$

ζ. Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $f(x) \geq 2$ και $f(x) \leq 2$ οπότε προκύπτει ότι ορίζεται μόνο για

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

για $x = \frac{3}{2}$ τότε η εξίσωση της υπόθεσης γράφεται

$\sqrt{f\left(\frac{3}{2}\right) - 2} + \sqrt{2 - f(\frac{3}{2})} + (\frac{5}{3} - \frac{3}{2})^{2019} = -\eta\mu(\frac{3\pi}{2}) \Leftrightarrow 0 + 0 + 1 = 1$ ισχύει