

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ , ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ : Συναρτήσεις - Όρια

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1 - 1 ;

Μονάδες 4

β) Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ;

Μονάδες 3

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή , ή **Λάθος** , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν για δύο συναρτήσεις f , g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε πάντα ισχύει ότι

$$f \circ g = g \circ f .$$

Μονάδες 2

β. Αν μια συνάρτηση δεν είναι 1 - 1 τότε δεν είναι γνησίως μονότονη .

Μονάδες 2

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = +\infty$

Μονάδες 2

ε. Αν υπάρχει η αντίστροφη της συνάρτησης $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in A$.

Μονάδες 2

ζ. Η συνάρτηση f είναι 1 - 1 , αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

η. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει $f(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \in A$, για κάποιον πραγματικό αριθμό α τότε το α είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο A .

Μονάδες 2

θ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Μονάδες 2

ι. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε είναι βέβαιο ότι ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{e^x + \alpha}$ και $g(x) = \beta - 3 - \ln x$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \alpha x + \beta) = 3$

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=4$.

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται (Μονάδες 3) και να ορίσετε την f^{-1} . (Μονάδες 5)

Μονάδες 8

B3. Αν $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$ να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$ (Μονάδες 6) και να

δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 2)

Μονάδες 8

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x)$

Μονάδες 3

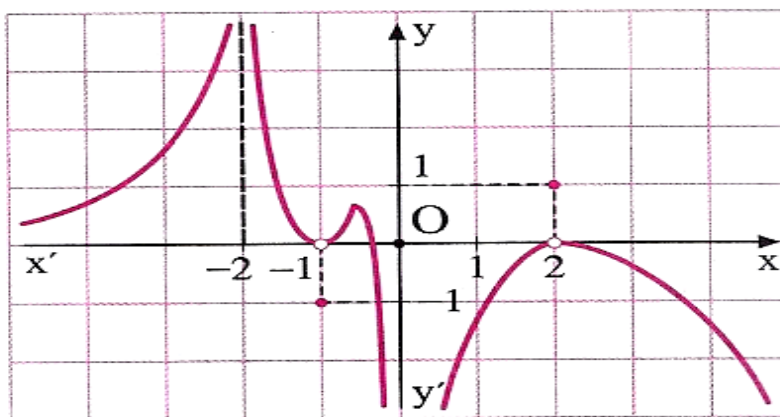
ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x + 4}{x - 3} = 10$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lambda - 18 \text{ και } \frac{h(x)}{x^2 - 1} \geq \frac{2\lambda}{1 - \sqrt{x}} \text{ για κάθε } x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

και η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα



Γ1. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

Μονάδες 2

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -16$$

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{f(x) + 2 - |f^2(x) - 4f(x)|}$$

Μονάδες 2

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot h(x) - h(x) + \eta\mu(x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$$

Μονάδες 4

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{g(x)}}$$

Μονάδες 2

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -2} \left[\left(\frac{g^2(x) - 3g(x) + 5}{g^3(x) + g(x) + 1} \right) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{(x+2)^2} \right) \right]$$

Μονάδες 3

Γ3. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι

- Η f είναι γνησίως μονότονη και γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(1, -16)$.
- Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να λύσετε στο $(2, +\infty)$ την ανίσωση:

$$(f \circ g)(x) + g(x) > (f \circ g)(f^{-1}(2)) + g(3)$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)} + f(x) - x = 1$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 2)

Μονάδες 5

Αν $f^{-1}(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-x} - e^{x+3} = -x^2 + 2x + 3$

Μονάδες 5

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει ότι $f(x^{1999}) - f(x^{2000}) > f(x^{2017}) - f(x^{2016})$

Μονάδες 4

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f^{-1}(\ln x)$

Αν η g έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ να λύσετε την ανίσωση $g^{-1}(x) \geq x$

Μονάδες 7

Καλή Επιτυχία !