

Μέση τιμή

Ο αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή συμβολίζεται με \bar{x} και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i$$

Αν m η μικρότερη από τις τιμές $t_i, i=1,2,\dots,v$ και M η μέγιστη από τις τιμές, τότε:

$$m \leq t_i \leq M, \text{ οπότε } vm \leq \sum_{i=1}^v t_i \leq vM \Leftrightarrow m \leq \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v} \leq M \Leftrightarrow \boxed{m \leq \bar{x} \leq M}$$

Εστω ότι οι τιμές x_1, x_2, \dots, x_k μιας μεταβλητής X έχουν συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k . Η μέση τιμή τους ορίζεται ισοδύναμα από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{X_1 v_1 + X_2 v_2 + \dots + X_k v_k}{v} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i v_i}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k X_i v_i$$

Η προηγούμενη σχέση ισοδύναμα γίνεται:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k X_i \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^k X_i f_i$$

Σταθμικός μέσος

Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα στις τιμές x_1, x_2, \dots, x_v ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο. Αν κάθε μία από τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_v έχει διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται από του συντελεστές στάθμισης (ή βαρύτητας) w_1, w_2, \dots, w_v , τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{X_1 w_1 + X_2 w_2 + \dots + X_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^v X_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}$$

Μέση τιμή	
Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
1. Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές. 2. Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων. 3. Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος.	1. Επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές. 2. Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε τιμή της μεταβλητής. 3. Δεν χρησιμοποιείται σε ποιοτικές μεταβλητές. 4. Όταν η μεταβλητή είναι διακριτή, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος.

Ιδιότητες της μέσης τιμής
Εστω x_1, x_2, \dots, x_n οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X . α) Αν σε όλες τις τιμές x_i προσθέσουμε μια σταθερά c , τότε η σταθερά c προστίθεται και στη μέση τιμή των x_i . Δηλαδή αν $y_i = x_i + c, i = 1, 2, \dots, n$ οι νέες τιμές, τότε $\bar{y} = \bar{x} + c$ β) Αν όλες τις τιμές x_i τις πολλαπλασιάσουμε με μια σταθερά c , τότε και η μέση τιμή των x_i πολλαπλασιάζεται με τη σταθερά c . Δηλαδή αν $y_i = c \cdot x_i, i = 1, 2, \dots, n$ οι νέες τιμές, τότε $\bar{y} = c \cdot \bar{x}$

Λυμένες Ασκήσεις

1. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε όλα τα μαθήματα είναι: 16, 15, 14, 13, 19, 15, 18, 12, 13, 11
 Να βρείτε τη μέση βαθμολογία του.

Λύση

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_i}{10} = \frac{16+15+14+13+19+15+18+12+13+11}{10} = \frac{146}{10} = 14,6$$

2. Ο διπλανός πίνακας δίνει τη ποσοστιαία κατανομή των νοικοκυριών αστικών περιοχών ως προς τον αριθμό των δωματίων των οικιών τους.
 Να βρείτε το μέσο αριθμό δωματίων.

Λύση

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 1 \cdot \frac{12}{100} + 2 \cdot \frac{28}{100} + 3 \cdot \frac{32}{100} + 4 \cdot \frac{20}{100} + 5 \cdot \frac{6}{100} + 6 \cdot \frac{2}{100} = 2,86$$

x_i	$f_i\%$
1	12
2	28
3	32
4	20
5	6
6	2
Σύνολο	100

3. Ο διπλανός πίνακας δίνει τον αριθμό των παιδιών σε ένα δείγμα 100 οικογενειών. Να βρούμε το μέσο αριθμό παιδιών του δείγματος.

Λύση

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i v_i}{100} = \frac{0 \cdot 14 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 31 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 4}{100} = \frac{200}{100} = 2$$

Δηλαδή κάθε μία από τις 100μ οικογένειες έχει 2 παιδιά.

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών v_i
0	14
1	25
2	31
3	11
4	15
5	4
Σύνολο	100

4. Στο διπλανό πίνακα δίνεται ο χρόνος παρακολούθησης τηλεόρασης, σε ώρες, ανά εβδομάδα ενός δείγματος 20 ανθρώπων. Να βρείτε το μέσο χρόνο παρακολούθησης.

Κλάσεις	$[0,3)$	$[3,6)$	$[6,9)$	$[9,12)$
v_i	4	7	6	3

Λύση

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{20} = 5,47 \text{ ώρες}$$

Κλάσεις	x_i	v_i	$x_i v_i$
$[0,3)$	1,5	4	6
$[3,6)$	4,5	7	27
$[6,9)$	7,5	6	45
$[9,12)$	10,5	3	31,5
Σύνολο		20	109,5

5. Ο μέσος μισθός 10 ανδρών και 5 γυναικών που εργάζονται σε μία επιχείρηση, είναι 960 ευρώ. Αν ο μέσος μισθός των ανδρών είναι 980€, να βρείτε το μέσο μισθό των γυναικών.

Λύση

Εστω x_1, x_2, \dots, x_{10} οι μισθοί των ανδρών και $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{15}$ οι μισθοί των γυναικών. Τότε

$$\frac{x_1, x_2, \dots, x_{10}}{10} = 980 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 9.800,$$

$$\bar{x} = 960 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = 960 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{15} x_i = 14.400 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=11}^{15} x_i = 14.400 \Leftrightarrow$$

$$9.800 + \sum_{i=11}^{15} x_i = 14.400 \Leftrightarrow \sum_{i=11}^{15} x_i = 4.600$$

Ο μέσος μισθός των 5 γυναικών είναι: $\frac{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}}{5} = \frac{\sum_{i=11}^{15} x_i}{5} = \frac{4.600}{5} = 920 \text{ €}$

6. Εστω x_1, x_2, \dots, x_v οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X με μέση τιμή \bar{x} . Αν k από αυτές τις παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή \bar{x}_1 και οι υπόλοιπες έχουν μέση τιμή \bar{x}_2 , να αποδείξετε ότι:

$$\bar{x} = \frac{k}{v}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \bar{x}_2.$$

Λύση

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} X_i}{\nu_1} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\kappa} X_i = \kappa \bar{X}_1, \quad \bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=\kappa+1}^{\nu} X_i}{\nu - \kappa} \Leftrightarrow \sum_{i=\kappa+1}^{\nu} X_i = (\nu - \kappa) \bar{X}_2$$

Για τη συνολική μέση τιμή του δείγματος, έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} X_i + \sum_{i=\kappa+1}^{\nu} X_i}{\nu} = \frac{\kappa \bar{X}_1 + (\nu - \kappa) \bar{X}_2}{\nu} = \frac{\kappa \bar{X}_1 + \nu \bar{X}_2 - \kappa \bar{X}_2}{\nu} = \frac{\kappa(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \nu \bar{X}_2}{\nu} \Leftrightarrow \\ \bar{X} &= \frac{\kappa}{\nu}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \bar{X}_2 \end{aligned}$$

7. Η μέση βαθμολογία 5 μαθητών είναι 78. Αν έρθουν άλλο 2 που η βαθμολογία τους διαφέρει κατά 3 μονάδες, τότε η μέση βαθμολογία γίνεται 79. Να βρείτε τους βαθμούς των 2 νέων μαθητών.

Λύση

Εστω X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 οι βαθμοί των 5 μαθητών. Τότε

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5} = 78 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 X_i = 390$$

Αν x ο βαθμός του ενός μαθητή, τότε $x + 3$ θα είναι ο βαθμός του άλλου μαθητή.

Η μέση βαθμολογία όλων, είναι:

$$\frac{\sum_{i=1}^5 X_i + x + x + 3}{7} = 79 \Leftrightarrow 390 + 2x + 3 = 553 \Leftrightarrow 2x = 160 \Leftrightarrow x = 80.$$

Άρα οι δύο νέοι βαθμοί είναι 80 και 83.

8. Εστω X_1, X_2, \dots, X_{100} οι τιμές μιας μεταβλητής X με μέση τιμή \bar{x} . Σε κάποιες από τις τιμές προσθέτουμε το 7 και στις υπόλοιπες αφαιρούμε το 3. Αν η μέση τιμή του νέου δείγματος είναι μεγαλύτερη από τη \bar{x} κατά 4, να βρείτε σε πόσες τιμές προσθέσαμε το 7.

Λύση

$$\text{Είναι } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} X_i = 100\bar{x}$$

Εστω ότι σε κ από τις 100 τιμές προσθέτουμε το 7, τότε στις υπόλοιπες $100 - \kappa$ τιμές αφαιρούμε το 3. Η νέα μέση τιμή \bar{y} , είναι:

$$\bar{y} = \frac{x_1 + 7 + x_2 + 7 + \dots + x_{\kappa} + 7 + x_{\kappa+1} - 3 + \dots + x_{100} - 3}{100} = \bar{x} + 4 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{100} X_i + 7\kappa - 3(100 - \kappa) = 100\bar{x} + 400 \Leftrightarrow \cancel{100\bar{x}} + 7\kappa - 300 + 3\kappa = \cancel{100\bar{x}} + 400 \Leftrightarrow$$

$$10\kappa = 700 \Leftrightarrow \kappa = 70$$

Σε 70 τιμές προσθέτουμε το 7 και στις υπόλοιπες 30 αφαιρούμε το 3.

9. Δίνεται ο διπλάνος πίνακας σχετικών συχνοτήτων v τιμών μιας μεταβλητής X .

x_i	1	2	3	4	5
$f_i\%$	16	32	32	15	5

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή τους.
β) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 4 είναι 2,2.

Λύση

$$\alpha) \bar{x} = \sum_{i=1}^v x_i f_i = \frac{1 \cdot 16 + 2 \cdot 32 + 3 \cdot 32 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 5}{100} = 2,61$$

$$\beta) f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0,16 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow v_1 = 0,16v$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,32 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_2 = 0,32v,$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow 0,32 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow v_3 = 0,32v.$$

Το σύνολο των τιμών του νέου δείγματος που αποτελείται από τις τιμές που είναι μικρότερες του 4 είναι $v' = 0,16v + 0,32v + 0,32v = 0,80v$.

Οι νέες σχετικές συχνότητες, είναι:

$$f'_1 = \frac{0,16v}{0,80v} = 0,2, \quad f'_2 = \frac{0,32v}{0,80v} = 0,4 \quad \text{και} \quad f'_3 = \frac{0,32v}{0,80v} = 0,4.$$

x_i	f_i	v_i	f'_i
1	0,16	0,16v	$\frac{0,16v}{0,80v} = 0,2$
2	0,32	0,32v	$\frac{0,32v}{0,80v} = 0,4$
3	0,32	0,32v	$\frac{0,32v}{0,80v} = 0,4$
Σύνολο		$v' = 0,80v$	1

Η μέση τιμή του νέου δείγματος, είναι: $\bar{x} = \sum_{i=1}^v x_i f'_i = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,4 = 2,2$

10. Οι τιμές πώλησης ενός προϊόντος σε 10 διαφορετικά καταστήματα είναι
12, 13, 10, 15, 11, 14, 16, 9, 19, 21 ευρώ.

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή πώλησης του προϊόντος.
β) Αν στις προηγούμενες τιμές προστεθεί και ΦΠΑ 23% τότε ποια θα είναι η νέα μέση τιμή πώλησης του προϊόντος;
γ) Αν η συσκευασία δώρου του προϊόντος κοστίζει 2 ευρώ, τότε ποια είναι η μέση τιμή πώλησης του προϊόντος μαζί με τη συσκευασία του;

Λύση

$$\alpha) \text{ Η μέση τιμή πώλησης είναι: } \bar{x} = \frac{12+13+10+15+11+14+16+9+19+21}{10} = 14 \text{ ευρώ}$$

β) Εστω $y_i, i=1,2,\dots,10$ οι τιμές του προϊόντος μετά από το ΦΠΑ. Τότε

$$y_i = x_i + \frac{23}{100} x_i = 1,23x_i, \text{ οπότε η νέα μέση τιμή πώλησης είναι:}$$

$$\bar{y} = 1,23\bar{x} = 1,23 \cdot 14 = 17,22 \text{ ευρώ}$$

γ) Εστω z_i οι τιμές πώλησης του προϊόντος με τη συσκευασία του. Τότε

$$z_i = y_i + 2, i=1,2,\dots,10 \text{ και η μέση τιμή πώλησης είναι: } \bar{z} = \bar{y} + 2 = 19,22 \text{ ευρώ}$$

11. Σε μια εταιρεία σε καθένα από τα τμήματα της Α, Β εργάζονται v άτομα. Ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων είναι 1100 ευρώ. Ο μέσος μισθός των εργαζομένων του τμήματος Β είναι 800 ευρώ. Στους εργαζομένους του τμήματος Α έγινε αύξηση 50 ευρώ στον καθένα, ενώ στους εργαζομένους του τμήματος Β έγινε αύξηση 10% στον καθένα.

- α) Να βρείτε το μέσο μισθό των εργαζομένων του τμήματος Α.
β) Να βρείτε το νέο μέσο μισθό όλων των εργαζομένων σε κάθε τμήμα.

γ) Να βρείτε το νέο μέσο μισθό όλων των εργαζομένων μετά την αύξηση.

Λύση

α) Εστω $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ οι μισθοί των εργαζομένων του τμήματος Α και $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ οι μισθοί των εργαζομένων του τμήματος Β. Τότε για το συνολικό μέσο μισθό, ισχύει:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i}{2n} = 1100 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i = 2200n \quad (1)$$

Επειδή ο μέσος μισθός των εργαζομένων του τμήματος Β είναι 800 ευρώ, ισχύει ότι:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{n} = 800 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \beta_i = 800n. \text{ Η σχέση (1) γίνεται:}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i + 800n = 2200n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1400n$$

Ο μέσος μισθός των εργαζομένων του τμήματος Α, είναι: $\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n} = \frac{1400n}{n} = 1400 \text{ €}$

β) Εστω $\alpha'_i, i = 1, 2, \dots, n$ οι μισθοί των εργαζομένων του τμήματος Α μετά την αύξηση των 50€. Τότε $\alpha'_i = \alpha_i + 50$ και ο νέος μέσος μισθός τους είναι $\bar{\alpha}' = \bar{x}_A + 50 = 1450 \text{ €}$.

Εστω $\beta'_i, i = 1, 2, \dots, n$ οι μισθοί των εργαζομένων του τμήματος Β μετά την αύξηση του

10%. Τότε: $\beta'_i = \beta_i + \frac{10}{100}\beta_i = 1,1\beta_i$ και ο νέος μέσος μισθός τους είναι $\bar{\beta}' = 1,1\bar{x}_B = 880 \text{ €}$.

γ) Είναι $\bar{\alpha}' = 1450 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n} = 1450$ και $\bar{\beta}' = 880 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{n} = 880 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \beta_i = 880n$.

Ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων είναι:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha'_i + \sum_{i=1}^n \beta'_i}{2n} = \frac{1450n + 880n}{2n} = \frac{2330n}{2n} = 1165 \text{ €}$$

12. Ένας βιομήχανος θέλει να κάνει αύξηση στους μισθούς των εργαζομένων του. Του έχουν προταθεί δύο τρόποι για να δώσει αύξηση. Να δώσει σε καθέναν 42 ευρώ ή 6% του μισθού του. Ποιος πρέπει να είναι ο μέσος μισθός των εργαζομένων, ώστε να συμφέρει τον βιομήχανο η αύξηση του 6%;

Λύση

Εστω x_i οι αρχικοί μισθοί των υπαλλήλων.

Εστω y_i οι μισθοί μετά την αύξηση των 42 ευρώ. Τότε $y_i = x_i + 42$, οπότε και $\bar{y} = \bar{x} + 42$.

Εστω z_i οι μισθοί μετά την αύξηση του 6%. Τότε $z_i = x_i + \frac{6}{100}x_i = 1,06x_i$, οπότε $\bar{z} = 1,06\bar{x}$.

Για να συμφέρει τον βιομήχανο η αύξηση του 6%, πρέπει:

$$\bar{z} < \bar{y} \Leftrightarrow 1,06\bar{x} < \bar{x} + 42 \Leftrightarrow 1,06\bar{x} - \bar{x} < 42 \Leftrightarrow 0,06\bar{x} < 42 \Leftrightarrow \bar{x} < \frac{42}{\frac{6}{100}} = 700.$$

Επομένως όταν ο μέσος μισθός των εργαζομένων είναι μικρότερος από 700 ευρώ, τότε συμφέρει στον βιομήχανο η αύξηση του 6%.

Ασκήσεις

13. Το μέσο ημερομίσθιο 30 εργατών μιας κατασκευαστικής εταιρείας είναι 30 ευρώ. Οι οκτώ είναι ειδικευόμενοι και έχουν μέσο ημερομίσθιο 57,5 ευρώ. Ποιο είναι το μέσο ημερομίσθιο των ανειδίκευτων εργατών;
(Απ 20€)
14. Οι 450 μαθητών ενός Λυκείου μελετούν κατά μέσο όρο 30 ώρες την εβδομάδα. Αν οι 140 μαθητές της Α' Λυκείου μελετούν κατά μέσο όρο 20 ώρες την εβδομάδα και οι 160 μαθητές της Γ' Λυκείου μελετούν κατά μέσο όρο 35 ώρες την εβδομάδα, να βρείτε το μέσο εβδομαδιαίο χρόνο μελέτης των μαθητών της Β' Λυκείου.
(Απ 34)
15. Οι 9 υπάλληλοι μιας εταιρείας έχουν μέσο μισθό 800€. Η εταιρεία προσλαμβάνει άλλον ένα υπάλληλο.
α) Αν η εταιρεία θέλει οι υπάλληλοί της να έχουν μέσο μισθό 820€, να βρείτε το μισθό του νέου υπαλλήλου.
β) Μετά από λίγο καιρό η εταιρεία απολύει τον καινούργιο υπάλληλο και προσλαμβάνει έναν άλλο με μισθό 700€. Να βρείτε το νέο μέσο μισθό των υπαλλήλων της εταιρείας.
(Απ. α) 1000, β) 790)
16. Ο μέσος μηνιαίος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 1200€. Η εταιρεία προσλαμβάνει έναν διευθυντή με μισθό 2750€ μηνιαίος και ο μέσος μισθός όλων γίνεται 1250€.
α) Να βρείτε το πλήθος των υπαλλήλων της εταιρείας.
β) Λόγω κακών αποτελεσμάτων χρήσης η εταιρεία απολύει τον διευθυντή που προσέλαβε και προσλαμβάνει στη θέση του δύο άλλους υπαλλήλους για προϊστάμενους με μηνιαίους μισθούς 2000€ και 1680€ αντίστοιχα. Να βρείτε το μέσο μισθό όλων των υπαλλήλων.
(Απ. α) 30, β) 1240)
17. Σε μια εταιρεία εργάζονται 50 άτομα με μέση ηλικία 36 χρόνια. Αν η μέση ηλικία των ανδρών είναι 40 χρόνια και των γυναικών 32 χρόνια, τότε:
α) Να βρείτε πόσοι είναι οι άνδρες και πόσες οι γυναίκες υπάλληλοι της εταιρείας.
β) Αν φύγουν 3 άνδρες με μέση ηλικία 35 χρόνια και έρθουν 4 γυναίκες με μέση ηλικία 30 χρόνια, ποια θα είναι τώρα η μέση ηλικία όλων των υπαλλήλων;
(Απ. α) 25,25, β) 35,6)
18. Σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών σε 5 τμήματα ενός σχολείου, ο μέσος όρος με άριστα το 100 ήταν 83, 88, 79, 65 και 72 αντίστοιχα. Αν κάθε ένα τμήμα από τα προηγούμενα είχε 16, 18, 20, 21 και 23 μαθητές αντίστοιχα, να βρείτε τη μέση βαθμολογία όλων των μαθητών σε αυτό το διαγώνισμα.
(Απ 76,6)
19. Η μέση βαθμολογία ενός μαθητή σε 5 διαγωνίσματα είναι 90 (άριστα το 100).
α) Αν στο 6ο διαγώνισμα ο μαθητής γράψει 96, ποια θα είναι η νέα μέση βαθμολογία του;
β) Πόσο πρέπει να γράψει ο μαθητής στο 6ο διαγώνισμα για να κατέβει η βαθμολογία του κατά 2 μονάδες;
(Απ α) 91, β) 78)

20. Στο Γ1 τμήμα της τελευταίας τάξης ενός Λυκείου φοιτούν 20 μαθητές, στο Γ2 25 μαθητές και στο Γ3 30 μαθητές. Η μέση βαθμολογία στα Μαθηματικά όλης της Γ' Λυκείου είναι 15. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία κάθε τμήματος, αν γνωρίζετε ότι η μέση βαθμολογία του Γ1 είναι ίδια με τη μέση βαθμολογία του Γ2 αλλά είναι κατά 1 μονάδα μικρότερη από τη μέση βαθμολογία του Γ3.
(Απ 14,6, 14,6, 15,6)
21. Η μέση τιμή 200 αριθμών είναι 80. Αν όμως 25 αριθμοί έχουν επηρεκτιμηθεί κατά 20 και 10 αριθμοί έχουν υποεκτιμηθεί κατά 10, να υπολογίσετε τη σωστή μέση τιμή.
(Απ 78)
22. Η μέση τιμή 5 αριθμών είναι 30. Οι τρεις από αυτούς είναι 17, 23, 50. Αν γνωρίζουμε ότι από τους υπόλοιπους 2 αριθμούς ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου, να βρείτε τους δύο αριθμούς.
(Απ 20, 40)
23. Σε μια ομάδα 30 αριθμών καταχωρήθηκαν από λάθος δύο ακόμη με τιμές 20 και 40. Αν η μέση τιμή που βρέθηκε είναι 50, να υπολογίσετε τη σωστή μέση τιμή.
(Απ 51,33)
24. Εστω x_1, x_2, \dots, x_{50} οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X . Αν σε κάποιες από τις τιμές προσθέσουμε το 5 και στις υπόλοιπες αφαιρέσουμε το 3, η νέα μέση τιμή είναι μεγαλύτερη από την αρχική κατά 1. Να βρείτε σε πόσες τιμές προσθέσαμε το 5.
(Απ 25)
25. Το πλήθος των μαθητών ενός Λυκείου είναι πολλαπλάσιο του 10. Έστω $x_i, i=1,2,\dots,n$ τα χρήματα που δήλωσαν οι μαθητές ότι ξοδεύουν κάθε Σάββατο και \bar{x} η μέση τιμή τους. Αν το 10% των μαθητών δήλωσε έξοδα κατά 5 ευρώ λιγότερα από τα πραγματικά, ενώ το 30% δήλωσε 2 ευρώ περισσότερα. Αν \bar{y} η πραγματική μέση τιμή των χρημάτων που ξοδεύουν οι συγκεκριμένοι μαθητές κάθε Σάββατο, να αποδείξετε ότι $\bar{y} = \bar{x} - \frac{1}{10}$.
26. Οι τιμές $2^x, 6, 4, 2$ έχουν συντελεστές βαρύτητας $x, 4, 6, 2^x$ αντίστοιχα. Αν ο σταθμικός τους μέσος είναι 4, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x .
(Απ 2)
27. Ένας υποψήφιος για την εισαγωγή του στη σχολή της αρεσκείας του χρειάζεται μέση επίδοση 18,2. Η μέση βαθμολογία του προκύπτει από το βαθμό πρόσβασης, το βαθμό του 1ου μαθήματος αυξημένης βαρύτητας και από το βαθμό στο 2ο μάθημα αυξημένης βαρύτητας. Αν οι συντελεστές βαρύτητας είναι αντίστοιχα 8, 1,3 και 0,7 αντίστοιχα και ο υποψήφιος είχε βαθμό πρόσβασης 18 και βαθμό στο 1ο μάθημα βαρύτητας 18,5, τότε ποιος είναι ο μικρότερος βαθμός που πρέπει να πάρει στο 2ο μάθημα βαρύτητας ώστε να πετύχει στη σχολή της προτίμησής του;
(Απ 19,93)
28. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε 5 μαθήματα είναι 16, 17, 17, 18, 19.
α) Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.
β) Να βρείτε το μέσο όρο της βαθμολογίας του σε αυτά τα 5 μαθήματα, αν αυτά έχουν αντίστοιχους συντελεστές βαρύτητας:
i. 3, 2, 1, 1, 1 ii. 1, 1, 1, 3, 2
(Απ α) 17 β) i. 17, ii. 17,5)
29. Στο διπλανό πίνακα σχετικών συχνοτήτων οι τιμές 2, 3, 4, 5 έχουν μέση τιμή 3.
α) Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες που λείπουν.
β) Να γίνει το πολύγωνο συχνοτήτων.

x_i	$f_i\%$
2	30
3	
4	
5	5
Σύνολο	100

30. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα και να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων, αν γνωρίζετε ότι οι κλάσεις είναι ίσου πλάτους και $f_1 = f_4$, $f_2 = 2f_3$ και $f_1 + f_3 = 0,3$.

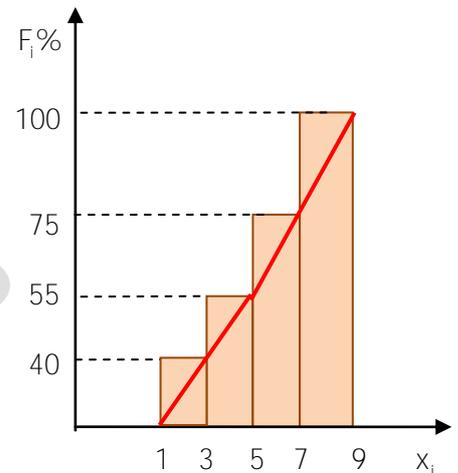
(Απ 6,8)

Κλάσεις	x_i	f_i
[...-...)	3	f_1
[...-...)		0,3
[6-...)		f_3
[...-...)		f_4
[...-...)		f_5

31. Η μέση τιμή πέντε ακέραιων αριθμών είναι τριπλάσια της διαμέσου και $9 < \bar{x} < 85$. Αν οι τέσσερις αριθμοί είναι οι 1, 3, 9, 85, να βρείτε τον πέμπτο αριθμό.

32. Με βάση το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του διπλανού σχήματος, να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος.

(Απ 4,6)



33. Δίνεται ο διπλανός πίνακας σχετικών συχνοτήτων n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X .

α) Να συμπληρώσετε το πίνακα.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή τους.

γ) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 8 είναι 2,2.

[..-..)	x_i	f_i
0-...		0,09
...-...		0,18
...-...		0,36
...-...	7	0,27
...-...		0,10
Σύνολο		1

34. Από τις 20 τιμές ενός δείγματος οι πρώτες 12 έχουν μέση τιμή m_1 και οι υπόλοιπες έχουν

μέση τιμή m_2 . Αν \bar{x} είναι η μέση τιμή όλων των τιμών, να αποδείξετε ότι: $\bar{x} = \frac{3m_1 + 2m_2}{5}$.

35. Σε μια εταιρεία εργάζονται 200 υπάλληλοι. Η εταιρεία αποφάσισε να δώσει αύξηση 50€ στο μισθό μερικών υπαλλήλων της. Ο αρχικός μέσος μισθός όλων των υπαλλήλων είναι 950€, ενώ μετά την αύξηση είναι 960€.

α) Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που πήραν την αύξηση.

β) Στη συνέχεια λόγω οικονομικών προβλημάτων μείωσε το μισθό όλων των υπαλλήλων κατά 5%. Να βρείτε το νέο μέσο μισθό των υπαλλήλων.

(Απ α) 40, β) 912)

36. Σε μια εταιρεία κλωστοϋφαντουργίας επί δύο διαδοχικές χρονιές γίνεται μείωση στο μισθό των εργαζομένων κατά 15% και 10% αντίστοιχα. Την τρίτη χρονιά λόγω βελτίωσης της οικονομικής της κατάστασης αποφάσισε να δώσει αύξηση 182€ στους μισθούς όλων

των υπαλλήλων. Αν ο μέσος μισθός των εργαζομένων μετά την αύξηση είναι 1100€, να βρείτε τον μέσο μισθό των εργαζομένων πριν αρχίσουν οι αλλαγές.

(Απ 1200)

37. Εστω \bar{x} ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας. Ο εργοδότης τους κάνει αύξηση 3% και στη συνέχεια τους αυξάνει ξανά το μισθό τους κατά 40 ευρώ. Αν ο τελικός μέσος μισθός είναι 967€, να βρείτε το \bar{x} .

(Απ 900)

38. Στο τμήμα Α μιας εταιρείας εργάζονται 30 άτομα και στο τμήμα Β 20 άτομα. Ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων είναι 1050€, ενώ ο μέσος μισθός στο τμήμα Α είναι 1000€. Στους εργαζομένους του τμήματος Β δίνεται αύξηση 20€ στον καθένα, ενώ στους εργαζομένους του τμήματος Β έγινε αύξηση 5% στον καθένα.

α) Να βρείτε τον αρχικό μέσο μισθό των εργαζομένων του τμήματος Β.

β) Να βρείτε τον καινούργιο μέσο μισθό όλων των εργαζομένων.

(Απ α) 1125, β) 1088)

askisopolis

Διάμεσος δ

Διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

Άρα όταν το πλήθος n είναι περιττός αριθμός, ισχύει ότι:
και

$$\delta = X_{\frac{n+1}{2}}$$

όταν το πλήθος n είναι άρτιος αριθμός, τότε:

$$\delta = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Στη πράξη βοηθάει η κατασκευή πίνακα αθροιστικών αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και η εύρεση μέσω αυτού της μεσαίας ή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

ΔΙΑΜΕΣΟΣ	
Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
<ol style="list-style-type: none"> 1. Δεν επηρεάζετε από τις ακραίες τιμές. 2. Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων. 3. Χωρίζει κάθε διατεταγμένο δείγμα ακριβώς στη μέση. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Δεν χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της. 2. Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε τιμή της μεταβλητής ($n =$ άρτιος). 3. Δεν χρησιμοποιείται σε ποιοτικές μεταβλητές.

Λυμένες Ασκήσεις

40. Να βρείτε τη διάμεσο στις τιμές του διπλανού πίνακα.

Λύση

x_i	1	2	3	4	5
v_i	43	87	125	38	16

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων.

Επειδή το πλήθος των τιμών είναι $n = 309$, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή $\delta = X_{\frac{309+1}{2}} = X_{155}$.

Από το πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων παρατηρούμε ότι η 155 παρατήρηση αντιστοιχεί στη τιμή $x_3 = 3$, γιατί βρίσκεται μετά την 130 και πριν την 255 παρατήρηση, άρα $\delta = 3$.

x_i	v_i	N_i
1	43	43
2	87	130
3	125	255
4	38	293
5	16	309
Σύνολο	309	

41. Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές 2, 4, 6, 8, 10 με αντίστοιχες συχνότητες 50, 90, 70, 40, 30. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Λύση

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων.

Επειδή το πλήθος $n = 280$ είναι άρτιος αριθμός, η διάμεσος είναι το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων,

$$\text{δηλαδή } \delta = \frac{x_{140} + x_{141}}{2}.$$

Στον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων παρατηρούμε ότι η 140 παρατήρηση αντιστοιχεί στο $x_2 = 4$ και η 141 στο $x_3 = 6$,

$$\text{άρα } \delta = \frac{4+6}{2} = 5.$$

x_i	v_i	N_i
2	50	50
4	90	140
6	70	210
8	40	250
10	30	280
Σύνολο	280	

42. Να βρείτε τη διάμεσο στις τιμές του διπλανού πίνακα.

Λύση

x_i	1	2	3	4	5	6
$f_i\%$	10	28	5	17	25	15

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Γνωρίζουμε ότι το 50% των παρατηρήσεων βρίσκεται πριν τη διάμεσο και το άλλο 50% μετά τη διάμεσο. Επειδή το 50% είναι μετά το 43% και πριν το 60%, παρατηρούμε ότι αντιστοιχεί στη παρατήρηση $x_4 = 4$, άρα $\delta = 4$.

x_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	10	10
2	28	38
3	5	43
4	17	60
5	25	85
6	15	100
Σύνολο	100	

43. Τέσσερις αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ έχουν μέση τιμή 7,5. Η μέση τιμή των β, γ, δ είναι 9. Ο β είναι διπλάσιος του α και η διάμεσος των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι 6,5. Να βρείτε τους τέσσερις αριθμούς.

Λύση

$$\text{Είναι } \bar{x} = 7,5 \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4} = 7,5 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 30 \quad (1)$$

$$\text{Επειδή η μέση τιμή των } \beta, \gamma, \delta \text{ είναι 9, ισχύει ότι } \frac{\beta + \gamma + \delta}{3} = 9 \Leftrightarrow \beta + \gamma + \delta = 27 \quad (2)$$

Αφαιρώντας από την (1) τη (2), έχουμε $\alpha = 30 - 27 = 3$.

Επειδή ο β είναι διπλάσιος του α , είναι $\beta = 2\alpha = 6$.

Οι τέσσερις αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: 3, 6, γ , δ

Η διάμεσος τους είναι $\delta = \frac{6 + \gamma}{2}$. Όμως $\delta = 6,5$, άρα $\frac{6 + \gamma}{2} = 6,5 \Leftrightarrow 6 + \gamma = 13 \Leftrightarrow \gamma = 7$.

$$(2) \Rightarrow 6 + 7 + \delta = 27 \Leftrightarrow \delta = 14.$$

44. Εστω ότι οι τιμές 2, 3, 4, 7 μιας ποσοτικής μεταβλητής X έχουν αντίστοιχες σχετικές συχνότητες $f_1 = 0,2$, $f_2 = 0,3$, $f_3 = 0,4$ και $f_4 = 0,1$.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή τους.

β) Αν $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 540$, να βρείτε τις συχνότητες v_1, v_2, v_3, v_4 .

γ) Να βρείτε τη διάμεσο των τιμών.

Λύση

$$\alpha) \bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,1 = 3,6$$

$$\beta) \text{Είναι } \bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i \Leftrightarrow 3,6v = 540 \Leftrightarrow v = \frac{540}{3,6} = 150.$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{v_1}{150} \Leftrightarrow v_1 = 30, \quad f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{v_2}{150} \Leftrightarrow v_2 = 45,$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow 0,4 = \frac{v_3}{150} \Leftrightarrow v_3 = 60 \text{ και } f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{v_4}{150} \Leftrightarrow v_4 = 15$$

$$\gamma) \text{Επειδή το πλήθος } v = 150 \text{ είναι άρτιος αριθμός, ισχύει ότι: } \delta = \frac{x_{75} + x_{76}}{2}$$

Οι 30 πρώτες τιμές είναι 2, οι επόμενες 45 είναι 3, άρα $x_{75} = 3$. Οι επόμενες 60 τιμές

είναι 4, άρα $x_{76} = 4$, οπότε $\delta = \frac{3+4}{2} = 3,5$

45. Καταγράψαμε τον αριθμό των παιδιών σε κάθε μία από 36 οικογένειες και προέκυψε ο διπλανός πίνακας.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, αν $x \in (10,16)$.

β) Να βρείτε τα x, y αν γνωρίζετε ότι $\delta = 2,5$.

x_i	0	1	2	3	4
v_i	x	8	6	y	6

Λύση

α) Κατασκευάζουμε τον πίνακα αθροιστικών συχνοτήτων.

Επειδή $v = 36$, είναι $x + y + 20 = 36 \Leftrightarrow x + y = 16$ (1)

Επειδή το πλήθος είναι άρτιος αριθμός η διάμεσος θα είναι:

$$\delta = \frac{x_{18} + x_{19}}{2}.$$

Είναι $10 < x < 16 \Leftrightarrow 18 < x + 8 < 24$, άρα $x_{18} = x_{19} = 1$ και $\delta = 1$.

β) Επειδή $\delta = 2,5$, οι μισές παρατηρήσεις είναι πριν το 2,5 και οι άλλες μισές μετά το 2,5. Δηλαδή:

$$x + 14 = 18 \Leftrightarrow x = 4 \text{ και από την (1)} \Rightarrow y = 12 \text{ και } y + 6 = 18 \Leftrightarrow y = 12 \text{ που ισχύει.}$$

x_i	v_i	N_i
0	x	x
1	8	x+8
2	6	x+14
3	y	x+y+14
4	6	x+y+20
Σύνολο	x+y+20	

Διάμεσος σε ομαδοποιημένη κατανομή

Για την εύρεση της διαμέσου σε ομαδοποιημένες τιμές κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$ ή αθροιστικών συχνοτήτων N_i .

Από το σημείο του κατακόρυφου άξονα που αντιστοιχεί στο 50% ή στο $\frac{v}{2}$ φέρουμε

παράλληλη στον άξονα $x'x$ μέχρι να συναντήσει το πολύγωνο. Η προβολή του σημείου τομής στον άξονα $x'x$ είναι η διάμεσος των τιμών.

Ο υπολογισμός της διαμέσου γίνεται με τη βοήθεια των ομοίων τριγώνων που θα σχηματίζονται στο ιστόγραμμα.

46. Εστω ότι το βάρος 100 μαθητών έχει ομαδοποιηθεί και παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)
v_i	25	35	20	15	5

Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$, τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i\%$ και πινακοποιούμε τα δεδομένα.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

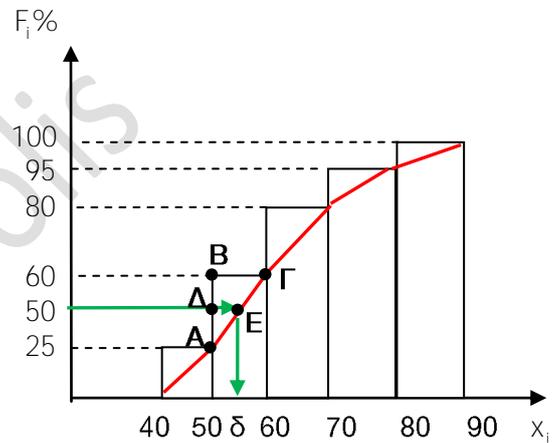
Κλάσεις	v_i	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[40,50)	25	0,25	25	25
[50,60)	35	0,35	35	60
[60,70)	20	0,20	20	80
[70,80)	15	0,15	15	95
[80,90)	5	0,05	5	100
Σύνολο	100	1	100	

Η διάμεσος δ είναι η τετμημένη του σημείου του πολυγώνου που αντιστοιχεί σε αθροιστική σχετική συχνότητα 50%.

Τα τρίγωνα $\Delta E \Gamma$ και $A B \Gamma$ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{50-25}{60-25} = \frac{\delta-50}{60-50} \Leftrightarrow \frac{25^5}{35^7} = \frac{\delta-50}{10} \Leftrightarrow$$

$$7\delta - 350 = 50 \Leftrightarrow 7\delta = 400 \Leftrightarrow \delta = \frac{400}{7} \approx 57,14$$

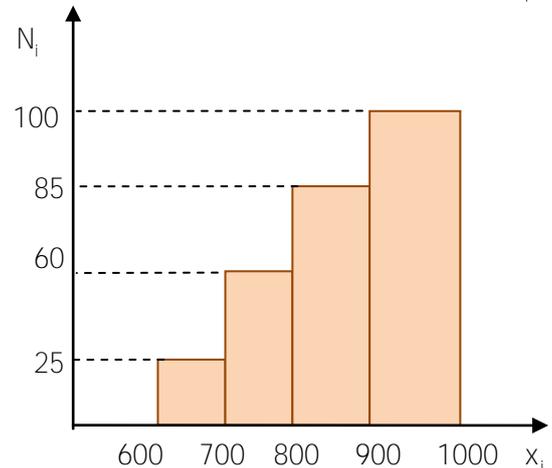


47. Δίνεται το διπλανό ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων που αναφέρεται στις μηνιαίες αποδοχές σε ευρώ των υπαλλήλων μιας εταιρείας.

α) Να κατασκευάσετε πίνακα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των τιμών.

γ) Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν μισθό από 780 έως 840 ευρώ.



Λύση

α) $v_1 = N_1 = 25$, $v_2 = N_2 - N_1 = 35$, $v_3 = N_3 - N_2 = 25$,
 $v_4 = N_4 - N_3 = 15$

$$x_1 = \frac{600+700}{2} = 650 \text{ και } \text{όμοια}$$

$$x_2 = 750, x_3 = 850 \text{ και } x_4 = 950.$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{25}{100} = 0,25,$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{35}{100} = 0,35,$$

Κλάσεις	x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[600,700)	650	25	25	0,25	25	0,25	25
[700,800)	750	35	60	0,35	35	0,60	60
[800,900)	850	25	85	0,25	25	0,85	85
[900,1000)	950	15	100	0,15	15	1	100
Σύνολο		100		1	100		

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{25}{100} = 0,25 \text{ και}$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{15}{100} = 0,15. F_1 = f_1 = 0,25, F_2 = F_1 + f_2 = 0,60, F_3 = F_2 + f_3 = 0,85 \text{ και}$$

$$F_4 = F_3 + f_4 = 1$$

β) $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 650 \cdot 0,25 + 750 \cdot 0,35 + 850 \cdot 0,25 + 950 \cdot 0,15 \Leftrightarrow$

$$\bar{x} = 780$$

Στο διπλανό ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{50-25}{60-25} = \frac{\delta-700}{800-700} \Leftrightarrow \frac{25^5}{35^7} = \frac{\delta-700}{100} \Leftrightarrow$$

$$7\delta - 4900 = 500 \Leftrightarrow 7\delta = 4950 \Leftrightarrow \delta = 707,14$$

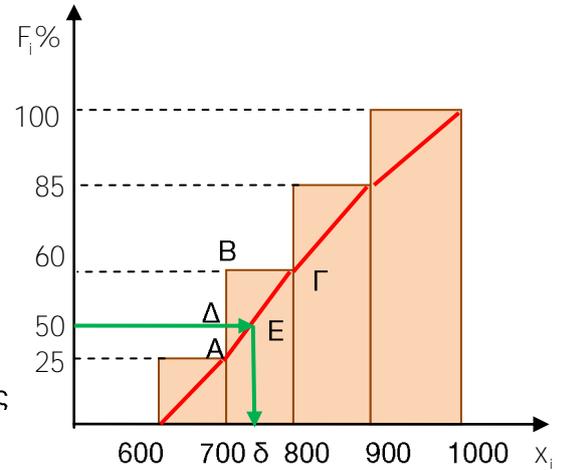
γ) Από 780 έως 800€ μισθό έχει το $\frac{800-780}{800-700} = \frac{1}{5}$ της κλάσης

$[700,800)$, δηλαδή $\frac{1}{5} \cdot 35 = 7$ υπάλληλοι.

Μισθό από 800-840€ έχει το $\frac{840-800}{900-800} = \frac{2}{5}$ της κλάσης $[800,900)$,

δηλαδή $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$ υπάλληλοι. Άρα ο αριθμό των υπαλλήλων που έχουν

μισθό από 780 έως 840 ευρώ είναι 17.



48. Στο διπλανό ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων η διάμεσος είναι 7.

α) Να υπολογίσετε την αθροιστική σχετική συχνότητα της κλάσης $[6,8)$.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος.

Λύση

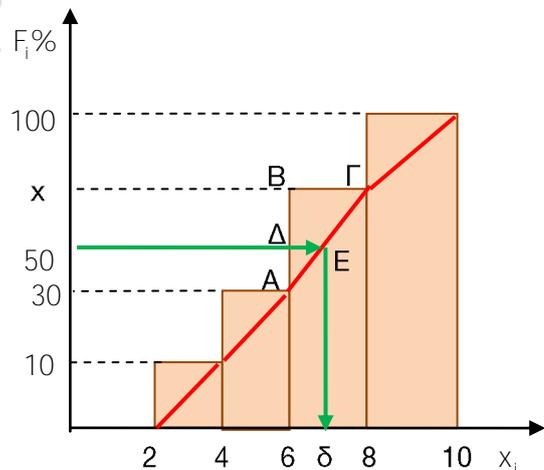
α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{50-30}{x-30} = \frac{7-6}{8-6} \Leftrightarrow \frac{20}{x-30} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x-30=40 \Leftrightarrow x=70, \text{ άρα } F_3\% = 70.$$

β) $\bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 3 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,20 + 7 \cdot 0,40 + 9 \cdot 0,30 \Leftrightarrow$

$$\bar{x} = 6,8$$



Κλάσεις	x_i	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$[2,4)$	3	0,10	10	10
$[4,6)$	5	0,20	20	30
$[6,8)$	7	0,40	40	70
$[8,10)$	9	0,30	30	100
Σύνολο		1	100	

Ασκήσεις

49. Να βρείτε τη διάμεσο στις τιμές του διπλανού πίνακα.

x_i	0	3	5	6	10
v_i	4	6	3	5	2

50. Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 7 με αντίστοιχες συχνότητες 5, 4, 7, 4, 6, 4.
Να βρείτε τη διάμεσο τους.

(Απ. 3)

51. Στο διπλανό πίνακα καταγράφεται ο αριθμός των παιδιών 400 οικογενειών.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

(Απ. γ) 0,945, 1)

Αριθμός παιδιών x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	$v_i x_i$
0	135			
1	220			
2	8			
3	15			
4	12			
5	10			
Σύνολο	400			

52. Στο διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή των μηνιαίων μισθών 200 υπαλλήλων μιας εταιρείας. Αν η διάμεσος των μισθών είναι 840 ευρώ, να βρείτε τις συχνότητες v_2, v_3 .

(Απ. 50, 70)

Μηνιαίος Μισθός	Υπάλληλοι v_i
[400–600)	20
[600–800)	
[800–1000)	
[1000–1200)	40
[1200–1400)	20

53. Ο διπλανός πίνακας δίνει τις εισπράξεις, σε δεκάδες χιλιάδες, που έγιναν από τους αντιπροσώπους μιας εταιρείας αυτοκινήτων κατά τη διάρκεια ενός μήνα.

α) Να κατασκευάσετε πίνακα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων,

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

(Απ. 5,68, 5,84)

Εισπράξεις	[1,3)	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)
Αντιπρόσωποι	14	6	12	10	8

54. Οι τιμές 1, 3, 5, 7 έχουν συχνότητες $x, 5, y, 15$ αντίστοιχα. Έστω ότι η μέση τιμή τους είναι 3,8 και το μέγεθος του δείγματος είναι 50.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 20$ και $y = 10$.

β) Να βρείτε τη διάμεσο τους.

(Απ. 4)

55. Δίνεται ο διπλανός πίνακας αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων v παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X . Αν $\delta = 7$ και $\bar{x} = 8,8$, τότε

α) να αποδείξετε ότι $x = 50, y = 75, z = 100$.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από 8.

x_i	2	4	6	8	10
$F_i\%$	10	25	x	y	z

56. Η βαθμολογία 75 μαθητών στα Μαθηματικά κυμαίνεται από 10 έως και 20. Από αυτούς 39 έχουν βαθμολογία κάτω από το 14, 15 έχουν βαθμό κάτω από 12, 9 μαθητές έχουν βαθμό πάνω από 18 και 21 πάνω από 16.

α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων.

β) Να υπολογίσετε τη μέση βαθμολογία αυτής της ομάδας μαθητών.

γ) Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών.

δ) Να βρείτε πάνω από ποιο βαθμό βρίσκεται το 20% των μαθητών.

(Απ. β) 14,36 γ) 13,875 δ) 17)

57. Να βρείτε τρεις παρατηρήσεις που έχουν εύρος 5, διάμεσο 10 και μέση τιμή 9.

58. Το μέσο βάρος ενός δείγματος 100 ανθρώπων είναι 80 κιλά. Αν κανένας από τους ανθρώπους αυτούς δεν ζυγίζει λιγότερο από 60 κιλά, να αποδείξετε ότι η διάμεσος των βαρών τους είναι το πολύ 100 κιλά.

59. Εστω ότι οι τιμές μιας μεταβλητής X είναι: $\lambda, 11, 12, 33-2\bar{x}, \bar{x}, 15, 13$, όπου \bar{x} η μέση τιμή τους, $\delta = 11$ η διάμεσός τους και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το λ και το \bar{x} .

(Απ. 4, 11)

60. Εστω ότι οι αριθμοί 1, 2, 2, 3, 4, 6, $\alpha, \beta, 12$ έχουν μέση τιμή 5 και διάμεσο 4. Να βρείτε τους θετικούς ακεραίους α, β αν γνωρίζετε ότι είναι μικρότεροι του 9.

(Απ. 7,8)

61. Δίνονται οι τιμές x_1, x_2, \dots, x_n , μιας μεταβλητής X , όπου ο n είναι φυσικός αριθμός και

πολλαπλάσιο του 6. Το $\frac{1}{3}$ των τιμών είναι 0, τα $\frac{3}{4}$ των υπόλοιπων είναι 1 και οι εναπομείναντες είναι 2.

α) Να αποδείξετε ότι $\delta = 1$ και $\bar{x} = \frac{5}{6}$.

β) Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι αριθμός του διαστήματος $(470, 490)$, να βρείτε πόσες παρατηρήσεις ίσες με 2 πρέπει να συμπληρώσουμε στο προηγούμενο δείγμα τιμών, έτσι ώστε η μέση τιμή του συνολικού δείγματος να είναι 1.

(Απ. β) 40)

62. Οι βαθμοί n μαθητών μιας πόλης στο μάθημα Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και έχει προκύψει το διπλανό πολύγωνο συχνοτήτων.

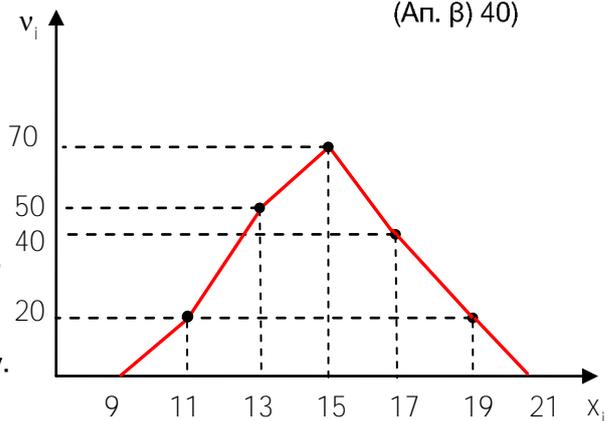
α) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

β) Να βρείτε το πλήθος των μαθητών.

γ) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων απόλυτων και αθροιστικών.

δ) Να βρείτε τη μέση βαθμολογία.

ε) Να βρείτε τη διάμεσο.



63. Δίνεται ο διπλανός πίνακας σχετικών συχνοτήτων n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X .

α) Να συμπληρώσετε το πίνακα.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή τους.

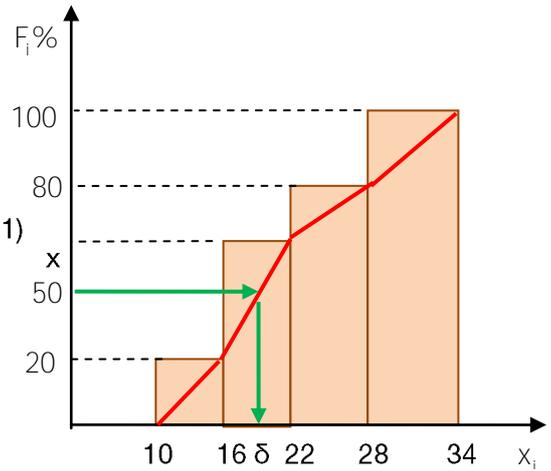
γ) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των

παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 8 είναι 2,2.

[...-...)	x_i	f_i
0-...		0,09
...-...		0,18
...-...		0,36
...-...	7	0,27
...-...		0,10
Σύνολο		1

64. Στο διπλανό πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων η διάμεσος είναι $\delta = 20$.
- α) Να υπολογίσετε την αθροιστική σχετική συχνότητα της κλάσης $[16, 22)$.
- β) Να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος.

(Απ. α) 65 β) 21,1)



65. Εστω ότι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.
- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
- β) Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που δεν είναι μικρότερες από το 15.
- γ) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων.
- δ) Να βρείτε πόσο πρέπει να αυξηθούν όλες οι παρατηρήσεις ώστε το νέο δείγμα τιμών να έχει μέση τιμή 10.

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	Αθροιστική Σχ.συχνότητα $F_i\%$
[.....)	2	20
[.....)		45
[.....)	10	71
[.....)		83
[.....)		100

Στέλιος Μιχαήλογλου