

www.askisopolis.gr

Διανύσματα

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

2ο Θέμα

2_18603

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$.

- α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 13)
- β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

2_18604

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{A\Gamma}$

- α) Να γράψετε τα διανύσματα \overrightarrow{EZ} και \overrightarrow{ZB} ως γραμμικό συνδυασμό των \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 13)
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B , Z και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 12)

2_20054

Θεωρούμε τα σημεία P , Λ , K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$5\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K , Λ και M είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)
- β) Για τα παραπάνω σημεία K , Λ και M να δείξετε ότι ισχύει:
 $2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου. (Μονάδες 15)

Συντεταγμένες στο επίπεδο

2ο Θέμα

2_18605

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $\overrightarrow{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου \vec{i} και \vec{j} είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{BG} . (Μονάδες 12)
- β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 13)

2_20055

Θεωρούμε τα σημεία $A(a+1, 3)$, $B(a, 4)$ και $\Gamma(-4, 5a+4)$, $a \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα διανύσματα \overrightarrow{AB} και \overrightarrow{BG} . (μονάδες 8)
- β) Να βρείτε για ποια τιμή του a , τα A, B, Γ είναι συνευθειακά. (μονάδες 10)
- γ) Αν $a=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{AG} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$. (μονάδες 7)

2_20061

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τρεις κορυφές τα σημεία $A(1,1)$, $\Gamma(4, 3)$ και $\Delta(2, 3)$.

- α)** Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)
- β)** Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής K των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής B . (Μονάδες 16)

2_20071

Θεωρούμε τα σημεία $A(1+2\alpha, 4\alpha-2)$ και $B(5\alpha+1, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

- α)** Να γράψετε το \overline{AB} συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overline{AB}|=10$. (Μονάδες 12)
- β)** Έστω $\alpha=2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB . (Μονάδες 13)

2_20073

Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(-2,-4)$.

- α)** Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)
- β)** Να βρείτε το συμμετρικό Δ του B ως προς το μέσο M της $A\Gamma$. (Μονάδες 10)
- γ)** Τι σχήμα είναι το $AB\Gamma\Delta$; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

2.20148

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7,3)$.

- α)** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμικά ανά δύο. (Μονάδες 10)
- β)** Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

Εσωτερικό γινόμενο**2ο Θέμα****2_18556**

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

- α)** Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 8)
- β)** Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ . (Μονάδες 10)
- γ)** Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 7)

2_18558

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι: $\overline{AB} = (-4, -6)$, $\overline{A\Gamma} = (2, -8)$.

- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overline{AM} , όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)
- β)** Να αποδείξετε ότι η γωνία \hat{A} είναι οξεία. (Μονάδες 10)
- γ)** Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ επιπλέον ισχύει $A(3,1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ . (Μονάδες 8)

2_18581

Έστω τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $: 2|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

- α)** Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2$ (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$ (Μονάδες 15)

2_18598

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\vec{AG} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α)** Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$. (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα \vec{AB} και \vec{AG} να είναι κάθετα. (Μονάδες 9)
γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα \vec{BG} . (Μονάδες 8)

2_20053

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}| = 4$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -8$.

- α)** Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{a} = \vec{0}$. (Μονάδες 15)

2_20056

Έστω \vec{a} και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$.

- α)** Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$. (Μονάδες 16)
β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος \vec{u} . (Μονάδες 9)

2_20057

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

- α)** το εσωτερικό γινόμενό των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης:
 $\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (2\vec{\beta})$. (Μονάδες 10)
β) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a} - 2 \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2 \cdot \vec{a}$. (Μονάδες 15)

2_20058

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

- α)** τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$ (Μονάδες 10)
β) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{a}$ (Μονάδες 15)

2_20059

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$

- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$ (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα \vec{u} και $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ είναι κάθετα. (Μονάδες 15)

2_20070

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν: $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$, $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

- α)** Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 12)
- β)** Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα**4_18606**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$ και $\vec{OB} = (1, 2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

- α)** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \vec{OA} και \vec{OB} είναι κάθετα. (Μονάδες 4)
- β)** Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:
- i)** να αποδείξετε ότι: $\vec{AB} = (-3, 4)$ και $\vec{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$ (Μονάδες 5)
- ii)** να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$ (Μονάδες 6)
- iii)** αν επιπλέον τα διανύσματα \vec{OG} και \vec{AB} είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 10)

4_18616

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

- α)** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ (Μονάδες 3)
- β)** Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:
- i)** να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$ (Μονάδες 6)
- ii)** να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)
- iii)** να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 8)

4_18618

- α)** Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$ (Μονάδες 10)
- β)** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$
- i)** Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)
- ii)** Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ (Μονάδες 7)

Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

2_20050

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 7)$ και $\vec{\beta} = (2, 4)$.

- α)** Να βρεθεί η προβολή του \vec{a} πάνω στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)
- β)** Να αναλύσετε το \vec{a} σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

2_20052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 1$, $(\vec{a} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -1$.

- α)** Να υπολογίσετε τα \vec{a}^2 και $|\vec{\beta}|$. (Μονάδες 6)
- β)** Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)
- γ)** Να βρείτε την προβολή του $\vec{a} + 2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

2.20069.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

- α)** Να βρείτε τη προβολή του \vec{a} πάνω στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)
- β)** Να αναλύσετε το \vec{a} σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

Ευθεία

Εξίσωση ευθείας

2ο Θέμα

2_18575

Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 6)$.

- α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B . (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ϵ του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $y = -x + 7$. (Μονάδες 15)

2_18600

Θεωρούμε την ευθεία ϵ_1 που τέμνει τους άξονες $\chi' \chi$ και $\psi' \psi$ στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 6)$ αντίστοιχα.

- α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 . (Μονάδες 8)
- β)** Αν ϵ_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ϵ_1 , τότε να βρείτε:
- i)** την εξίσωση της ευθείας ϵ_2 . (Μονάδες 9)
- ii)** τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 . (Μονάδες 8)

2_18601

Έστω $M(3, 5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1, 1)$.

- α)** Να βρείτε:
- i)** τις συντεταγμένες του σημείου B . (Μονάδες 8)

- ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (Μονάδες 7)
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Κ του άξονα $x'x$ έτσι ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$. (Μονάδες 12)

2_18602

Δίνεται η ευθεία (ε): $y + x = 1$ και το σημείο $A(2, -4)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην (ε). (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε). (Μονάδες 15)

2_20060

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -1)$ και $\vec{b} = (3, 0)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, \vec{a} \cdot \vec{b} + 2)$. (Μονάδες 15)

2_20063

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μέσο Μ και $A(1, -2)$, $M(-2, 5)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετου ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 15)

2_20066

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(2, 4)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 7)
 β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 18)

2.20068.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-5, 4)$, $B(-1, 6)$, $\Gamma(4, 1)$ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overline{AB} . (Μονάδες 6)
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ. (Μονάδες 9)
 γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ. (Μονάδες 10)

4ο Θέμα**4.20147**

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda + 1, \lambda - 1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(4, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)
 β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ. (Μονάδες 8)
 γ) Για $\lambda = 4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

2ο Θέμα

2_18584.

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y - 8 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - 4y + 10 = 0$ και το σημείο Α της ε_1 που έχει τετμημένη το 4 .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α . (Μονάδες 5)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 . (Μονάδες 10)
 γ) Αν Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του Β (Μονάδες 10)

2_18587.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 8y + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

- α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ, Α και Β. (Μονάδες 10)
 β) αν Κ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ , να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος \overline{MK} . (Μονάδες 15)

2_18589

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 8x + y - 28 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το Μ και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 15)

2_18592

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 3y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y - 5 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και την αρχή Ο των αξόνων. (Μονάδες 7)

2_18595

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 8)
 β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, τότε:
 i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ (Μονάδες 8)
 ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ έχει εξίσωση την $3x - 4y - 12 = 0$ (Μονάδες 9)

2_20065

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x + y + 2 = 0$ και το σημείο $A(5,1)$.

- α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1 , η οποία διέρχεται από το A και είναι κάθετη προς την ευθεία ε . (Μονάδες 9)
- β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2 , η οποία διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)
- γ)** Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

2.20072

Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο $A(6,-1)$ εκτός της (ε). Έστω $M(2,1)$ η προβολή του A στην (ε). Να βρείτε:

- α)** Την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μονάδες 13)
- β)** Το συμμετρικό του A ως προς την (ε). (Μονάδες 12)

Απόσταση σημείου από ευθεία - Εμβαδόν τριγώνου**2_20062**

Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(2, 3)$.

- α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A, B . (Μονάδες 11)
- β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων και K, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες xx' και yy' αντίστοιχα. (Μονάδες 14)

2_20067

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3,2)$, $B(-3,1)$ και $\Gamma(4,0)$.

- α)** Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB . (Μονάδες 9)
- β)** Να υπολογίσετε το ύψος $\Gamma\Delta$ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό. (Μονάδες 16)

4ο Θέμα**4_18612**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$

- α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους. (Μονάδες 7)
- β)** Αν $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2 . (Μονάδες 8)
- γ)** Αν A είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και B σημείο της ευθείας ε_2 με τεταγμένη το 1, τότε:
- i)** να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B (Μονάδες 2)
- ii)** να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ να είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)

4_18613

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με λ διαφορετικό του 0.

- α)** Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1. (Μονάδες 12)
- β)** Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ . (Μονάδες 13)

4_18617

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{a} \cdot \vec{b} + 12)x + (\vec{a} \cdot \vec{b} - 12)y - 5 = 0$ (1).

- α)** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$. (Μονάδες 3)
- β)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = 3\vec{a}$. (Μονάδες 7)
- γ)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = -3\vec{a}$. (Μονάδες 7)
- δ)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b} \perp \vec{a}$ (Μονάδες 8)

Εμβαδόν τριγώνου**4ο Θέμα****4_18609**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\vec{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\vec{AG} = (3\lambda, \lambda - 1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ

- α)** Να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = (2\lambda, \lambda)$. (Μονάδες 7)
- β)** Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα \vec{AM} είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$. (Μονάδες 8)
- γ)** Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

4_18610

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Μ (Μονάδες 7)
- β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 8x + y - 6 = 0$ (Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και να αποδείξετε ότι είναι παράλληλη προς την ευθεία AB

(Μονάδες 5)

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ , να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$.

(Μονάδες 6)

4_18611

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία A(-2,4) και B(2,6)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K(x,y) για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - 2y - 5 = 0$ και $x - 2y + 25 = 0$

(Μονάδες 10)

4_18614

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ

(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K(χ, ψ) για τα οποία ισχύει $(KBF) = (ABF)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

(Μονάδες 10)

4_18615

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon: y = x$, με A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) και $x_1 < x_2$.

Αν το σημείο M(3,5) είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία K(x,y) για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - y - 2 = 0$ και $x - y + 6 = 0$

(Μονάδες 7)

2_18620

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0$, $\varepsilon_2: (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο A(2,-1).

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $\lambda = 2$ και B, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

4_18621

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2κx - (1 + κ)y + 1 - 3κ = 0$ και $\zeta: (1 + 3κ)x + (κ - 1)y + 2 - 6κ = 0$, όπου $κ \in \mathbb{R}$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του $κ$, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

(Μονάδες 15)

4_18622.

Δίνονται τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu - 4}{2}\right)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{B\Gamma}$ (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu \cdot \overline{B\Gamma} = -\overline{AB}$. (Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(O\Gamma) = 1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 3)

4.18623.

Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\mu + 1, 3\mu - 2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ .

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ ;

(Μονάδες 5)