Να βρεθεί συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν : $(x^2+1)^2\cdot f''(x)=f(x)\,,x\in\mathbb{R}\,(1)$ και $f(1)=\sqrt{2}$, $f'(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε : $(\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x=$ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,(2)$ και $(\sqrt{x^2+1})''=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\dfrac{(x)'\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}\overset{(2)}{=}$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}\,(3).$$

Αλλά για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)\cdot f''(x)=f(x)\Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2+1}\cdot f''(x)=f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\sqrt{x^2+1}\cdot f''(x)=f(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})''$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\cdot f''(x)+f'(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})'=f(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})''+f'(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})'\Leftrightarrow$$

$$\left(f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}\right)'=\left(f(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})'\right)'\Leftrightarrow f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=f(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})'+c_1$$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=f(x)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c_1\,(4)$. Για $x=1$ η (4) γίνεται :

$$f'(1)\cdot\sqrt{1^2+1}=f(1)\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+c_1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+c_1\Leftrightarrow c_1=0\ (5)$$

$$(4)\overset{(5)}{\Leftrightarrow}f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=f(x)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=f(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})'$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}-f(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})'=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}-f(x)\cdot(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}=c_2\,(6)$$

Για $x=1$ η (6) γίνεται : $\dfrac{f(1)}{\sqrt{1^2+1}}=c_2\Leftrightarrow c_2=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow c_2=1\ (7)$

$$(6)\overset{(7)}{\Leftrightarrow}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}=1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}.$$

Αποστόλης Κακαβάς