<u>ΤΕΣΤ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x+1}{2e^x+3}, x>0$

α)Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

13 μονάδες

β) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

12μονάδες

γ) Αν $g(x)=f(\ln x)$,να βρεθεί :

i) το πεδίο ορισμού της g

13 μονάδες

ii) ο τύπος της g

12μονάδες

2. Δίνεται συνάρτηση fγνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,-3)$ και $B(-2,-2)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

13 μονάδες

β) Να δείξετε ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

12μονάδες

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση

$f\left(f^{-1}\left(e^{2x}-e^x-5\right)-2\right)<-2$.

13 μονάδες

δ)Να βρείτε το πρόσημο της f για x>0.

12μονάδες

Λύσεις

α) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}+1}{2e^{x_1}+3} = \frac{e^{x_2}+1}{2e^{x_2}+3} \Leftrightarrow \left(e^{x_1}+1\right)\cdot\left(2e^{x_2}+3\right) = \left(e^{x_2}+1\right)\cdot\left(2e^{x_1}+3\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{2e^{x_1}e^{x_2}} + 3e^{x_1} + 2e^{x_2} \cancel{+3} = \cancel{2e^{x_1}e^{x_2}} + 3e^{x_2} + 2e^{x_1} \cancel{+3} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 .$$

Άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

β) Θέτω $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{e^x+1}{2e^x+3} = y \Leftrightarrow e^x + 1 = y\left(2e^x+3\right) \Leftrightarrow e^x + 1 = 2ye^x + 3y \Leftrightarrow$

$2ye^x - e^x = 1-3y \Leftrightarrow \left(2y-1\right)e^x = 1-3y \;\; (1)$

Αν $y = \dfrac{1}{2}$,τότε $(1) \Rightarrow 0 = -\dfrac{1}{2}$.Άρα $y \neq \dfrac{1}{2}$.

Οπότε $(1) \Rightarrow e^x = \dfrac{1-3y}{2y-1} > 0 \;\; (2)$

$$\frac{1-3y}{2y-1} > 0 \Leftrightarrow \left(1-3y\right)\left(2y-1\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < y < \frac{1}{2}$$

$$(2) \Rightarrow x = \ln\frac{1-3y}{2y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\frac{1-3y}{2y-1}$$

Επειδή $x > 0$ πρέπει

$$\ln\frac{1-3y}{2y-1} > 0 = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1-3y}{2y-1} > 1 \overset{y<\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} 1-3y < 2y-1 \Leftrightarrow 5y > 2 \Leftrightarrow y > \frac{2}{5} .$$

Οπότε $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{1-3x}{2x-1}$ με $A_{f^{-1}} = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{2}\right)$ όπως προκύπτει από συναλήθευση

των (3),(4).

γ) i) Πρέπει $x > 0$ και $\ln x > 0 = \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$.

Άρα $A_g = (1, +\infty)$

ii) $g(x) = f(\ln x) = \dfrac{e^{\ln x}+1}{2e^{\ln x}+3} = \dfrac{x+1}{2x+3}$

2.Δίνεται συνάρτηση fγνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A\left(0,-3\right)$ και $B\left(-2,-2\right)$.

α) -2<0 και $f(-2) = -2 > f(0) = -3$ οπότε αφού η f είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως φθίνουσα.

β)Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(f(x_1)\right) < f\left(f(x_2)\right)$

Άρα η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ)Αφού η fείναι γνησίως φθίνουσα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$$f\left(f^{-1}\left(e^{2x}-e^{x}-5\right)-2\right)<-2=f(-2)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}\left(e^{2x}-e^{x}-5\right)-2>-2\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}.$$

$$f^{-1}\left(e^{2x}-e^{x}-5\right)>0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}\left(e^{2x}-e^{x}-5\right)\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}-5<-3\Leftrightarrow$$

$$e^{2x}-e^{x}-2<0\Leftrightarrow\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-2\right)<0\Leftrightarrow e^{x}-2<0\Leftrightarrow e^{x}<2\Leftrightarrow x<\ln 2$$

δ) $x>0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<-3<0$.