Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

5ο Διαγώνισμα

23-3-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

μονάδες 7

Α2. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι συναρτήσεις $f^{-1}\circ f$ και $f\circ f^{-1}$ είναι ίσες».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

μονάδες 6

Α5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α. $x_0 = 0$ Β. $x_0 = 2$ Γ. $x_0 = -1$ Δ. $x_0 = 1$

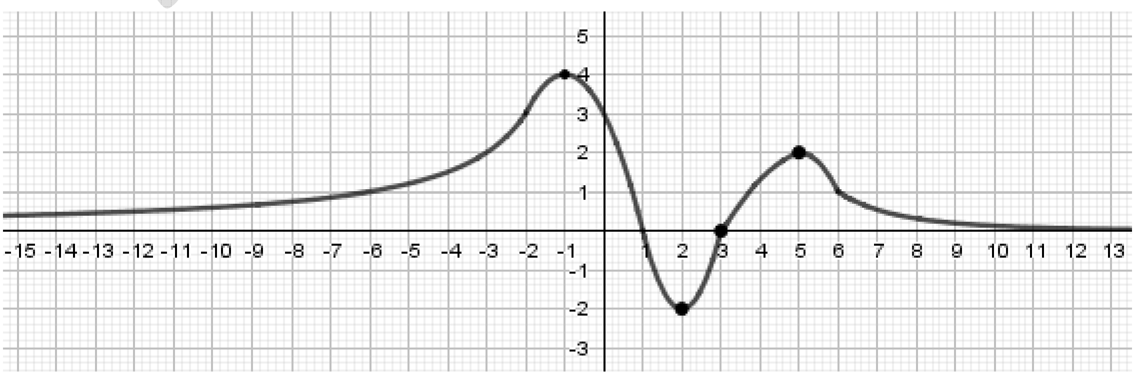
β) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = 0$, τότε:

Α. $f(1) = -1$ Β. $f(-1) > 0$ Γ. $f(1) > 0$ Δ. $f(-1) = 0$

μονάδες 4

Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και οι τιμές $f(-1)=1,\ f(1)=4,\ f(2)=0,\ f(3)=-2,\ f(5)=1$.



Β1. Να μελετήσετε τη f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Β2. Να μελετήσετε τη f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 4

Έστω επιπλέον ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x+2\right)=0$.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

μονάδες 3

Β4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών τη f.

μονάδες 5

Β5. Να σχεδιάσετε την C_f με βάση τα παραπάνω δεδομένα.

μονάδες 4

Β6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\cdot f'(x)+f(x)=3f'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(1,+\infty)$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η ορισμένη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- Η f αντιστρέφεται και έχει ως αντίστροφη την f^{-1} .
- Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού τους και ισχύει η σχέση:

$$f(x)-\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{x^2}-f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x\in D_f\cap D_{f^{-1}} .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f και η f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

μονάδες 6

Γ3. Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{\pi},\frac{2}{\pi}\right)$, να αποδείξετε ότι:

α) ορίζεται το $A=f\left[x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right]+f^{-1}\left[x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

β) η ανίσωση $\dfrac{1}{x^2\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}}<2$ δεν έχει λύση.

μονάδες 2+6

Γ4. Έστω η ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να αποδείξετε ότι:

α) η συμμετρική ευθεία της $y=\alpha$ ως προς την ευθεία $y=x$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

β) αν η f είναι συνεχής τότε α = 0.

μονάδες 3+3

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=3x^2e^{|x|^3}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

Δ1. Να βρείτε το σύνολο των συναρτήσεων f που ικανοποιούν την (1).

μονάδες 8

Δ2. Αν το γινόμενο $f(-2)\cdot f(2)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του να βρείτε τον τύπο της f.

μονάδες 3

Δ3. Έστω $f(x)=\begin{cases} e^{x^3}-1 & , x\geq 0 \\ -e^{-x^3}+1 & , x<0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 0 διαπερνά την καμπύλη της f.

μονάδες 5

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, e-1)$ και να αποδείξετε ότι έχει κι άλλο κοινό σημείο με την C_f στο οποίο όμως δεν είναι εφαπτομένη.

μονάδες 9

Καλή Τύχη!

Askisopolis