ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και f(α)≠f(β), τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=ξ$.

Μονάδες 12

Β.*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α.Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\sim, \ ]$ τότε θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\sim, \ ]$.

Μονάδες 2

β.Αν η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο x_0 ,τότε οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0.

Μονάδες 2

γ.Αν η συνάρτηση f : [0, + ∞) → R είναι γνησίως αύξουσα, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 2

δ Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], η εξίσωση f (x) = 0 δεν έχει ρίζα στο (α, β) και υπάρχει ξ ∈ (α, β) ώστε f (ξ) < 0, τότε θα ισχύει f (x) < 0 για κάθε x ∈ (α, β).

Μονάδες 2

Γ. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} a^2x^3+3x+\ ^2 , & x<1 \\ 2βx^2+2\sim x+1 , & x\geq 1 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $\sim = \ =1$

(μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(-\infty,1)$.

(μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα στο $[1,+\infty)$.

(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3x+4}{x-2}=2015$
- $|g(x)-1|\leq|f(x)-2|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- η f είναι συνεχής στο 2
- $f(x)=f(x+1),\ x\in\mathbb{R}$

α) να βρείτε το f(2)

(μονάδες 6)

β) να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

(μονάδες 6)

γ) να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.

(μονάδες 6)

δ) Αν η g είναι συνεχής στο $[2,3]$,να δείξετε ότι η εξίσωση $2xg(x) = 5$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο R.Αν ισχύει : $9f^2(x) - 6xf(x) = 9$ για κάθε $x \in R$,

Α) Αν $h(x) = 3f(x) - x$, να αποδείξετε ότι η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

(μονάδες 6)

Β) Αν $f(4) = -\frac{1}{3}$,

α) να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{3}$

(μονάδες 6)

β) να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2016$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

(μονάδες 6)

γ) i) να δείξετε ότι $f(x) = -\dfrac{3}{x + \sqrt{9 + x^2}}$

(μονάδες 2)

ii) η εξίσωση $f(x) = \dfrac{f(1) + 3f(2) + 2f(3)}{6}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο [1,3]

(μονάδες 5)

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

Α.Θεωρία

Β.ΣΛΛΣ

Γ.Θεωρία

ΘΕΜΑ 2ο

α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1 οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ (1).

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(a^2x^3 + 3x + \ ^2 \right) = a^2 + 3 + \ ^2 \ (2)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(2\beta x^2 + 2\sim x + 1 \ \right) = 2 \quad + 2\sim + 1 (3)$$

$$(1) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} \sim^2 + 3 + \ ^2 = 2 \quad + 2\sim + 1 \Leftrightarrow \sim^2 - 2\sim + 1 + \ ^2 - 2 \quad + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sim - 1)^2 + (\quad - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sim = 1 \text{και} \quad = 1$$

Για α=β=1 : $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 1 & , \ x < 1 \\ x^2 + 2x + 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$.

β) Έστω $x_1, x_2 < 1$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$ (1)

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1$ (2)

$(1) + (2) \Rightarrow x_1^3 + 3x_1 + 1 < x_2^3 + 3x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$ άρα και 1-1.

$$f\left((-\infty,1)\right) \underset{\pm^3\neg\pounds\text{¡ ήs}}{\overset{f\nearrow}{=}} \left(\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x) \right) = (-\infty, 5)$$

Το $0 \in f\left((-\infty,1)\right)$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (-\infty,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f είναι 1-1

γ) Έστω $x_1, x_2 \geq 1$ με

$x_1 < x_2 \overset{x_1,x_2>0}{\Leftrightarrow} x_1^2 < x_2^2$ (1)

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$ (2)

$(1) + (2) \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 + 1 < x_2^2 + 2x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ άρα και 1-1.

$$f\left([1,+\infty)\right) \underset{\pm^3\neg\pounds\text{¡ ήs}}{\overset{f\nearrow}{=}} \left[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x) \right) = (5, +\infty)$$

Το $2016 \in f\left([1,+\infty)\right)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in [1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 2016$.Το x_1 είναι μοναδικό αφού η f είναι 1-1

ΘΕΜΑ 3ο

α) Θεωρούμε για $x \neq 2 : g(x) = \dfrac{f(x)-3x+4}{x-2} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\cdot(x-2)+3x-4$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\cdot(x-2)+3x-4\right] = 2 = f(2)$,αφού η f είναι συνεχής στο 2

β) $|g(x)-1| \leq |f(x)-2| \Leftrightarrow -|f(x)-2| \leq g(x)-1 \leq |f(x)-2| \Leftrightarrow$

$1-|f(x)-2| \leq g(x) \leq 1+|f(x)-2|$ (1)

$\lim\limits_{x\to 2}\left(1-|f(x)-2|\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+|f(x)-2|\right)=1$ οπότε και $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 2$ από Κριτήριο παρεμβολής.

$(1)\overset{x=2}{\Rightarrow} 1 \leq g(2) \leq 1$ οπότε $g(2)=1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$ οπότε η g είναι συνεχής στο 2

γ) $f(x) = f(x+1)$ (2)

Από την (2) για $x=2$ έχουμε $f(2) = f(3) \Leftrightarrow f(3) = 2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \overset{(2)}{=} \lim\limits_{x\to 2} f(x+1) \underset{x\to 2 \Rightarrow u\to 3}{\overset{u=x+1}{=}} \lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2 = f(3)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 3.

δ) $(1)\overset{x=3}{\Rightarrow} 1-|f(3)-2| \leq g(3) \leq 1+|f(3)-2| \Leftrightarrow 1 \leq g(3) \leq 1$ οπότε $g(3)=1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2xg(x) - \dfrac{5}{2}$

Η h είναι συνεχής $[2,3]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$h(2) = 4g(2)-5 = -1 < 0$, $h(3) = 6g(3)-5 = 1 > 0$

οπότε $h(2)\cdot h(3) < 0$.

Επομένως ισχύει το θεώρημα Bolzano δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 g(x_0) - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 g(x_0) = 5$,οπότε η εξίσωση $2xg(x) = 5$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$

ΘΕΜΑ 4ο

Α) $9f^2(x) - 6xf(x) = 9 \Leftrightarrow 9f^2(x) - 6xf(x) + x^2 = 9 + x^2 \Leftrightarrow (3f(x)-x)^2 = 9 + x^2 \Leftrightarrow$

$h^2(x) = 9 + x^2 \neq 0$.

Επομένως $h(x) \neq 0$ και επειδή η h συνεχής στο R σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων διατηρεί σταθερό πρόσημο

Β) α) $h(4) = 3f(4) - 4 = -5 < 0$ οπότε $h(x) < 0$ στο $\mathbb{R}$.

$h^2(x) = 9 + x^2 \Leftrightarrow h(x) = -\sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow 3f(x) - x = -\sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow 3f(x) = x - \sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow$

$f(x) = \dfrac{x-\sqrt{9+x^2}}{3}$

β) Έστω $x_1, x_2 < 0$ με

$$x_1 < x_2 \ (1) \overset{x_1,x_2<0}{\Leftrightarrow} x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow 9+x_1^2 > 9+x_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{9+x_1^2} > \sqrt{9+x_2^2} \Leftrightarrow -\sqrt{9+x_1^2} < -\sqrt{9+x_2^2} \ (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow x_1 - \sqrt{9+x_1^2} < x_2 - \sqrt{9+x_2^2} \Leftrightarrow \frac{x_1 - \sqrt{9+x_1^2}}{3} < \frac{x_2 - \sqrt{9+x_2^2}}{3} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

Έστω $A_1 = (-\infty, 0)$.

$$f(A_1) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f\nearrow}{=}} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, -1) \ .$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+9}}{3} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \frac{1+\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}{3} = -\infty \cdot \frac{2}{3} = -\infty \, , \ \lim_{x\to 0^-} f(x) \overset{\text{συνεχής}}{=} f(0) = -1$$

Το $-2016 \in f(A_1)$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi < 0$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = -2016$.

Το ξ μοναδικό αφού η f είναι 1-1.

γ) i) $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{9+x^2}}{3} = \dfrac{x^2-(9+x^2)}{3\cdot\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)} = \dfrac{\cancel{x^2}-9-\cancel{x^2}}{3\cdot\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)} = -\dfrac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{3}\cdot\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)} = -\dfrac{3}{x+\sqrt{9+x^2}}$

ii) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με

$$x_1 < x_2 \ (1) \overset{x_1,x_2>0}{\Leftrightarrow} x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow 9+x_1^2 < 9+x_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{9+x_1^2} < \sqrt{9+x_2^2} \ (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow x_1 + \sqrt{9+x_1^2} < x_2 + \sqrt{9+x_2^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+\sqrt{9+x_1^2}} > \frac{1}{x_1+\sqrt{9+x_1^2}} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{x_1+\sqrt{9+x_1^2}} < -\frac{3}{x_1+\sqrt{9+x_1^2}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.

Θεωρούμε $g(x) = 6f(x) - f(1) - 3f(2) - 2f(3)$

Η g συνεχής στο [1,3]

$$g(1) = 6f(1) - f(1) - 3f(2) - 2f(3) = 5f(1) - 3f(2) - 2f(3) = 3\left(f(1) - f(2)\right) + 2\left(f(1) - f(3)\right) < 0$$

$$g(3) = 6f(3) - f(1) - 3f(2) - 2f(3) = 4f(3) - f(1) - 3f(2) = 3\left(f(3) - f(2)\right) + f(3) - f(1) > 0$$

$$\left(1 < 2 < 3 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1) < f(2) < f(3)\right)$$

Άρα $g(1)\cdot g(3) < 0$.Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θ.Bolzano οπότε υπάρχει

$\gamma \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $g(\gamma) = 0 \Leftrightarrow 6f(\gamma) - f(1) - 3f(2) - 2f(3) = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = \dfrac{f(1)+3f(2)+2f(3)}{6}$.

Το γ μοναδικό αφού η f είναι 1-1.