<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ</u>
<u>ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ</u>

<u>1ο Θέμα</u>

Α. Θεωρία

Β. Θεωρία

Γ. ΛΣΣΣΛ

<u>2ο Θέμα</u>

i) $\left|iz-1\right|+\left|i\bar{z}+1\right|=4 \Leftrightarrow |i||z+i|+|i||\bar{z}-i|=4 \overset{|z+i|=|\bar{z}-i|}{\Leftrightarrow}$

$|z+i|+|z+i|=4 \Leftrightarrow 2|z+i|=4 \Leftrightarrow |z+i|=2$

Άρα οι μιγαδικοί z κινούνται σε κύκλο κέντρου Κ(0,-1) και ακτίνας ρ=2

ii) $\left|z_1+z_2+z_3+3i\right|=\left|z_1+i+z_2+i+z_3+i\right|=\left|\overline{z_1+i+z_2+i+z_3+i}\right|=$

$$\left|\frac{4}{z_1-i}+\frac{4}{z_2-i}+\frac{4}{z_3-i}\right|=4\left|\frac{1}{z_1-i}+\frac{1}{z_2-i}+\frac{1}{z_3-i}\right|=$$

$$4\left|\frac{(z_2-i)(z_3-i)+(z_1-i)(z_3-i)+(z_1-i)(z_2-i)}{(z_1-i)(z_2-i)(z_3-i)}\right|=$$

$$4\frac{\left|(z_2-i)(z_3-i)+(z_1-i)(z_3-i)+(z_1-i)(z_2-i)\right|}{|z_1-i||z_2-i||z_3-i|}=$$

$$\cancel{4}\,\frac{|z_2z_3+z_1z_2+z_1z_3+2i(z_1+z_2+z_3)-3|}{\cancel{8}_{2}}=$$

$$\frac{|z_2z_3+z_1z_2+z_1z_3+2i(z_1+z_2+z_3)-3|}{2}$$

iii) $|z-w|=|z-3-3i|=|z+i-3-4i|$

$||z+i|-|3+4i||\leq|z+i-3-4i|\leq|z+i|+|3+4i| \Leftrightarrow$

$|2-5|\leq|z-w|\leq 2+5 \Leftrightarrow 3\leq|z-w|\leq 7$

iv) $|z+w+2i|=|z+i+w+i|=|z+i+3+4i|$

$||z+i|-|3+4i||\leq|z+i+3+4i|\leq|z+i|+|3+4i| \Leftrightarrow$

$|2-5|\leq|z+w+2i|\leq 2+5 \Leftrightarrow 3\leq|z+w+2i|\leq 7$

3ο Θέμα

α) i. $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=-z_3$.

Επομένως :

$|z_1+z_2|=|-z_3|=2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=4 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=4 \Leftrightarrow$

$|z_1+z_2|=|-z_3|=2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=4 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=4 \Leftrightarrow$

$2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)=-4 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2)=-2$

ii. $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=4=|z_1|^2-\bar{z}_1 z_2-\bar{z}_1 z_2+|z_2|^2=4-2\operatorname{Re}(z_1 z_2)+4=12$

Άρα $|z_1-z_2|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.Όμοια $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|=2\sqrt{3}$

β) i) $|z_1|=2 \Leftrightarrow |z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=4 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{4}{z_1}$ (1) .

Όμοια $\bar{z}_2=\dfrac{4}{z_2}, \bar{z}_3=\dfrac{4}{z_3}$ (2)

Οπότε : $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow \overline{z_1+z_2+z_3}=0 \Leftrightarrow \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3=0 \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{4}{z_1}+\frac{4}{z_2}+\frac{4}{z_3}=0 \overset{(:4)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=0 \overset{(\cdot z_1 z_2 z_3)}{\Leftrightarrow} z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$$

ii) $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0 \Leftrightarrow z_2(z_1+z_3)+z_3z_1=0 \overset{z_1+z_2+z_3=0}{\Leftrightarrow}$

$-z_2^2+z_3z_1=0 \Leftrightarrow z_2^2=z_3z_1 \overset{(\cdot z_2)}{\Leftrightarrow} z_2^3=z_1z_2z_3$.

Όμοια $z_1^3=z_1z_2z_3, z_3^3=z_1z_2z_3$

Άρα $z_1^3=z_2^3=z_3^3$

γ) Επειδή $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2$,οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Αν Α,Β,Γ οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 αντίστοιχα τότε :

$(AB)=|z_1-z_2|$, $(B\Gamma)=|z_2-z_3|$ και $(A\Gamma)=|z_3=z_1|$ και (ΑΒ)=(ΒΓ)=(ΑΓ) από το ερώτημα α)ii).

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο

4ο Θέμα

α) $z=\dfrac{1-\bar{w}}{1+\bar{w}}$.(1)

Έστω $z-w=\gamma\in R \Leftrightarrow z=\gamma+w$.

Τότε $z=\dfrac{1-\bar{w}}{1+\bar{w}} \Leftrightarrow \gamma+w=\dfrac{1-\bar{w}}{1+\bar{w}}(\gamma+w)(1+\bar{w})=1-\bar{w} \Leftrightarrow$:

$\gamma+\gamma\bar{w}+w+|w|^2=1-\bar{w}\,|w|^2+w+\bar{w}+\gamma\bar{w}+\gamma-1=0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+2\alpha+\gamma(\alpha-\beta i)+\gamma-1=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha+\gamma\alpha+\gamma-1-\beta\gamma i=0 \Leftrightarrow$

$$\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha+\gamma\alpha+\gamma-1=0\right) \text{ και } \left(-\beta\gamma=0 \overset{\beta\neq 0}{\Leftrightarrow} \gamma=0\right)$$

Άρα z=w

β) $\alpha^2+\beta^2+2\alpha+\gamma\alpha+\gamma-1=0 \overset{\gamma=0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\beta^2+2\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1+\beta^2=2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2+\beta^2=2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο K(-1,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$

γ) $w^2=(a+\beta i)^2=a^2-\beta^2+2\alpha\beta i$.

Ο αριθμός w^2 είναι φανταστικός .

Άρα $\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\neq 0}(\alpha-\beta)=0 \overset{(\alpha\cdot\beta>0)}{\Leftrightarrow} \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$ και w=α + αi.

Οπότε : $\left(w+1+i\right)^{2014}+\left(\overline{w}+1-i\right)^{2014}=\left(\alpha+\alpha i+1+i\right)^{2014}+\left(\alpha-\alpha i+1-i\right)^{2014}=$

$$\left[\alpha(1+i)+1+i\right]^{2014}+\left[\alpha(1-i)+1-i\right]^{2014}=\left[(\alpha+1)(1+i)\right]^{2014}+\left[(\alpha+1)(1-i)\right]^{2014}=$$

$$(\alpha+1)^{2014}\cdot(1+i)^{2014}+(\alpha+1)^{2014}\cdot(1-i)^{2014}=(\alpha+1)^{2014}\left[(1+i)^{2014}+(1-i)^{2014}\right]=$$

$$(\alpha+1)^{2014}\left[i^{2014}(1-i)^{2014}+(1-i)^{2014}\right]=(\alpha+1)^{2014}\cdot(1-i)^{2014}\cdot(i^{2014}+1)=$$

$$(\alpha+1)^{2014}\cdot(1-i)^{2014}\cdot(-1+1)=0$$