<u>Διαγώνισμα στις παραγώγους</u>

<u>Θέμα 1ο</u>

Α. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η f διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha\,,\,x_0)\cup(x_0\,,\,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

8 μονάδες

Β. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει ασύμπτωτη την ευθεία y=λx+β στο $+\infty$.

3 μονάδες

Γ. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο Α(x_0,f(x_0) του πεδίου ορισμού της .

4 μονάδες

Δ. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος.

α) Αν μια συνάρτηση είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο πεδίο ορισμού της τότε $f''(x)\ge 0$.

β) Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο Α(x_0f(x_0) και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,τότε $f'(x_0)=0$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=0.

δ) Αν $f'(x)>0$, για κάθε x σε ένα διάστημα Δ , τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο Δ.

ε) Ισχύει πάντοτε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.

10 μονάδες

<u>Θέμα 2ο</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln x$.

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

5 μονάδες

β) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της f

4 μονάδες

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

4 μονάδες

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α(l,f (1)).

4 μονάδες

ε) Να δείξετε ότι $x^2lnx\ge x-1$, $x>\dfrac{1}{\left(\sqrt{e}\right)^3}$.

4 μονάδες

στ) Αν $\dfrac{1}{\left(\sqrt{e}\right)^3}<\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha^2}\beta^{\beta^2}>\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}}$

4 μονάδες

Θέμα 3ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g :R $\longrightarrow$ R, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f^2(x)+2f(x)\cdot e^x + e^{2x})\,(f'(x) + e^x) = 2e^{6x}$, για κάθε x $\in$ R
- $f(0)=0$ και
- $g(x)=x^3-3x+1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^{2x}-e^x, x\in R$ 6 μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-2$ είναι αδύνατη στο R

6 μονάδες

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f (x) = α για τις διάφορες του πραγματικού αριθμού α 6 μονάδες

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x))=0, x\geq 0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες στο $[0,+\infty)$

7 μονάδες

Θέμα 4ο

Δίνεται η 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\geq 0$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f'(x)-x+2}{x^2+1}=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

i) $f'(2)=0$

ii) $f''(2)=0$

8 μονάδες

Δ2. Αν το x_0= 2 μοναδική ρίζα της 1ης παραγώγου και $(x-4)f(x)\geq x^2-8x+16$ να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

9 μονάδες

Δ3. Αν η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $(x-4)f'(x)\leq x^2-8x+16$ να αποδείξετε ότι :

i) υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$

ii) να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(2,4)$ τέτοια ώστε $f^{(3)}(\xi_1)=f^{(3)}(\xi_2)$

8 μονάδες