Διαγώνισμα στις παραγώγους μέχρι και ακρότατα

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ,η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ..
Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

7 μονάδες

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και $f'(x)=0$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της ,τότε η f είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

4 μονάδες

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

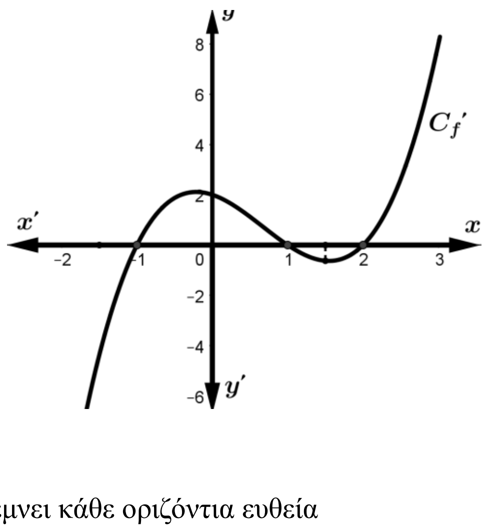
4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος.
α) Αν δύο συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x,τότε η διαφορά των τύπων τους εκφράζει εξίσωση ευθείας ΄ παράλληλης στον άξονα χ΄χ.
β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνο αν $f'(x)>0$.
γ) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=f(x)$,για κάθε πραγματικό x, τότε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.
δ) Κάθε εφαπτομένη μίας συνάρτησης τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο.
ε) Το ΘΜΤ εφαρμόζεται σε κάθε πολυωνυμική συνάρτηση.

10 μονάδες

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παράγωγος της συνάρτησης f.
Αν $f(-1)=-\dfrac{23}{12}, f(1)=\dfrac{13}{12}, f(2)=\dfrac{2}{3}$ και
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.



Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Β3. Να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.
Β4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία $y=\alpha, -\dfrac{23}{12}<\alpha<\dfrac{2}{3}$ σε δύο ακριβώς σημεία.

Μονάδες 7+6+6+6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}-\sqrt{x}-1,\ x\ge 0$

Γ1. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο x_0 ,του οποίου να βρείτε το είδος του.

Μονάδες 7

Γ2. Αφού δείξετε ότι $0<x_0<1$,να λύσετε την εξίσωση

$$e^{2\sqrt{x}-\ln x}+\sqrt{2}=e^{2}+\sqrt{2\sqrt{x}-\ln x},\ x\ge 1.$$

Μονάδες 7

Γ3.Να αποδείξετε ότι :

$$(\beta-\alpha)\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)+e^{\alpha}-\sqrt{\alpha}-1<f(\beta)<(\beta-\alpha)\left(e^{\beta}-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right)+e^{\alpha}-\sqrt{\alpha}-1,\ \alpha<\beta.$$

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=\left(e-\frac{1}{2}\right)x-\frac{3}{2}$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Αγρότης έχει ένα αγρόκτημα .Θέλει να το χωρίσει σε τρία κυκλικά αγροκτήματα έτσι ώστε :

- να περιφράξει ένα κομμάτι του πρώτου αγροκτήματος σχήματος κυκλικού τομέα με σύρμα μήκους 500 μέτρων ώστε να δημιουργήσει ένα ανθόκηπο με τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια.
- να περιφράξει ένα κομμάτι του δεύτερου αγροκτήματος σχήματος ισοσκελούς τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο , ώστε να δημιουργήσει ένα ελαιώνα.
- το δεύτερο αγρόκτημα να έχει ακτίνα ίση με τη λύση της εξίσωσης $e^{x-10}+x-11=0$
- να περιφράξει ένα κομμάτι του τρίτου αγροκτήματος σχήματος ορθογωνίου εγγεγραμμένου στον κύκλο ακτίνας $R=25\sqrt{2}$,ώστε να δημιουργήσει ένα περιβόλι με διάφορα δέντρα.

Δ1. Να δείξετε ότι η ακτίνα R του πρώτου κυκλικού αγροκτήματος είναι ίση με 125m.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ελαιώνα είναι :
$E(\varphi)=200\etaμ\varphi(1+\sigmaυν\varphi)$, όπου φ η γωνία η περιεχόμενη στις ίσες πλευρές του τριγώνου.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε την τιμή της γωνίας φ , αν ο αγρότης θέλει ο ελαιώνας να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια .

Μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του περιβολιού είναι :
$E(x)=x\sqrt{5000-x^{2}}$,$0<x<50\sqrt{2}$, όπου x η μία διάσταση του περιβολιού.

Μονάδες 5

Δ5. Να δείξετε ότι το περιβόλι έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια όταν έχει σχήμα τετράγωνο.

Μονάδες 5

Λύσεις

Θέμα 1ο

Α1. Θεωρία

Α2. **α)** ψευδής

β) Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι ένωση διαστημάτων δεν ισχύει.

π.χ.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 1, x>0\end{cases}$.Παρατηρούμε ότι , αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,εν τούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Α3. Θεωρία

Α4. ΣΛΣΛΣ

Θέμα 2ο

Β1. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,2]$ αφού $f'(x)<0$ στα διαστήματα $(-\infty,-1),(1,2)$ και συνεχής στα $(-\infty,-1],[1,2]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,1]\ [2,+\infty)$, αφού $f'(x)>0$ στα διαστήματα $(-1,1)$, $(2,+\infty)$ και συνεχής στα $[-1,1]$, $[2,+\infty)$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1 το $f(-1)=-\frac{23}{12}$,στο 2 το $f(2)=\frac{2}{3}$ και τοπικό μέγιστο στο 1 ,το $f(1)=\frac{13}{12}$.

Β2. Έστω τα διαστήματα $A_1=(-\infty,-1)$, $A_2=[-1,1], A_3=(1,2), A_4=[2,+\infty)$.

$$f(A_1)\underset{\text{συνεχής}}{\overset{\searrow}{=}}\left(\lim_{x\to-1^-}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(-\frac{23}{12},+\infty\right).\ \left(\lim_{x\to-1^-}f(x)\overset{\text{f συνεχής}}{=}f(-1)=-\frac{23}{12}\right)$$

$$f(A_2)\underset{\text{συνεχής}}{\overset{\nearrow}{=}}\left[f(-1),f(1)\right]=\left[-\frac{23}{12},\frac{13}{12}\right].$$

$$f(A_3)\underset{\text{συνεχής}}{\overset{\searrow}{=}}\left(\lim_{x\to2^-}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{13}{12}\right).$$

$$\left(\lim_{x\to1^+}f(x)\overset{\text{f συνεχής}}{=}f(1)=\frac{13}{12},\lim_{x\to2^-}f(x)\overset{\text{f συνεχής}}{=}f(2)=\frac{2}{3}\right).$$

$$f(A_4)\underset{\text{συνεχής}}{\overset{\nearrow}{=}}\left[f(2),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$$

Οπότε $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)\cup f(A_4)=\left[-\frac{23}{12},+\infty\right)$.

Β3.Το 0 ανήκει μόνο στα $f(A_1),f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1\in A_1, x_2\in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)=0, f(x_2)=0$.

Τα x_1,x_2 μοναδικά λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες.

Β4. Το α ανήκει μόνο στα $f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $\alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_4$ τέτοια ώστε $f(\alpha_1)=\alpha, f(\alpha_2)=\alpha$.
Τα α_1, α_2 μοναδικά λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα.
Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία $y=\alpha, -\frac{23}{12}<\alpha<\frac{2}{3}$ σε δύο ακριβώς σημεία.

<u>Θέμα 3ο</u>

Γ1. $f'(x)=e^x-\frac{1}{2\sqrt{x}}, x>0$.

$f''(x)=e^x+\frac{1}{4x\sqrt{x}}>0$,οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

$f'(A) \overset{f\nearrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=1-\infty=-\infty,$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=+\infty-0=+\infty$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f' άρα υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$,το οποίο είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.
Έχουμε :

Για $0<x<x_0 \overset{\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,x_0]$ αφού είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $[0,x_0]$.

Για $x>x_0 \overset{\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα και στο $[x_0,+\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 ,το $f(x_0)$.

Γ2. $f'(1)=e-\frac{1}{2\sqrt{e}}>0 \Rightarrow f'(1)>f'(x_0) \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} 1>x_0$ άρα $0<x_0<1$.

Για $x>1>x_0$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

$e^{2\sqrt{x}-\ln x}+\sqrt{2}=e^2+\sqrt{2\sqrt{x}-\ln x}, x\geq 1 \Leftrightarrow e^{2\sqrt{x}-\ln x}-\sqrt{2\sqrt{x}-\ln x}=e^2-\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$e^{2\sqrt{x}-\ln x}-\sqrt{2\sqrt{x}-\ln x}-1=e^2-\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow f\left(2\sqrt{x}-\ln x\right)=f(2) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} 2\sqrt{x}-\ln x=2 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{x}-\ln x-2=0\,(1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2\sqrt{x}-\ln x-2, x\geq 1$.

Έχουμε $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}>0$ για $x\neq 1$ αφού $x>1\Leftrightarrow\sqrt{x}>1\Leftrightarrow 1-\sqrt{x}<0$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

$(1)\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow g(x)=g(1)\overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

Γ3. $(\beta-\alpha)\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)+e^{\alpha}-\sqrt{\alpha}-1<f(\beta)<(\beta-\alpha)\left(e^{\beta}-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right)+e^{\alpha}-\sqrt{\alpha}-1\Leftrightarrow$

$(\beta-\alpha)\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)+f(\alpha)<f(\beta)<(\beta-\alpha)\left(e^{\beta}-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right)+f(\alpha)\Leftrightarrow$

$(\beta-\alpha)\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)<f(\beta)-f(\alpha)<(\beta-\alpha)\left(e^{\beta}-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right)\Leftrightarrow$

$e^{\alpha}-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<e^{\beta}-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}$ (1).

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Όμως $\alpha<\xi<\beta\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)\Leftrightarrow e^{\alpha}-\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}<\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<e^{\beta}-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}$ (1) .

Γ4. Πρέπει $f'(x)=e-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(1)\overset{f'\,1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο 1 είναι

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-e+2=\left(e-\frac{1}{2}\right)(x-1)\Leftrightarrow y=\left(e-\frac{1}{2}\right)x\cancel{-e}+\frac{1}{2}\cancel{+e}-2\Leftrightarrow$

$y=\left(e-\frac{1}{2}\right)x-\frac{3}{2}$, η οποία είναι η εξίσωση της (ε).

<u>Θέμα 4ο</u>

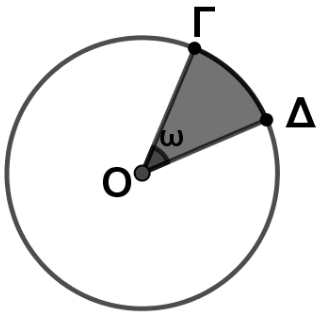
Δ1. Η περίμετρος του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΓΔ (ανθόκηπου) είναι :

$\Pi=500\Leftrightarrow O\Gamma+O\Delta+\Gamma\Delta=500\Leftrightarrow$

$500=2R+R\omega\Leftrightarrow R\omega=500-2R\Leftrightarrow$

$\omega=\frac{500-2R}{R}, 0<R<250 (1), \omega$ σε rad.

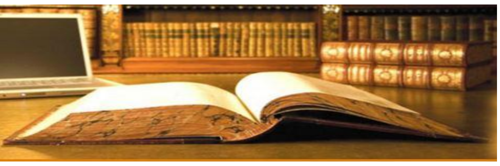
Ο ανθόκηπος έχει εμβαδόν



$E_1(R)=\frac{1}{2}R^2\omega\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}R^{\cancel{2}}\frac{500-2R}{\cancel{R}}=\frac{500R-2R^2}{2}\Leftrightarrow$

$E_1(R)=250R-R^2$

$E_1(R)=500R-2R^2$, $0<R<250$.

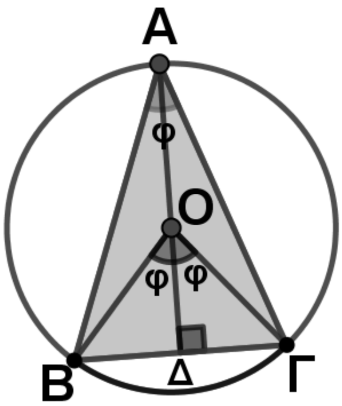


Ισχύει : $E_1'(R) = 500 - 4R$.

$E_1'(R) > 0 \Leftrightarrow 500 - 4R > 0 \Leftrightarrow 4R < 500 \Leftrightarrow R < 125$.

Η συνάρτηση E_1 είναι συνεχής στο $(0,125)$ άρα η E1 είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,125]$, γνησίως φθίνουσα στο $[125,250)$ και παρουσιάζει μέγιστο για $R = 125$.

Δ2. $e^{x-10} + x - 11 = 0$ (1).



Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^{x-10} + x - 11$,η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = e^{x-10} + 1 > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(10) \Leftrightarrow x = 10$ άρα η ακτίνα του δεύτερου αγροκτήματος είναι ίση με ρ=10m.

Το εμβαδόν του ελαιώνα (ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ) είναι ίσο με $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot B\Gamma$.

Όμως

$A\Delta = OA + O\Delta = \rho + \rho\sigma\upsilon\nu\varphi = 10 + 10\sigma\upsilon\nu\varphi = 10(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)$

και $B\Gamma = 2\Delta\Gamma = 2\rho\eta\mu\varphi = 20\eta\mu\varphi$ ($\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{O\Delta}{O\Gamma}, \eta\mu\varphi = \frac{\Delta B}{O\Gamma}$ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΓ).

Άρα το εμβαδόν του ελαιώνα είναι ίσο

$E(\varphi) = 10(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)20\eta\mu\varphi = 200\eta\mu\varphi(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi)$.

Δ3. Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη με

$E'(\varphi) = 200\left[\sigma\upsilon\nu\varphi(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) - \eta\mu^2\varphi\right] = 200\left(\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\varphi\right) \Leftrightarrow$

$E'(\varphi) = 200\left(2\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi - 1\right) = 200(\sigma\upsilon\nu\varphi + 1)(2\sigma\upsilon\nu\varphi - 1)$.

Έχουμε $E'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow 200\left(\underbrace{\sigma\upsilon\nu\varphi + 1}_{\neq 0 \ \sigma\tau o (0,\pi)}\right)(2\sigma\upsilon\nu\varphi - 1) = 0 \Leftrightarrow \ 2\sigma\upsilon\nu\varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}$.

Όμως $\varphi \in (0,\pi)$ άρα $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

$E'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 200\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 200\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 100\left(\sqrt{3} + 1\right) > 0$ άρα $E'(\varphi) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

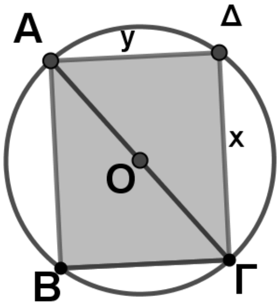
οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$.

$E'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 200(-1) = -200 < 0$ άρα $E'(\varphi) < 0$ στο $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Επομένως ο ελαιώνας να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια

όταν $\varphi = \frac{\pi}{3}$.



Δ4. Έστω x,y οι διαστάσεις του περιβολιού (ορθογώνιο ΑΒΓΔ).
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$x^2+y^2=\text{ΑΓ}^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4R^2 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2=5000 \Leftrightarrow y^2=5000-x^2 \Leftrightarrow$

$y=\sqrt{5000-x^2}\,,0<x<50\sqrt{2}$.

Το εμβαδόν του περιβολιού είναι :

$S(x)=x\cdot y=x\sqrt{5000-x^2}\,,0<x<50\sqrt{2}$.

Δ5. Η συνάρτηση S είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$S'(x)=\sqrt{5000-x^2}+\frac{-\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{5000-x^2}}=\frac{5000-2x^2}{\sqrt{50000-x^2}}.$$

$S'(x)>0 \Leftrightarrow 5000-2x^2>0 \Leftrightarrow 2x^2<5000 \Leftrightarrow x^2<2500 \Leftrightarrow x<50$.

Η συνάρτηση S είναι συνεχής στο $\left(0,50\sqrt{2}\right)$ άρα η S είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,50\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[50,50\sqrt{2}\right)$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x=50$.

Για $x=50$ έχουμε $y=\sqrt{5000-2500}=\sqrt{2500}=50$.

Άρα το περιβόλι έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια όταν έχει σχήμα τετράγωνο.