ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΟΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ και οι συναρτήσεις f και g έχουν διαφορετικά όρια κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ της.

β. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 και είναι πραγματικοί αριθμοί ,τότε $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

γ. $|\eta\mu x| > |x|$ για οποιονδήποτε πραγματικό x.

δ. Αν $f(x) > g(x)$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

ε. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x} - 1\right) = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$.

Μονάδες 5×2

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > 0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ τότε και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) > 0$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 1+2

Α3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, x<0 \\ 2x+1, 0 \le x < 1 \\ 3x-1, x>1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x), \lim\limits_{x \to 1} f(x), \lim\limits_{x \to -1} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Μονάδες 3+3+3+3

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

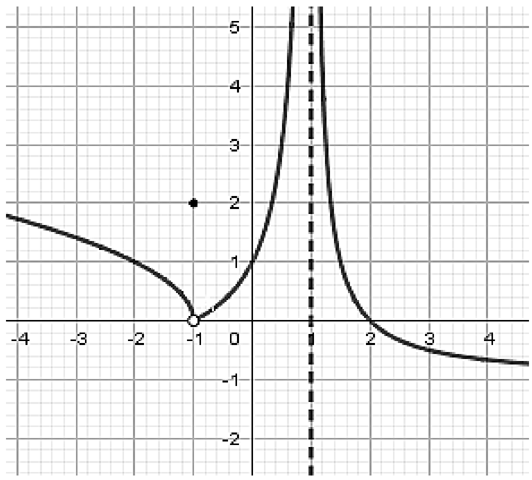
β) Να βρείτε τα παρακάτω όρια (αν υπάρχουν) και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

i) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{f(x)}$

iv) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f(x)}$



γ) Δίνεται η συνάρτηση g για την οποία ισχύει
$g^3(x)+\eta\mu x\cdot g^2(x)+\eta\mu^2 x\cdot g(x)+x^3=x^3\cdot f(x)$.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g(x)}{x}$,αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 3+16+6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x^2+x\le f(x)\le x^3+1, x\ge -1$.

Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f(x)+1|-3}{\sqrt{x+3}-2}$.

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(f(x)-2\right)-1}{3f(x)-6}$.

ε) $\lim\limits_{x\to +\infty}\eta\mu\left(f^2(x)+f(x)\right)\dfrac{f^3(x)+2f(x)+3}{f^4(x)+2}$.

Μονάδες 5+5+5+5+5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν :

- $f(x)=g(2-x)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x^2+x}{2x}=3$

α) Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Μονάδες 4+4

β) Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}$

Μονάδες 4+4

γ) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=5, \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}=-5$,να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu 4x+x^2}{f(2x)+\sigma\upsilon\nu 2x-1}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)+x^3-4x^2+4x}{g(x)+\left(\sqrt{g(x)+1}-1\right)}$

Μονάδες 5+4

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.ΛΣΛΛΣ

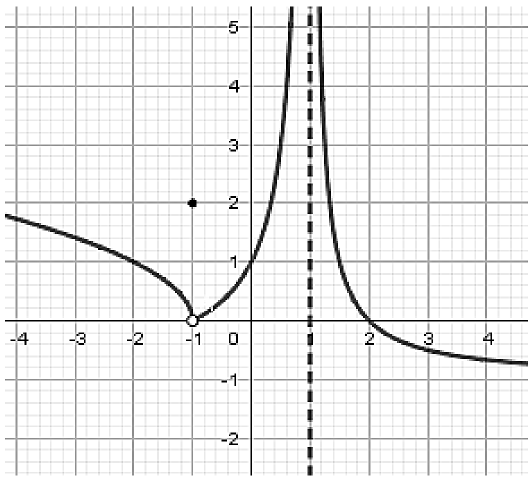
Α2. α) Λ.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|, x\neq 0$.Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Α3. Έχουμε **:**

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3, \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-1)=2$ οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-1)=\lim\limits_{x\to +\infty} 3x=+\infty$.

ΘΕΜΑ 2º



α) $A_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

β) i) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$ αφού $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0$.

ii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

iii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο -1.

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

γ) Έστω $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g(x)}{x}=a, a\in\mathbb{R}$**.**

Για $x\neq 0$ έχουμε $g^3(x)+\eta\mu x\cdot g^2(x)+\eta\mu^2 x\cdot g(x)+x^3=x^3\cdot f(x)\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{g(x)}{x}\right)^3+\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot\frac{g(x)}{x}+1=f(x) \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to -1}\left[\left(\frac{g(x)}{x}\right)^3+\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot\frac{g(x)}{x}+1\right]=\lim_{x\to -1} f(x)\Leftrightarrow a^3+a^2+a+1=0\Leftrightarrow$$

$$a^2(a+1)+(\alpha+1)=0\Leftrightarrow(\alpha+1)\Big(\underbrace{\alpha^2+1}_{\neq 0}\Big)=0\Leftrightarrow\alpha=-1.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x\right)=2=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+1\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

β) Από την σχέση που μας δίνεται έχουμε :

$\mathrm{x}^2+\mathrm{x}\le \mathrm{f}(\mathrm{x})\le \mathrm{x}^3+1 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2+\mathrm{x}-2\le \mathrm{f}(\mathrm{x})-2\le \mathrm{x}^3-1.$

- Για $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ έχουμε :

$$\frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}-1}\le\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}\le\frac{\mathrm{x}^3-1}{\mathrm{x}-1}\Leftrightarrow\frac{\cancel{(\mathrm{x}-1)}(\mathrm{x}+2)}{\cancel{\mathrm{x}-1}}\le\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}\le\frac{\cancel{(\mathrm{x}-1)}\cdot(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)}{\cancel{\mathrm{x}-1}}\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{x}+2\le\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}\le \mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+x+1\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 1^+}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}=3$ (1).

- Για $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ έχουμε :

$$\frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}-1}\ge\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}\ge\frac{\mathrm{x}^3-1}{\mathrm{x}-1}\Leftrightarrow\frac{\cancel{(\mathrm{x}-1)}(\mathrm{x}+2)}{\cancel{\mathrm{x}-1}}\ge\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}\ge\frac{\cancel{(\mathrm{x}-1)}\cdot(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)}{\cancel{\mathrm{x}-1}}\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{x}+2\ge\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}\ge \mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x+1\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 1^-}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}=3$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 1}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-2}{\mathrm{x}-1}=3$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+1\right)=3>0$ οπότε $f(x)+1>0$ κοντά στο 1 και

$$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)+1|-3}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+1-3}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(f(x)-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)=3\cdot 4=12.$$

δ) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sigma\upsilon\nu(f(x)-2)-1}{3f(x)-6}=\lim_{x\to 1}\frac{\sigma\upsilon\nu(f(x)-2)-1}{3(f(x)-2)}\underset{\substack{x\to 1,\\ u\to 0}}{\overset{u=f(x)-2}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{3u}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=\frac{1}{3}\cdot 0=($$

ε) Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ($f(x)\ge x^2+x$)

$$\lim_{x\to+\infty}\eta\mu\left(f^2(x)+f(x)\right)\cdot\frac{f^3(x)+2f(x)+3}{f^4(x)+2}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to+\infty}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{x\to+\infty,\ u\to+\infty}\eta\mu\left(u^2+u\right)\cdot\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}=0.$$

$$\left(\left|\eta\mu\left(u^2+u\right)\cdot\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}\right|\le\left|\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}\right|\le\eta\mu\left(u^2+u\right)\cdot\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}\le\left|\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}\right|\right.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{u^3}}{u^{\cancel{4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{u}$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}\right|=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{u^3+2u+3}{u^4+2}\right|\right)$ άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu\left(u^2+u\right)\cdot\dfrac{u^3+2u+3}{u^4+2}\right)=0$)

ΘΕΜΑ 4º

α) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{h}(\mathrm{x})=\dfrac{\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{x}^2+\mathrm{x}}{2\mathrm{x}},\mathrm{x}\neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}\cdot\mathrm{h}(\mathrm{x})+\mathrm{x}^2-\mathrm{x}$ οπότε

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot h(x)+x^2-x\right)=0$$

ii) $$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}f(2-x)\underset{\substack{x\to 0,\ u\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=2-x}{=}}\lim_{u\to 0}f(u)=0$$

β) Να βρείτε τα όρια :

i) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}\cdot h(x)+x^{\cancel{2}}-\cancel{x}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}\left(2h(x)+x-1\right)=5$$

ii) $$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(2-x)}{x-2}\underset{\substack{x\to 2,\ u\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=2-x}{=}}\lim_{u\to 0}\left[-\frac{f(u)}{u}\right]=-5$$

γ) i) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\eta\mu 4x+x^2}{f(2x)+\sigma\upsilon\nu 2x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-\eta\mu 4x+x^2}{x}}{\dfrac{f(2x)+\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu 4x}{x}+x}{\dfrac{f(2x)}{x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}}=\frac{5-4}{10+0}=\frac{1}{10}$$ αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{x}\underset{\substack{x\to 0,\ u\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=4x}{=}}\lim\frac{\eta\mu u}{\frac{u}{4}}=\lim_{u\to 0}4\frac{\eta\mu u}{u}=4,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}\underset{\substack{x\to 0,\ h\to 0\\ h\to 0}}{\overset{h=2x}{=}}\lim\frac{f(h)}{\frac{h}{2}}=\lim_{u\to 0}2\frac{f(h)}{h}=2\cdot 5=10$$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}\underset{\substack{x\to 0,\ u\to 0\\ h\to 0}}{\overset{h=2x}{=}}\lim\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{\frac{h}{2}}=\lim_{u\to 0}2\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=2\cdot 0=0.$$

ii) $$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+x^3-4x^2+4x}{g(x)+\left(\sqrt{g(x)+1}-1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+x\left(x^2-4x+4\right)}{g(x)+\left(\sqrt{g(x)+1}-1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)+x(x-2)^2}{g(x)+\left(\sqrt{g(x)+1}-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{g(x)}{x-2}+x(x-2)}{\dfrac{g(x)}{x-2}+\dfrac{\sqrt{g(x)+1}-1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{g(x)}{x-2}+x(x-2)}{\dfrac{g(x)}{x-2}+\dfrac{g(x)}{(x-2)\left(\sqrt{g(x)+1}+1\right)}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{g(x)}{x-2}+x(x-2)}{\dfrac{g(x)}{x-2}+\dfrac{g(x)}{x-2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{g(x)+1}+1}}=\frac{-5}{-5+(-5)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$