Διαγώνισμα στις παραγώγους

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

7 μονάδες

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και υπάρχει ρίζα ρ της εξίσωσης $g''(x)=0$,τότε το σημείο $A(\rho,f(\rho))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ».

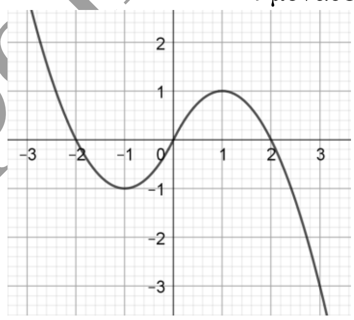
α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. 1 μονάδα

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. 3 μονάδες

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat .

4 μονάδες

Α4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τις θέσεις ακροτάτων της συνάρτησης f .

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κοίλη ή κυρτή και τις θέσεις των σημείων καμπής..

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα α) και β).

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x)}{3h}=\dfrac{40x^3}{3}+4x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x
- $f'(0)=1, f(0)=0$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x^5+x^3+x$.

7 μονάδες

Β2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

6 μονάδες

Β3. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

6 μονάδες

Β4. Να βρείτε τη θέση της C_f σε σχέση με την $y=x$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και της αντίστροφης της.

6 μονάδες

Θέμα 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x\ln 30 - \alpha^x - \beta^x - \gamma^x, \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ και

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, x > 0 \\ \gamma - 3, x = 0 \end{cases}.$$

Επίσης δίνεται ότι :

- $f(x) \le -3$
- $2e^x - \beta x - 2 \ge 0$
- Η g είναι συνεχής στο 0.

Να δείξετε ότι :

Γ1. α) $\gamma = 3$.

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Μονάδες 3+3

Γ2. $\beta = 2$.

Μονάδες 6

Γ3. $f(x) = x\ln 30 - 5^x - 2^x - 3^x$

Μονάδες 6

Γ4. α) η f είναι κοίλη.

β) $f'(x+1) < f(x+1) - f(x) < f'(x)$

Μονάδες 3+4

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha^2}, \alpha > 0$.

Δ1.α) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι τα ακρότατα της f ανήκουν στην υπερβολή $y = \frac{1}{2x}$.

Μονάδες 5+1

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f'.

Μονάδες 2

Δ4.α) Να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι δύο από αυτά :

i) είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

ii) ανήκουν σε υπερβολή, της οποίας να βρεθεί ο τύπος.

Μονάδες 2+4

Πατσιμάς Δημήτρης

Λύσεις

<u>Θέμα Α</u>

Α1. Θεωρία

Α2. α) λάθος

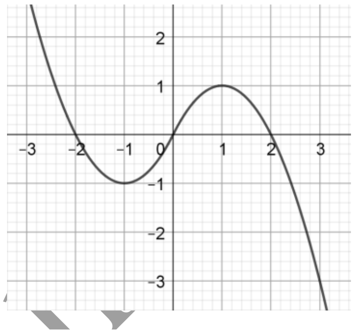
β) Η συνάρτηση $g(x)=x^4$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x)=12x^2$.

Η εξίσωση $g''(x)=0$ έχει ρίζα το 0.

Όμως το σημείο $(0,g(0))$ δεν είναι σημείο καμπής αφού η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Α3. Θεωρία

Α4. α) Έχουμε $f'(x)<0$ στα διαστήματα $(-2,0),(2,+\infty)$ και $f'(x)>0$ στα διαστήματα $(-\infty,-2),(0,2)$.



Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-2,0],[2,+\infty)$, γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2],[0,2]$, έχει τοπικό ελάχιστο στο 0 και τοπικά μέγιστα στα -2,2.

β) Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,+\infty)$, κυρτή στο διάστημα $[-1,1]$ άρα παρουσιάζει σημεία καμπής στα -1,1.

<u>Θέμα Β</u>

Β1. $$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{3h}\overset{u=2h}{\underset{\substack{h\to 0,\ h\to 0\\ u\to 0}}{=}}\lim\frac{f'(x+u)-f'(x)}{3\frac{u}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{3}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{u}=\frac{2}{3}f''(x).$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{3h}=\frac{40x^3}{3}+4x\Leftrightarrow\frac{2}{3}f''(x)=\frac{40x^3}{3}+4x\Leftrightarrow$$

$$f''(x)=20x^3+6x\Leftrightarrow f''(x)=\left(5x^4+3x^2\right)'\Leftrightarrow f'(x)=5x^4+3x^2+c_1,c_1\in\mathbb{R}.$$

Όμως $f'(0)=1\Leftrightarrow c_1=1$ οπότε

$$f'(x)=5x^4+3x^2+1\Leftrightarrow f'(x)=\left(x^5+x^3+x\right)'\Leftrightarrow f(x)=x^5+x^3+x+c,c\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε $f(0)=0\Leftrightarrow c=0$ οπότε $f(x)=x^5+x^3+x$.

Β2. $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^5+x^3+x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^5=-\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^5+x^3+x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^5=+\infty.$$

B3. $f''(x)=20x^3+6x$.

Έχουμε $f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 20x^3+6x\geq 0 \Leftrightarrow 2x\left(\underbrace{10x^2+3}_{>0}\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Παρουσιάζει σημείο καμπής στο 0 το $(0,f(0))\equiv(0,0)$.

B4. Είναι $f(x)-x=x^5+x^3=x^3(x^2+1)$

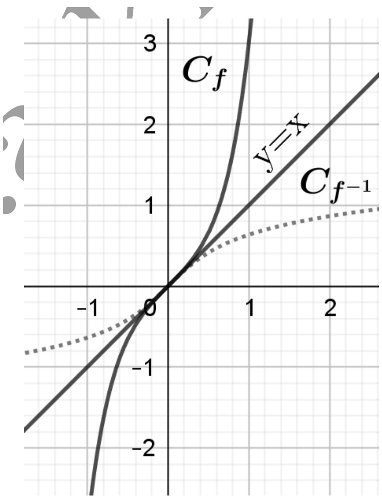
Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)-x<0 \Leftrightarrow f(x)<x$ και λόγω συμμετρίας $x<f^{-1}(x)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)-x>0 \Leftrightarrow f(x)>x$ και λόγω συμμετρίας $x>f^{-1}(x)$

Η f έχει τύπο πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού μεγαλύτερου του πρώτου άρα δεν έχει ασύμπτωτες .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↗		↗
$f(x)$		Σ.Κ.	

Επίσης γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της αντίστροφης της f είναι συμμετρική ως προς την $y=x$ άρα έχουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:



<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. α) Η g είναι συνεχής στο 0 οπότε

$$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x}=γ-3 \Leftrightarrow 0=γ-3 \Leftrightarrow γ=3 \quad γ=3.$$

$$\left(\left|x^2ημ\frac{1}{x}\right|\leq\left|x^2\right|=x^2 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2ημ\frac{1}{x}\leq x^2\right. .$$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2=0=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0} x^2ημ\frac{1}{x}=0$).

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\cancel{2}}\eta\mu\frac{1}{x}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0)=0$.

($\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le x\eta\mu\dfrac{1}{x}\le|x|$.

$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)$ άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$).

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=2e^x-\beta x-2$.

$k(0)=0$ οπότε $2e^x-\beta x-2\ge 0\Leftrightarrow k(x)\ge k(0)$.

Η συνάρτηση k είναι παραγωγίσιμη στο $0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $k'(0)=0$.

$k'(x)=2e^x-\beta\Rightarrow k'(0)=2-\beta\Leftrightarrow 2-\beta=0\Leftrightarrow\beta=2$.

Γ3. $f(x)=x\ln 30-\alpha^x-2^x-3^x$.

$f(x)\le -3\Leftrightarrow f(x)\le f(0)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $0\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο στο 0 οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(0)=0$.

$f'(x)=\ln 30-\alpha^x\ln\alpha-2^x\ln 2-3^x\ln 3\Rightarrow f'(0)=\ln 30-\ln\alpha-\ln 2-\ln 3\Leftrightarrow$

$\ln\dfrac{30}{6\alpha}=0=\ln 1\Leftrightarrow\dfrac{5}{\alpha}=1\Leftrightarrow\alpha=5$.

Άρα $f(x)=x\ln 30-5^x-2^x-3^x$.

Γ4.α) Έχουμε $f'(x)=\ln 30-5^x\ln 5-2^x\ln 2-3^x\ln 3$ και

$f''(x)=-5^x(\ln 5)^2-2^x(\ln 2)^2-3^x(\ln 3)^2<0$ άρα η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

β) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[x,x+1]$ για κάθε πραγματικό αριθμό x οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$.

Όμως $x<\xi<x+1\underset{f'\searrow}{\overset{f''(x)<0}{\Rightarrow}}f'(x)>f'(\xi)>f'(x+1)\Leftrightarrow f'(x+1)<f(x+1)-f(x)<f'(x)$.

<u>Θέμα Δ</u>

Δ1. α) Η f είναι παραγωγίσιμη με τύπο : $f'(x)=\dfrac{x^2+\alpha^2-2x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}=\dfrac{\alpha^2-x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

Έχουμε : $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha^2-x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\ge 0\Leftrightarrow\alpha^2-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le\alpha^2\Leftrightarrow -\alpha\le x\le\alpha$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-\alpha],[\alpha,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $-\alpha$ το $f(-\alpha)=\dfrac{-\alpha}{2\alpha^2}=-\dfrac{1}{2\alpha}$ και τοπικό μέγιστο

στο α το $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{2\alpha^2}=\dfrac{1}{2\alpha}$.

β) Έστω $g(x)=\dfrac{1}{2x}$.

Έχουμε : $g(-\alpha)=\dfrac{1}{-2\alpha}=-\dfrac{1}{2\alpha}, g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha}=\dfrac{1}{2\alpha}$ άρα τα ακρότατα της f ανήκουν στην υπερβολή $y=\dfrac{1}{2x}$.

Δ2. Έστω $A_1=(-\infty,-\alpha), A_2=[-\alpha,\alpha]$ και $A_3=(\alpha,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f στα αντίστοιχα διαστήματα λόγω της μονοτονίας της είναι :

$f(A_1)=\left(f(-\alpha),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(-\dfrac{1}{2\alpha},0\right)$, $f(A_2)=[f(-\alpha),f(\alpha)]=\left[-\dfrac{1}{2\alpha},\dfrac{1}{2\alpha}\right]$ και

$f(A_3)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(\alpha)\right)=\left(0,\dfrac{1}{2\alpha}\right)$.

Το α είναι θετικός αριθμός άρα δεν ανήκει στο $f(A_1)$.

Αν $\alpha<\dfrac{1}{2\alpha}\Leftrightarrow\alpha^2<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,τότε τα α ανήκει στα $f(A_2), f(A_3)$ και έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1,x_2 στα A_1,A_2 αντίστοιχα μοναδικές λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά.

Αν $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο A_1.

Αν $\alpha>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,τότε το α δεν ανήκει στα $f(A_2), f(A_3)$ άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη.

2ος τρόπος

$f(x)=\alpha\Leftrightarrow\dfrac{x}{x^2+\alpha^2}=\alpha\Leftrightarrow\alpha x^2-x+\alpha^3=0$. $\Delta=1-4\alpha^4$

Αν $\Delta>0\Leftrightarrow1-4\alpha^4>0\Leftrightarrow\alpha^4<\dfrac{1}{4}\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες.

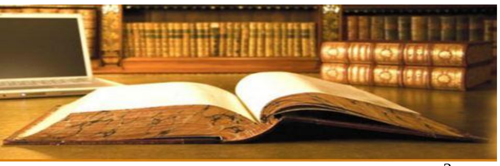
Αν $\Delta=0\Leftrightarrow1-4\alpha^4=0\Leftrightarrow\alpha^4=\dfrac{1}{4}\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα και

αν $\Delta<0\Leftrightarrow1-4\alpha^4<0\Leftrightarrow\alpha^4>\dfrac{1}{4}\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Δ3. Η f' είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$,παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$, $f'(-\alpha)=f'(\alpha)=0$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα χ΄χ .

Δ4. α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με τύπο :

$$f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+\alpha^2\right)^{\cancel{2}}-\left(\alpha^2-x^2\right)\cdot4x\cancel{\left(x^2+\alpha^2\right)}}{\left(x^2+\alpha^2\right)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-2x^3-2\alpha^2x-4\alpha^2x+4x^3}{\left(x^2+\alpha^2\right)^3}\Leftrightarrow$$



$$f''(x)=\frac{2x^3-6\alpha^2 x}{\left(x^2+\alpha^2\right)^3}=\frac{2x\left(x^2-3\alpha^2\right)}{\left(x^2+\alpha^2\right)^3}.$$

x	$-\infty$ $\quad -\alpha\sqrt{3}$	0	$\alpha\sqrt{3}$	$+\infty$
x	$-$	$-$ $\quad 0$	$+$	$+$
$x^2-3\alpha^2$	$+$ $\quad 0$	$-$	$-$ $\quad 0$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$ Σ.Κ.	$\cup$ Σ.Κ.	$\cap$ Σ.Κ.	$\cup$

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\alpha\sqrt{3}\right],\left[0,\alpha\sqrt{3}\right]$ και κυρτή στα διαστήματα $\left[-\alpha\sqrt{3},0\right],\left[\alpha\sqrt{3},+\infty\right)$ οπότε έχει σημεία καμπής τα

$$A\left(-\alpha\sqrt{3},f\left(-\alpha\sqrt{3}\right)\right)\equiv A\left(-\alpha\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4\alpha}\right),O\left(0,f(0)\right)\equiv O(0,0)$$

και $B\left(\alpha\sqrt{3},f\left(\alpha\sqrt{3}\right)\right)\equiv B\left(\alpha\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4\alpha}\right)$.

β) i) Τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες συντεταγμένες άρα είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων το σημείο Ο.

ii) Για το σημείο Α έχουμε :

Θέτουμε $x=-\alpha\sqrt{3}<0(1), y=-\frac{\sqrt{3}}{4\alpha}<0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{4y}$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $x=\frac{\sqrt{3}}{4y}\sqrt{3}=\frac{3}{4y}\Leftrightarrow y=\frac{3}{4x}$.

Άρα το σημείο Α ανήκει στον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{4x}$ που βρίσκεται στο $3^{ο}$ τεταρτημόριο.

Για το σημείο Β έχουμε :

Θέτουμε $x=\alpha\sqrt{3}>0(1), y=\frac{\sqrt{3}}{4\alpha}>0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\sqrt{3}}{4y}$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $x=\frac{\sqrt{3}}{4y}\sqrt{3}=\frac{3}{4y}\Leftrightarrow y=\frac{3}{4x}$.

Άρα το σημείο Β ανήκει στον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{3}{4x}$ που βρίσκεται στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο.