

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ  
ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A. α) Πότε μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1;  
(Μονάδες 2)
- β) Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;  
(Μονάδες 2)
- γ) Πως διαπιστώνουμε από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, ότι η συνάρτηση είναι 1-1;  
(Μονάδες 2)
- δ) Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ , το  $f(x_0)$ ;  
(Μονάδες 3)
- ε) Πότε δυο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;  
(Μονάδες 2)
- στ) Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Πότε ορίζεται η  $f^{-1}$  και ποιο πεδίο ορισμού έχει;  
(Μονάδες 2)
- ζ) Τι γνωρίζετε για τις  $C_f, C_{f^{-1}}$   
(Μονάδες 2)

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- α) Αν η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1 για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε ισχύει:  $f(x-1) = f(2) \Leftrightarrow x=3$   
(Μονάδες 2)
- β) Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της  $A$ , τότε υπάρχει ευθεία παράλληλη στον  $\chi\chi$  που τέμνει τη  $C_f$  σε πάνω από ένα σημείο.  
(Μονάδες 2)
- γ) Κάθε άρτια συνάρτηση είναι 1-1.  
(Μονάδες 2)
- δ) Η  $C_f$  είναι συμμετρική της  $C_{-f}$  ως προς τον άξονα  $\chi\chi$ .  
(Μονάδες 2)
- ε) Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, a), (a, +\infty)$  τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.  
(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + 2x - 2$ .

- α) Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.  
(Μονάδες 8)
- β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$   
(Μονάδες 8)
- γ) Να λύσετε την ανίσωση  $\ln(x^2 + 1) - 4x + 2 \leq \ln 2x - 2x^2$ .  
(Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 6x + 10$  με  $x > 4$ .

- i) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1. (Μονάδες 6)
- ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της. (Μονάδες 6)
- iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  με την ευθεία  $y=x$ . (Μονάδες 6)
- iv) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της  $f$  (Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Μονάδες 5)
- ii) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή (Μονάδες 5)
- iii) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα (Μονάδες 5)
- iv) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f$  (Μονάδες 5)
- v) Να λύσετε την εξίσωση  $\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) + 2\ln(\sqrt{2} + 1)$  (Μονάδες 5)