8ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{f}+\mathrm{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(\mathrm{f}+\mathrm{g})'(\mathrm{x}_0)=\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0)+\mathrm{g}'(\mathrm{x}_0)$.

7 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού.

4 μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.**1 μονάδα**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α με τη βοήθεια αντιπαραδείγματος. **3 μονάδες**

4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος.

α) Αν για τη παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών , τότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a,β) .

β) Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο $A=(a,\beta)\cup(\gamma,\delta),\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο Α και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Α, τότε η f είναι σταθερή στο Α

γ) Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και υπάρχει ρίζα ρ της εξίσωσης $g''(x)=0$,τότε το σημείο $A(\rho,\mathrm{f}(\rho))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f

δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες**.**

ε) υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις f,g στο $[\alpha,\beta]$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)\cdot g(x)dx=f(x)\cdot\int_a^\beta g(x)dx=g(x)\cdot\int_a^\beta f(x)dx\ .$$

10 μονάδες

Β θέμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ και $g(x)=\ln\dfrac{x+1}{1-x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ είναι ίσες.

μονάδες 7

Β2. Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα (αν υπάρχουν) , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι $g(x)=f^{-1}(x)$.

μονάδες 6

Επίσης δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} g(x), -1<x<0 \\ f(x), x\geq 0 \end{cases}$.

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h , τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες $x=-\dfrac{1}{2}, x=\ln 2$.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

- $f(x)+xf'(x)=\dfrac{1}{x}, x<0$
- $f(-1)=0$.

Γ1. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $a(x)=xf(x)-\ln(-x), x<0$ είναι σταθερή .

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ln(-x)}{x}, x<0$.

μονάδες 4+2

Γ2. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι :

α) $\int_{-e}^{-1} f(x)dx=-\dfrac{1}{2}$.

β) η εξίσωση $2f(x)=\int_{-e}^{-1} f(x)dx$ έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2.

μονάδες 3+5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιος ώστε

$4e^{\xi}\left(f'(\xi)+f(\xi)\right)=-e^{\theta}$,όπου $\theta\in(x_1,x_2)$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

- $\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot f'(x)=3\varepsilon\varphi^2 x+1$.
- $f(0)=0$.
- $g(x)\le E-1$ όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες $x=-\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{\pi}{3}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi^3 x+\varepsilon\varphi x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

μονάδες 5

Επίσης δίνεται ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $g(0)=\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Δ3. α) Να δείξετε ότι $g(0)=1$

β) Αφού δείξετε ότι $E=2$ (4 μονάδες) , να δείξετε ότι η ευθεία $y=1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g.

μονάδες 3+8

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα χ΄χ και την ευθεία $x=2$.

μονάδες 4

Λύση

Α1. α) Θεωρία **β)** Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. α) Ψευδής

β) Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση ,η οποία είναι συνεχής συνάρτηση , έχει σύνολο τιμών μονοσύνολο και όχι διάστημα.

Α4. ΣΛΛΣΣ

Β θέμα

Β1. α) Έχουμε $A_g=(-1,1)$

$$\left(\frac{x+1}{1-x}>0\Leftrightarrow(x+1)(1-x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1\right)$$

Η $f\circ g$ ορίζεται όταν $\begin{cases}-1<x<1\\ \ln\dfrac{x+1}{1-x}\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1,1)$, άρα $A_{f\circ g}=(-1,1)$.

Η $f\circ g$ έχει τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^{\ln\frac{x+1}{1-x}}-1}{e^{\ln\frac{x+1}{1-x}}+1}=\dfrac{\frac{x+1}{1-x}-1}{\frac{x+1}{1-x}+1}=\dfrac{\frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}+x}{\cancel{1-x}}}{\frac{\cancel{x}+1+1-\cancel{x}}{\cancel{1-x}}}=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=x$.

Η $g\circ f$ ορίζεται όταν

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ -1<\dfrac{e^x-1}{e^x+1}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ -e^x-1<e^x-1<e^x+1\end{cases}\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ -e^x-1<e^x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ -2e^x<0 \ \text{ ισχύει}\end{cases}\right)\text{ και}$$

$$\left(\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ e^x-1<e^x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ -2<0 \ \text{ ισχύει}\end{cases}\right)\text{, άρα } A_{g\circ f}=\mathbb{R}.$$

Η $g\circ f$ έχει τύπο

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\ln\frac{\frac{e^x-1}{e^x+1}+1}{1-\frac{e^x-1}{e^x+1}}=\ln\frac{\frac{e^x\cancel{-1}+e^x+\cancel{1}}{\cancel{e^x+1}}}{\frac{\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}+1}{\cancel{e^x+1}}}=\ln\frac{\cancel{2}e^x}{\cancel{2}}=\ln e^x=x.$$

Άρα οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ είναι ίσες στο $(-1,1)$.

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x)(\cancel{e^x}+1-\cancel{e^x}+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε δεν έχει ακρότατα.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f''(x)=\frac{2e^x\cdot(e^x+1)^{\cancel{2}}-2e^x\cdot 2\cancel{(e^x+1)}\cdot e^x}{(e^x+1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{2e^x(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^3}=\frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

Έχουμε $f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{\underbrace{2e^x}_{>0}\left(1-e^x\right)}{\underbrace{\left(e^x+1\right)^3}_{>0}} \ge 0 \Leftrightarrow 1-e^x\ge 0 \Leftrightarrow e^x\le 1=e^0 \Leftrightarrow x\le 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$,κοίλη στο $[0,+\infty)$ οπότε έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))\equiv(0,0)$.

B3. Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Έχει σύνολο τιμών $f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-1,1)=A_{f^{-1}}$.

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=-1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}\cdot\frac{1-\cancelto{0}{\frac{1}{e^x}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{e^x}}}=1\right)$$

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow e^x-1=e^x\cdot y+y \Leftrightarrow e^x-e^x\cdot y=y+1 \Leftrightarrow$

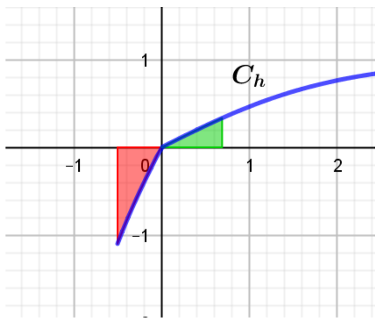
$e^x(1-y)=y+1 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x=\dfrac{y+1}{1-y} \overset{y\in(-1,1)}{\Leftrightarrow} x=\ln\dfrac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=l\,n\dfrac{y+1}{1-y}$.

Άρα $f^{-1}(x)=l\,n\dfrac{x+1}{1-x}=g(x), x\in(-1,1)$.

B4. Έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=h(0), \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$

άρα η h είναι συνεχής στο 0.



Επομένως η h είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{1}{2},\ln 2\right]$ αφού στα διαστήματα $\left[-\dfrac{1}{2},0\right),(0,\ln 2]$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις.

Για το πρόσημο της h έχουμε:

Στο $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$ **:** $h(x)=g(x)\le 0$ και στο $[0,\ln 2]$:

$h(x)=f(x)\ge 0$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με :

$$\mathrm{E}=-\int_{-\frac{1}{2}}^{0} h(x)dx+\int_0^{\ln 2} h(x)dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx+\int_0^{\ln 2} f(x)dx=-2\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3+3\ln 2-2\ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{E}=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3.$$

αφού

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(\ln(x+1)-\ln(1-x)\right)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(x+1)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-\ln(1-x)\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(x+1)'\ln(x+1)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1-x)'\ln(1-x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx=\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}-\cancel{[x]_{-\frac{1}{2}}^{0}}+\left[(1-x)\ln(1-x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\cancel{[x]_{-\frac{1}{2}}^{0}} \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}(\ln 3 - \ln 2) \Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{0} g(x)dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$$ και

$$\int_0^{\ln 2} f(x)dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx \overset{\substack{e^x = h \Leftrightarrow x = \ln h,\\ dx = \frac{1}{h}dh}}{\underset{\substack{x=0, h=1\\ x=\ln 2, h=2}}{=}} \int_1^2 \frac{h-1}{h+1}\cdot\frac{1}{h}dh = \int_1^2 \frac{h-1}{h+1}\cdot\frac{1}{h}dh \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\ln 2} f(x)dx = \int_1^2 \frac{h-1}{(h+1)\cdot h}dh \Leftrightarrow \int_0^{\ln 2} f(x)dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{h} + \frac{2}{h+1}\right)dh \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\ln 2} f(x)dx = \left[-\ln h + 2\ln(h+1)\right]_1^2 \Leftrightarrow \int_0^{\ln 2} f(x)dx = -\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\ln 2} f(x)dx = -3\ln 2 + 2\ln 3.$$

(Θέτουμε $\frac{h-1}{h(h+1)} = \frac{A}{h} + \frac{B}{h+1} \Leftrightarrow h - 1 = (A+B)h + A$ οπότε :

$\begin{cases} A+B=1 \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2 \\ A=-1 \end{cases}$ και $\frac{h-1}{h(h+1)} = -\frac{1}{h} + \frac{2}{h+1}$).

Θέμα Γ

Γ1.α) Η συνάρτηση α είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $a'(x) = f(x) + xf'(x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$.

Άρα η συνάρτηση α είναι σταθερή.

β) Έχουμε $a(x) = xf(x) - \ln(-x) = c, c \in \mathbb{R}$.

Όμως $a(-1) = 0$ άρα $xf(x) - \ln(-x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) = \ln(-x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln(-x)}{x}, x < 0$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \frac{1 - \ln(-x)}{x^2}$.

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(-x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-x) \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq e \Leftrightarrow x \geq -e$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[-e, 0)$,γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -e]$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο –e το $f(-e) = -\frac{1}{e}$.

Γ3. α) Έχουμε : $\int_{-e}^{-1} f(x)dx = \int_{-e}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x}dx = \left[\frac{\ln^2(-x)}{2}\right]_{-e}^{-1} = -\frac{\ln^2 e}{2} = -\frac{1}{2}$.

β) Έχουμε $2f(x) = \int_{-e}^{-1} f(x)dx \Leftrightarrow 2f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}$.

Επίσης $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[\ln(-x)\cdot\frac{1}{x}\right] = -\infty\cdot(-\infty) = +\infty$,

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Θεωρούμε τα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -e]$ και $A_2 = (-e, 0)$.

Λόγω της μονοτονίας της f στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$f(A_1)=\left[f(-e),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$, $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to-e^+} f(x),\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\right)=\left(f(-e),+\infty\right)=\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Όμως $-\frac{1}{4}>-\frac{1}{e}$ άρα $-\frac{1}{4}\in f(A_1), f(A_2)$,οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in A_1,A_2$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $f(x_1)=-\frac{1}{4}, f(x_2)=-\frac{1}{4}$.

Τα x_1,x_2 είναι μοναδικά λόγω της μονοτονίας της f στα διαστήματα αυτά.

Άρα η η εξίσωση $2f(x)=\int_{-e}^{-1} f(x)dx$ έχει δύο ακριβώς ρίζες

Γ4. Έχουμε $4e^x\left(f'(x)+f(x)\right)=-e^{\theta}\Leftrightarrow 4e^x f'(x)+4e^x f(x)=-e^{\theta}\Leftrightarrow$

$$\left(4e^x f(x)\right)'=-e^{\theta}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=4e^x f(x)$.

Για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι συνθήκες του ΘΜΤ άρα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιος ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow 4e^{\xi} f'(\xi)+4e^{\xi} f(\xi)=\frac{4e^{x_2} f(x_2)-4e^{x_1} f(x_1)}{x_2-x_1}\Leftrightarrow$$

$$4e^{\xi} f'(\xi)+4e^{\xi} f(\xi)=\frac{-e^{x_2}+e^{x_1}}{x_2-x_1}\Leftrightarrow 4e^{\xi} f'(\xi)+4e^{\xi} f(\xi)=-\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x$.

Για τη συνάρτηση h ικανοποιούνται οι συνθήκες του ΘΜΤ άρα υπάρχει $\theta\in(x_1,x_2)$ τέτοιος ώστε $h'(\theta)=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}\Leftrightarrow e^{\theta}=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$ (2).

Από τη σχέση (1) μέσω της (1) έχουμε $4e^{\xi} f'(\xi)+4e^{\xi} f(\xi)=-e^{\theta}$ (1)

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot f'(x)=3\varepsilon\varphi^2 x+1\overset{\sigma\upsilon\nu^2 x\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x)=\left(3\varepsilon\varphi^2 x+1\right)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\Leftrightarrow$

$$f'(x)=\left(3\varepsilon\varphi^2 x+1\right)\left(\varepsilon\varphi x\right)'\Leftrightarrow f'(x)=\left(\varepsilon\varphi^3 x+\varepsilon\varphi x\right)'\Leftrightarrow f(x)=\varepsilon\varphi^3 x+\varepsilon\varphi x+c, c\in\mathbb{R}..$$

Όμως $f(0)=0$ άρα $f(x)=\varepsilon\varphi^3 x+\varepsilon\varphi x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\left(3\varepsilon\varphi^2 x+1\right)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε αντιστρέφεται.

Δ3. α) Γνωρίζουμε ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$.Η σχέση αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε :

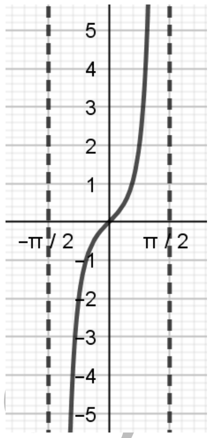
$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)=1 \text{ και } f'\left(f^{-1}(0)\right)\cdot\left(f^{-1}\right)'(0)=1\Leftrightarrow f'(0)\cdot\left(f^{-1}\right)'(0)=1\Leftrightarrow$$

$$\left(f^{-1}\right)'(0)=1=g(0).$$

β) Έχουμε:

$$f(x)\geq 0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^3 x+\varepsilon\varphi x\geq 0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x\cdot\left(\underbrace{\varepsilon\varphi^2 x+1}_{>0}\right)\geq 0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Άρα $f(x) \le 0$ στο $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ και $f(x) \ge 0$ στο $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ οπότε το εμβαδόν Ε είναι το



$$E = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi x\right)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi x\right)dx \Leftrightarrow$$

$$E = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \varepsilon\varphi x\left(\varepsilon\varphi^2 x + 1\right)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\left(\varepsilon\varphi^2 x + 1\right)dx \Leftrightarrow$$

$$E = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \varepsilon\varphi x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \Leftrightarrow$$

$$E = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \varepsilon\varphi x\left(\varepsilon\varphi x\right)' dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x\left(\varepsilon\varphi x\right)' dx \Leftrightarrow .$$

$$E = -\left[\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \left[\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 .$$

Άρα $g(x) \le E - 1 \Leftrightarrow g(x) \le 1 \Leftrightarrow g(x) \le g(0)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0,το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και μέγιστο οπότε ισχύει το θεώρημα Fermat άρα $g'(0) = 0$.

Επομένως η $y = 1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g αφού το σημείο $\left(0, g(0)\right)$ επαληθεύει την εξίσωση της και η εφαπτομένη σ'αυτό το σημείο είναι οριζόντια. .

Δ4. Έχουμε $f^{-1}(x) \ge 0 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right) \ge f(0) \Leftrightarrow x \ge 0$ οπότε $f^{-1}(x) \ge 0$ στο $[0,2]$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $\mathrm{E} = \int_0^2 f^{-1}(x)dx$.

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow f(u) = x$ οπότε $f'(u)du = dx$.

Για $x = 0$ έχουμε $u = f^{-1}(0) = 0$ και για $x = \frac{\pi}{4}$ έχουμε

$$u = f^{-1}(2) \Leftrightarrow f(u) = 2 \Leftrightarrow f(u) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} u = \frac{\pi}{4} .$$

Επομένως $\mathrm{E} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} uf'(u)dx = \left[uf(u)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(u)dx \Leftrightarrow E = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow E = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 1}{2}$.