Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Α′ Διαγωνισμός Επιλογής Λυκείου

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 13/03/2021   Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **<u>όλα</u>** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $2^{2^{2021}}$ με τον αριθμό 97.

Πρόβλημα 2. Δίνεται το σύνολο $S = \{1,2,3,\ldots,3\nu\}$, όπου ν φυσικός αριθμός. Αν T είναι ένα υποσύνολο του S, συμβολίζουμε με $\Sigma(T)$ το άθροισμα των στοιχείων του T. (Αν $T = \emptyset$, ορίζουμε $\Sigma(T) = 0$.)

(α) Να βρείτε το πλήθος των υποσυνόλων T του S με $|T| = 3$ τέτοια ώστε το $\Sigma(T)$ να διαιρείται με το 3.

(β) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των υποσυνόλων T του S τέτοια ώστε το $\Sigma(T)$ να διαιρείται με το 3 είναι
$$\frac{8^\nu + 2^{\nu+1}}{3}$$

Σημείωση: Με $|X|$ συμβολίζουμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου X, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του X.

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες

- $f(0) \neq 0$
- $f(1) = \frac{5}{2}$
- Για κάθε $m,n \in \mathbb{N}_0$, ισχύει ότι

$$f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m)$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Σημείωση: Με $\mathbb{N}_0$ συμβολίζουμε το σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$.

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB \neq B\Gamma$ και Δ,E,Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma,A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Με διαμέτρους τα τμήματα AB και $A\Gamma$ γράφουμε ημικύκλια εξωτερικά του τριγώνου. Οι ευθείες ΔE και ΔZ τέμνουν τα ημικύκλια στα σημεία Θ και H αντίστοιχα. Οι εφαπτόμενες των ημικυκλίων στα σημεία Θ και H τέμνονται στο I. Αν η ΔA τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\triangle H\Delta\Theta$ στο σημείο X, να αποδείξετε ότι οι ευθείες IX και $H\Theta$ τέμνονται πάνω στην ευθεία $B\Gamma$.

Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Α′ Διαγωνισμός Επιλογής Λυκείου

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 13/03/2021 Ώρα Εξέτασης: 10:00-14:30

Οδηγίες

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα, **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $2^{2^{2021}}$ με τον αριθμό 97.

Προτεινόμενη Λύση.

Βρίσκουμε πρώτα το $2^{2021} \bmod 96$. Επειδή $96 = 3 \cdot 32 = 2^5 \cdot 3$, θα έχουμε
Το $32 = 2^5$ προφανώς διαιρεί το 2^{2021}, δηλαδή

$$2^{2021} \equiv 0 \bmod 32$$

Επίσης, έχουμε ότι $2^2 \equiv 1 \bmod 3$ και άρα $2^{2020} \equiv 1 \bmod 3$. Άρα,

$$2 \cdot 2^{2020} = 2^{2021} \equiv 2 \bmod 3$$

Επομένως, αφού $2^{2021} \equiv 0 \bmod 32$ και $2^{2021} \equiv 2 \bmod 3$ συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός 2^{2021} θα διαιρείται με τα πολλαπλάσια του 32 που είναι της μορφής $2 \bmod 3$ (32,128,224,..) τα οποία είναι $32 \bmod 96$. Επομένως έχουμε,

$$2^{2021} \equiv 32 \bmod 96$$

Έστω ότι, $2^{2021} = 96m + 32, m \in \mathbb{N}$.
Επειδή το 97 είναι πρώτος αριθμός από το μικρό θεώρημα του Fermat θα πάρουμε

$$2^{97-1} \equiv 1 \bmod 97 \Longrightarrow 2^{96} \equiv 1 \bmod 97$$

Άρα,

$$2^{2^{2021}} \equiv 2^{96m+32} \equiv 2^{96m} \cdot 2^{32} \equiv 2^{32} \bmod 97$$

Θα υπολογίσουμε το $2^{32} \bmod 97$. Έχουμε,

$$2^8 = 256 = 2 \cdot 97 + 62$$

Επομένως,

$$2^8 \equiv 62 \bmod 97 \Longrightarrow 2^9 \equiv 124 \bmod 97 \equiv 27 \bmod 97 \Longrightarrow 2^{11} \equiv 108 \equiv 11 \bmod 97$$

και συνεχίζοντας βρίσκουμε

$$2^{14} \equiv 88 \equiv -9 \bmod 97 \Longrightarrow 2^{16} \equiv -36 \bmod 97 \Longrightarrow 2^{32} \equiv 36^2 \equiv 1296 \bmod 97$$

Όμως $1296 = 13 \cdot 97 + 35$. Άρα

$$2^{32} \equiv 35 \bmod 97$$

Επομένως το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $2^{2^{2021}}$ με τον αριθμό 97 είναι το 35.

Πρόβλημα 2. Δίνεται το σύνολο $S = \{1,2,3,\dots,3\nu\}$, όπου ν φυσικός αριθμός. Αν T είναι ένα υποσύνολο του S, συμβολίζουμε με $\Sigma(T)$ το άθροισμα των στοιχείων του T. (Αν $T = \emptyset$, ορίζουμε $\Sigma(T) = 0$.)

(α) Να βρείτε το πλήθος των υποσυνόλων T του S με $|T| = 3$ τέτοια ώστε το $\Sigma(T)$ να διαιρείται με το 3.

(β) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των υποσυνόλων T του S τέτοια ώστε το $\Sigma(T)$ να διαιρείται με το 3 είναι

$$\frac{8^\nu + 2^{\nu+1}}{3}$$

Σημείωση: Με $|X|$ συμβολίζουμε τον πληθικό αριθμό του συνόλου X, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του X.

Προτεινόμενη Λύση.

(α) Διαμοιράζουμε το σύνολο $S = \{1,2,3,\dots,3\nu\}$ σε τρία υποσύνολα με πληθικό αριθμό ν ως εξής

$$A = \{1,4,7,\dots,3\nu-2\}$$
$$B = \{2,5,8\dots,3\nu-1\}$$
$$\Gamma = \{3,6,9,\dots,3\nu\}$$

Άρα, $|A| = |B| = |\Gamma| = \nu$. Τότε για κάθε υποσύνολο T του Σ με $|T| = 3$ έχουμε ότι το 3 διαιρεί το $\Sigma(T)$ αν και μόνο αν είτε 3 στοιχεία από κάποιο από τα σύνολα A,B,Γ, είτε ένα στοιχείο από το κάθε ένα. Άρα υπάρχουν

$$3\binom{\nu}{3} + \nu^3 = 3\tfrac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{6} + \nu^3 = \tfrac{\nu^3-3\nu^2+2\nu+2\nu^3}{2} = \tfrac{3\nu^3-3\nu^2+2\nu}{2}$$

τέτοια υποσύνολα.

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής, με επαγωγή στο ν.
Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$. Πράγματι τότε για το σύνολο $S = \{1,2,3\}$ τα υποσύνολα T που το άθροισμα των στοιχείων τους διαιρείται με το 3 είναι

$$T = \emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}$$

Επομένως υπάρχουν

$$\tfrac{8+2^2}{3} = 4$$

τέτοια υποσύνολα.
Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση μας για $\nu = k$. Δηλαδή για το σύνολο $S = \{1,2,3,\dots,3k\}$ υπάρχουν

$$N_k = \tfrac{8^k+2^{k+1}}{3} \qquad (A)$$

υποσύνολα του $S = \{1,2,3,\dots,3k\}$ με το 3 να διαιρεί το $\Sigma(T)$.
Επειδή το πλήθος των υποσυνόλων του Σ είναι 2^{3k} θα έχουμε και

$$2^{3k} - N_k \qquad (B)$$

υποσύνολα του $S = \{1,2,3,\dots,3k\}$ με το 3 να μην διαιρεί το $\Sigma(T)$.
Θα αποδείξουμε την πρόταση για $\nu = k+1$. Τότε το σύνολο είναι $S = \{1,2,3,\dots,3k,3k+1,3k+2,3k+3\}$.
Βλέπουμε τώρα ποια από τα υποσύνολα του $\{3k+1,3k+2,3k+3\}$ μπορούν να προστεθούν

στα υποσύνολα της μορφής (A) και της μορφής (B) ώστε το άθροισμα των στοιχείων τους να είναι πολλαπλάσιο του 3.
Στα υποσύνολα της μορφής (A) μπορούμε να βάλουμε τα

$$\emptyset, \{3k+1,3k+2\}, \{3k+3\}, \{3k+1,3k+2,3k+3\}$$

Στα υποσύνολα της μορφής (B) μπορούμε να βάλουμε τα

$$\{3k+1\}, \{3k+1,3k+3\} \text{ αν } \Sigma(T) \equiv 2 mod 3$$

και τα

$$\{3k+2\}, \{3k+2,3k+3\} \text{ αν } \Sigma(T) \equiv 1 mod 3$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε δύο επιλογές για τα υποσύνολα της μορφής (B).
Συνολικά έχουμε,

$$4 \cdot \frac{8^k+2^{k+1}}{3} + 2(2^{3k} - \frac{8^k+2^{k+1}}{3}) = 2(2^{3k} + \frac{8^k+2^{k+1}}{3}) = \frac{2}{3}(4 \cdot 8^k + 2^{k+1}) = \frac{8^{k+1}+2^{k+2}}{3}$$

Επομένως η πρόταση ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Προτεινόμενη Λύση 2 **για 2(β)**

Θεωρούμε την γεννήτρια συνάρτηση

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+3^{3n}) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

Αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το άθροισμα των συντελεστών

$$\alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_6 + \cdots$$

Έχουμε ότι

$$f(1) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{3n} = 2^{3n} = 8^n \tag{1}$$

Θεωρώντας τις κυβικές ρίζες της μονάδος $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ξέρουμε ότι

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

Επομένως έχουμε

$$f(\omega) = [(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)]^n = [(1+\omega+\omega^2+\omega^3)(1+\omega^3)]^n = 2^n \tag{2}$$

και

$$f(\omega^2) = (1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^6)\cdot = (1+\omega^2)(1+\omega)\cdot 2\cdots = (1+\omega+\omega^2+\omega^3)\cdot 2\cdots = 2^n \tag{3}$$

Επομένως θα έχουμε

$$f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) =$$
$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdots) + (\alpha_0 + \alpha_1\omega + \alpha_2\omega^2 + \alpha_3\omega^3 \cdots) + (\alpha_0 + \alpha_1\omega^2 + \alpha_2\omega^4 + \alpha_3\omega^6 \cdots)$$

Από τις (1),(2) και (3) η τελευταία ισότητα γράφεται

$$8^n + 2 \cdot 2^n = 3\alpha_0 + \alpha_1(1+\omega+\omega^2) + \alpha_2(1+\omega^2+\omega^4) + \alpha_3(1+\omega^3+\omega^6) + \cdots$$

Λαμβάνοντες υπόψιν τα προηγούμενα και κάνοντας πράξεις στο δεύτερο μέλος της τελευταίας ισότητας θα έχουμε

$$8^n + 2^{n+1} = 3\alpha_0 + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + 3\alpha_3 + \cdots$$

Άρα

$$8^n + 2^{n+1} = 3(\alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_6 + \cdots) \Longrightarrow \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_6 + \cdots = \frac{8^\nu + 2^{\nu+1}}{3}$$

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες

- $f(0) \neq 0$
- $f(1) = \frac{5}{2}$
- Για κάθε $m,n \in \mathbb{N}_0$, ισχύει ότι

$$f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m)$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Σημείωση: Με $\mathbb{N}_0$ συμβολίζουμε το σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$.

Προτεινόμενη Λύση.

Χρησιμοποιώντας την δεδομένη ιδιότητα της συνάρτησης, $f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m)$ θα πάρουμε,
Για $m = n = 0$ έχουμε

$$f^2(0) = 2f(0)$$

και αφού $f(0) \neq 0$, η προηγούμενη σχέση μας δίνει

$$f(0) = 2 \qquad (1)$$

Επίσης για $m = 1$ παίρνουμε

$$\frac{5}{2}f(n) = f(n+1) + f(n-1), \forall n \in \mathbb{N}_0, \qquad (2)$$

Για $n = 1$ στην (2) έχουμε

$$f^2(1) = f(2) + f(0) \Longrightarrow \frac{25}{4} = f(2) + 2 \Longrightarrow f(2) = \frac{17}{4}$$

Παρατηρούμε ότι,

$$f(0) = 2 = 2^0 + 2^0$$
$$f(1) = \frac{5}{2} = 2^1 + 2^{-1}$$
$$f(2) = \frac{17}{4} = 2^2 + 2^{-2}$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι της μορφής

$$f(n) = 2^n + 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}_0, \qquad (3)$$

Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας με την μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής.
Για $n = 0$ και $n = 1$ οι ισχυρισμοί

$$f(0) = 2^0 + 2^0 \text{ και } f(1) = 2^1 + 2^{-1}$$

είναι αληθείς.
Θα υποθέσουμε ότι ισχύουν

$$f(n) = 2^n + 2^{-n} \text{ και } f(n+1) = 2^{n+1} + 2^{-(n+1)}$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$f(n+2) = 2^{n+2} + 2^{-(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Πράγματι από την (2) παίρνουμε,

$$f(n+1)f(1) = f(n+2) + f(n) \Longrightarrow f(n+2) = f(n+1)\frac{5}{2} - f(n)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα θα έχουμε

$$f(n+2) = \tfrac{5}{2}(2^{n+1} + 2^{-(n+1)}) - (2^n + 2^{-n}) = 5(2^n + 2^{-(n+2)}) - 2^n - 2^{-n} =$$
$$5 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{-(n+2)} - 2^n - 2^{-n} = 4 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-2} - 2^{-n}$$

Τελικά θα έχουμε κάνοντας πράξεις,

$$f(n+2) = 4 \cdot 2^n + \tfrac{1}{4} \cdot 2^{-n} = 2^2 \cdot 2^n + \tfrac{1}{4} \cdot 2^{-n} \Longrightarrow f(n+2) = 2^{n+2} + 2^{-(n+2)}$$

Επομένως αποδείξαμε ότι

$$f(n) = 2^n + 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Για την συνάρτηση αυτή θα πρέπει να ελέγξουμε ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες του προβλήματος. Πράγματι

- $f(0) = 2^0 + 2^0 = 2 \neq 0$
- $f(1) = 2^1 + 2^{-1} = \frac{5}{2}$
- Για κάθε $m,n \in \mathbb{N}_0$, έχουμε

  $$f(n)f(m) = (2^n + 2^{-n})(2^m + 2^{-m}) = 2^{n+m} + 2^{n-m} + 2^{-n+m} + 2^{-(n+m)}$$

  ή διαφορετικά

  $$f(n)f(m) = (2^{n+m} + 2^{-n+m}) + (2^{n-m} + 2^{-(n-m)}) = f(n+m) + f(n-m)$$

Επομένως ο τύπος της f είναι

$$f(n) = 2^n + 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Σημείωση: Η συνθήκη $f(0) \neq 0$ θα μπορούσε να παραλειφθεί. Για $m = 0, n = 1$ στη συναρτησιακή εξίσωση παίρνουμε $f(1)f(0) = f(1) + f(0)$. Αν λοιπόν είχαμε $f(0) = 0$, τότε θα παίρναμε και $f(1) = 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Προτεινόμενη Λύση 2 για το Πρόβλημα 3.

Χρησιμοποιώντας την δεδομένη ιδιότητα της συνάρτησης, $f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m)$ θα πάρουμε,
Για $m = n = 0$ έχουμε

$$f^2(0) = 2f(0)$$

και αφού $f(0) \neq 0$, η προηγούμενη σχέση μας δίνει

$$f(0) = 2$$

Επίσης για $m = 1$ παίρνουμε

$$\tfrac{5}{2}f(n) = f(n+1) + f(n-1), \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μια ομογενή αναδρομική σχέση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της είναι

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι $x = 2$ και $x = \frac{1}{2}$.
Η λύση είναι της μορφής

$$f(n) = A2^n + B\tfrac{1}{2^n}, \text{ για κάποια } A,B.$$

Για $n = 0$ στην τελευταία ισότητα έχουμε

$$A + B = f(0) = 2 \tag{1}$$

Για $n = 1$ στην τελευταία ισότητα έχουμε

$$2A + \frac{1}{2}B = f(1) = \frac{5}{2} \tag{2}$$

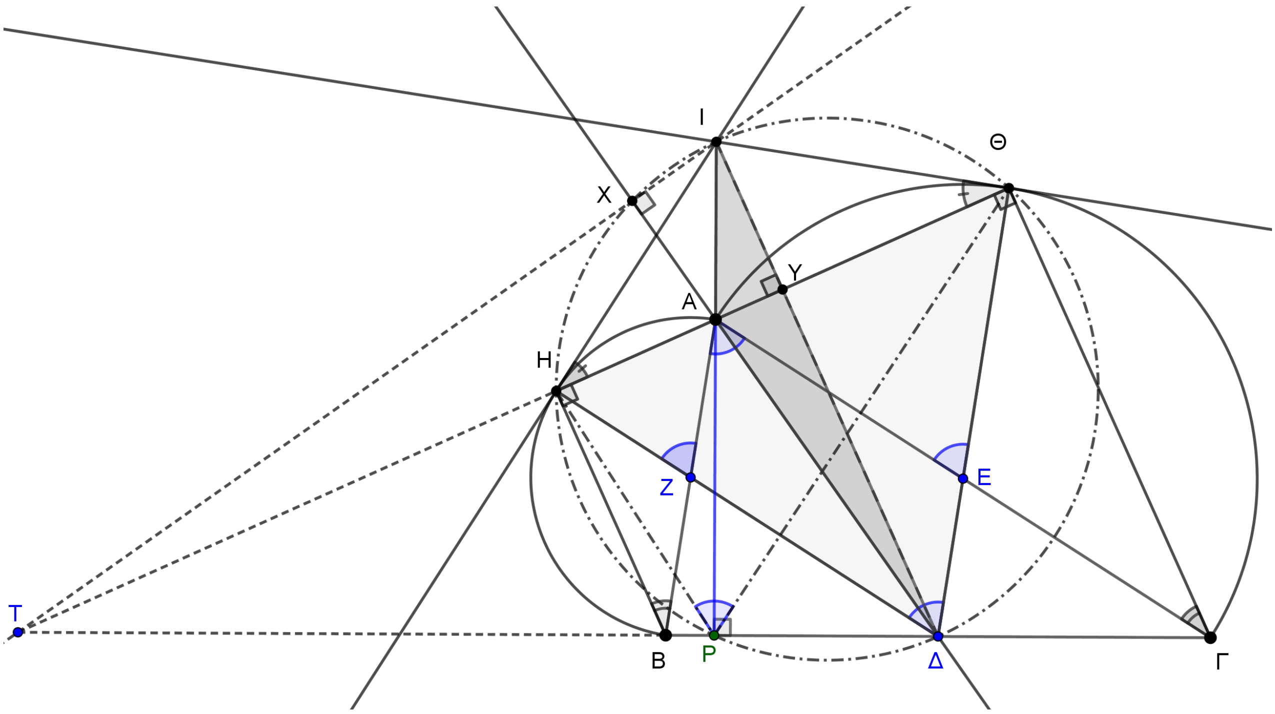
Λύνοντας το σύστημα (1) και (2) βρίσκουμε $A = B = 1$. Άρα

$$f(n) = 2^n + \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB \neq B\Gamma$ και Δ,E,Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$,$A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Με διαμέτρους τα τμήματα AB και $A\Gamma$ γράφουμε ημικύκλια εξωτερικά του τριγώνου. Οι ευθείες ΔE και ΔZ τέμνουν τα ημικύκλια στα σημεία Θ και H αντίστοιχα. Οι εφαπτόμενες των ημικυκλίων στα σημεία Θ και H τέμνονται στο I. Αν η ΔA τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\triangle H\Delta\Theta$ στο σημείο X, να αποδείξετε ότι οι ευθείες IX και $H\Theta$ τέμνονται πάνω στην ευθεία $B\Gamma$.

Προτεινόμενη Λύση.
Έστω P σημείο πάνω στην $B\Gamma$ έτσι ώστε $AP \perp B\Gamma$. Τότε τα τετράπλευρα $AHBP$ και $A\Theta\Gamma P$ είναι εγγράψιμα. Ξέρουμε ότι $\Delta Z \parallel A\Gamma$ και $\Delta E \parallel AB$.



Άρα

$$\angle AZH = \angle AE\Theta = \angle A$$

Επομένως

$$\angle ABH = \angle \Theta\Gamma A = \angle \frac{A}{2}$$

και τότε θα έχουμε

$$\angle HAB = 90^\circ - \angle \frac{A}{2} \text{ και } \angle \Theta A\Gamma = 90^\circ - \angle \frac{A}{2}$$

Επομένως έχουμε

$$\angle HAB + \angle A + \angle \Theta A\Gamma = 180^\circ$$

δηλαδή τα σημεία H,A,Θ συνευθειακά.
Επίσης από τα προηγούμενα εγγράψιμα τετράπλευρα θα έχουμε

$$\angle APH = \angle ABH = \angle\frac{A}{2} \text{ και } \angle AP\Theta = \angle A\Gamma\Theta = \angle\frac{A}{2}$$

Άρα

$$\angle HP\Theta = \angle H\Delta\Theta = \angle A$$

Επομένως το τετράπλευρο $HP\Delta\Theta$ είναι εγγράψιμο.Ξέρουμε ότι $\angle\Delta HI = \angle\Delta\Theta I = 90°$.Άρα και το τετράπλευρο $\Delta HI\Theta$ είναι εγγράψιμο. Δηλαδή τα σημεία I,H, P, Δ,Θ είναι ομοκυκλικά. Συμπεραίνουμε ότι και το τετράπλευρο $PHI\Theta$ είναι εγγράψιμο.
Από το θεώρημα γωνίας μεταξύ χορδής και εφαπτομένης θα πάρουμε

$$\angle I\Theta H = \angle A\Gamma\Theta = \angle\frac{A}{2}$$

επίσης έχουμε

$$\angle IPH = \angle I\Theta H = \angle\frac{A}{2}$$

και αφού $\angle APH = \angle\frac{A}{2}$ προκύπτει ότι

$$\angle IPH = \angle APH = \angle\frac{A}{2}$$

και συμπεραίνουμε ότι τα σημεία I,A,P είναι συνευθειακά. Επομένως έχουμε ότι $IA\perp B\Gamma$. Στο τρίγωνο $\triangle IA\Delta$ αφού $P\Delta\perp IA$ έχουμε ότι το $P\Delta$ είναι το ένα ύψος του.
Επίσης αφού η ΔI είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\triangle H\Delta\Theta$ έχουμε ότι $\angle\Delta XI = 90°$. Άρα $IX\perp A\Delta$, δηλαδή το IX είναι το δεύτερο ύψος του τριγώνου $\triangle IA\Delta$.
Επομένως αν T είναι το σημείο τομής της ευθείας IX με την $B\Gamma$ συμπεραίνουμε ότι το T είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $\triangle IA\Delta$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η $H\Theta$ είναι κάθετη στην $I\Delta$.
Πράγματι αφού

$$\angle IH\Theta = \angle I\Theta H = \angle\frac{A}{2}$$

το τρίγωνο $\triangle IH\Theta$ είναι ισοσκελές. Από την ισότητα των τριγώνων $\triangle IH\Delta = \triangle I\Delta\Theta$ παίρνουμε ότι η $I\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle HI\Theta$. Άρα η ευθεία $H\Theta$ είναι κάθετη στην $I\Delta$, δηλαδή η $H\Theta$ είναι ο φορέας του τρίτου ύψους του τριγώνου $\triangle IA\Delta$. Επομένως η $H\Theta$ διέρχεται από το ορθόκεντρο T του τριγώνου$\triangle IA\Delta$. Τελικά έχουμε ότι οι ευθείες IX και $H\mathit{\Theta}$ τέμνονται πάνω στην ευθεία $B\mathit{\Gamma}$.

Σημείωση: Για τη συνευθειακότητα των I,A,P μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

Αν ω_1 και ω_2 οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τετραπλεύρων $AHBP$ και $A\Theta\Delta P$ τότε ο ριζικός άξονας των ω_1 και ω_2 περνάει από τα κοινά τους σημεία A και P. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι και το I ανήκει πάνω στον ριζικό άξονα. Επειδή οι IH και $I\Theta$ είναι εφαπτομένες των ω_1 και ω_2 αντίστοιχα, αρκεί να δειχθεί ότι $IH = I\Theta$. Αυτό όμως ισχύει αφού έχουμε ήδη δείξει ότι $\angle IH\Theta = I\Theta H$.

Προτεινόμενη Λύση 2 για το Πρόβλημα 4.

Όπως και στην πρώτη προτεινόμενη λύση δείχνουμε ότι τα τετράπλευρα $AHBP$ και $A\Theta\Gamma P$ είναι εγγράψιμα, τα σημεία H,A,Θ είναι συνευθειακά και έχουμε τις ισότητες γωνιών $\angle AHI = \angle A\Theta I$ και $\angle AH\Delta = \angle A\Theta\Delta$.

Έστω T το σημείο τομής της ευθείας $H\Theta$ με την ευθεία $B\Gamma$ και έστω T' το σημείο τομής της ευθείας IX με την ευθεία $B\Gamma$.

Επειδή η AP είναι κάθετη στην TP και

$$\angle APH = \angle AHI = \angle A\Theta I = \angle AP\Theta$$

η τετράδα $(\Theta{,}H;T{,}A)$ είναι αρμονική.

Επειδή η $T'X$ είναι κάθετη στην XA και

$$\angle HXA = \angle H\Theta\Delta = \angle \Theta H\Delta = \angle \Theta XA$$

η τετράδα $(\Theta{,}H;T'{,}A)$ είναι επίσης αρμονική.

Επομένως τα $T{,}T'$ ταυτίζονται και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.