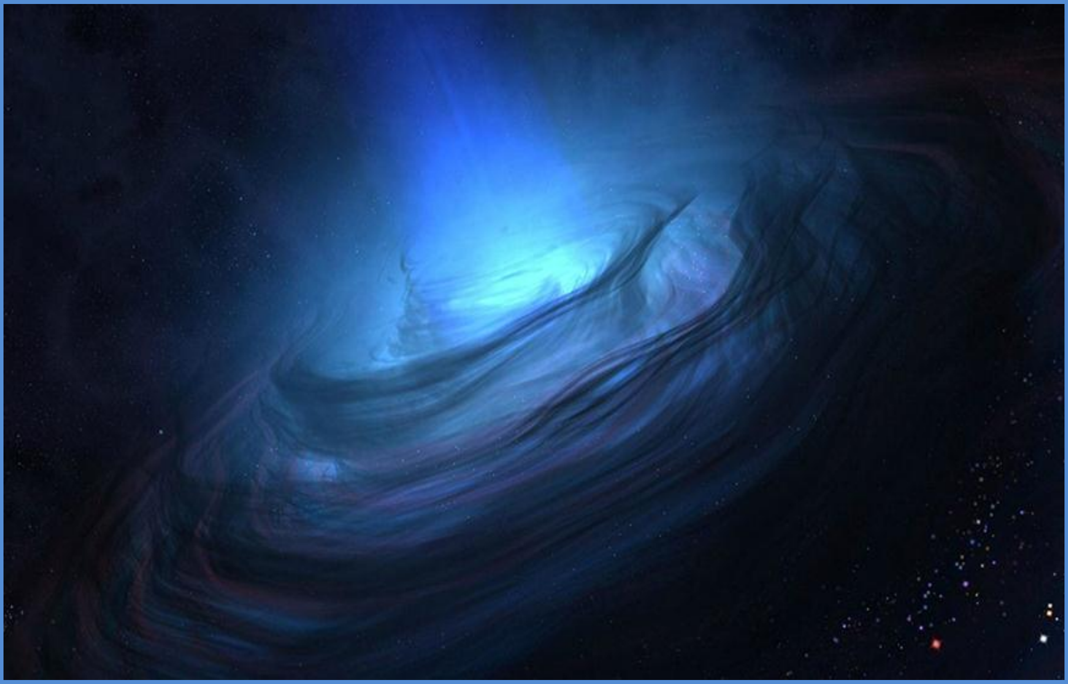
Άλγεβρα Β΄ Λυκείου



14ο Λύκειο Περιστερίου

Σχολικό έτος 2021-22

Το βιβλίο αυτό δημιουργήθηκε για να χρησιμοποιηθεί
συμπληρωματικά στο σχολικό βιβλίο.

Σ. Μιχαήλογλου
Α. Μπλιάς
Δ. Πατσιμάς

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Γραμμικές Εξισώσεις

Κάθε εξίσωση 1ου βαθμού με 2 αγνώστους ονομάζεται γραμμική.
Η γενική της μορφή είναι $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\alpha \neq 0$ ***ή*** $\beta \neq 0$ ***και παριστάνει μια ευθεία γραμμή.***

Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $\alpha x+\beta y=\gamma$ ***και*** $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ ***και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα 2 x 2 και γράφουμε*** $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$.

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται λύση του συστήματος.

Επίλυση Γραμμικού Συστήματος 2x2

Γραφική επίλυση

Σχεδιάζουμε τις ευθείες που αντιπροσωπεύουν οι εξισώσεις του συστήματος. Αν:

-οι δύο ευθείες τέμνονται, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)***,που είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών.***

-οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, αφού δεν υπάρχει κοινό σημείο του οποίου οι συντεταγμένες να είναι λύση του συστήματος.

-οι ευθείες ταυτίζονται, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, αφού υπάρχουν άπειρα κοινά σημεία στις δύο ευθείες.

Μέθοδος της Αντικατάστασης

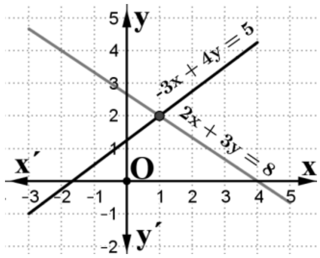
Λύνουμε μία από τις 2 εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο. Την λύνουμε και τη λύση την αντικαθιστούμε στην 1η εξίσωση.

Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο εξισώσεις με κατάλληλο αριθμό, ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές σε κάποιον άγνωστο. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις 2 εξισώσεις κατά μέλη και προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο.

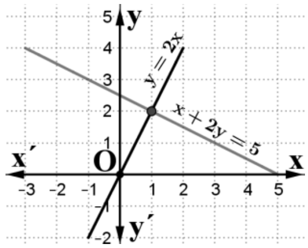
Ασκήσεις

1. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} -3x+4y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$:



α) με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος
β) αλγεβρικά.

2. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x+2y=5 \\ y=2x \end{cases}$:



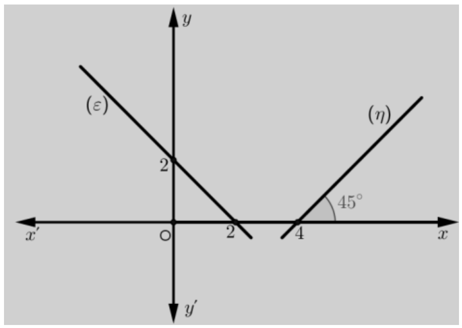
α) με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος
β) αλγεβρικά.

3. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση: $3x-4y=5$.
α) Να γραφεί η εξίσωση ευθείας $ε_2$ που ταυτίζεται με την ε.
β) Να γραφεί η εξίσωση ευθείας $ε_1$ παράλληλης προς την ε. (τράπεζα θεμάτων)

4. **α)** Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.
β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (τράπεζα θεμάτων)

5. Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)
α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).
β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. τράπεζα θεμάτων)

6. α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.
(τράπεζα θεμάτων)

7. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=8 \\ ax+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους α , β , $\gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος (2, -3).

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους *α, β, γ* ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο. (τράπεζα θεμάτων)

8. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \mathrm{x}-2\mathrm{y}=9 \\ \alpha\mathrm{x}+\beta\mathrm{y}=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους α, β, γ $\in \Re$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος (1, -4).

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

(τράπεζα θεμάτων)

9. Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{matrix} 2x+y=3 \\ ax+\beta y=\gamma \end{matrix}\right\}$ με παραμέτρους α, β,γ $\in \Re$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους *α, β, γ,* ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος (-1, 5).

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους *α, β, γ,* ώστε το σύστημα αυτό να έχει άπειρες λύσεις και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

(τράπεζα θεμάτων)

10. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} (\lambda+1)\cdot \mathrm{x}+2y=3 \\ 4x+(\lambda-1)y=-6 \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν λ = -3, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.

β) Αν λ = 3, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) Αν λ = 0, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε. (τράπεζα θεμάτων)

11.Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x-y=-1 \Leftrightarrow y=2x+1$ και

$(\varepsilon_2): (\lambda-1)x-y=6 \Leftrightarrow y=(\lambda-1)x-6$, με παράμετρο $\lambda \in R$

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες.

β) Να παραστήσετε γραφικά τις ε_1 και ε_2, για λ= 3.

γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda \in R$, ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να ταυτίζονται;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (τράπεζα θεμάτων)

12. Δίνονται οι ευθείες: ε_1: $2x + y = 6$ και ε_2: $x - 2y = -3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο *Μ*.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η ευθεία $3x + \alpha y = \alpha + 5$ διέρχεται από το Μ.

(τράπεζα θεμάτων)

13. Δίνονται οι ευθείες ε_1 : $2x + y = 5$, ε_2: $-2x + 3y = -9$ και ε_3 : $3x + 2y = 7$.

α) **i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_2.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_3.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ε_2 και ε_3 είναι σημείο της ε_1 . (τράπεζα θεμάτων)

14. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -21 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3x - 5 = 2(y+1) - 8 \\ 2(x-1) = 3(1-2y) + 9 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1 \\ 3x = 2(y+3) \end{cases}$

15. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x + 9y = 4 \\ 6x + 27y = 16 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3y - 12x = -15 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 14x + 7y = 7 \end{cases}$

16. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{7} \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{x-3}{5} + \dfrac{2y+4}{7} = 5 \end{cases}$

17. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2\alpha+1}{3} - \dfrac{\beta+6}{4} = \alpha - \beta \\ \dfrac{\beta-4}{2} - \dfrac{3\alpha+4}{7} = -1 - \alpha \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{\beta+\alpha}{12} - 3 = \dfrac{10+\alpha}{3} - \beta \\ \dfrac{-\beta+12}{5} + \dfrac{\alpha+5}{10} = 2 \end{cases}$

18. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 2|x| - 3|y| = 2 \\ |x| + 2|y| = 8 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7 \end{cases}$

19. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2}{\omega} + \dfrac{9}{\varphi} = 4 \\ \dfrac{4}{\omega} + \dfrac{3}{\varphi} = 3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{y}} = 0 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{4}{\sqrt{y}} = 7 \end{cases}$

20. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α,β, αν γνωρίζετε ότι τα ζεύγη (1,1) και (- 1, 5) είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x+\beta y-9=0$.

21. Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών *27* χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι *5* χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.(τράπεζα θεμάτων)

22. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος x cm, πλάτος y cm, περίμετρο ίση με 38 cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:
Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x, y του ορθογωνίου.(τράπεζα θεμάτων)

23. Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

24. Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα; (τράπεζα θεμάτων)

25. Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;

26. Διαθέτουμε 200 χαρτονομίσματα των 5 και 20 ευρώ συνολικής αξίας 1750 ευρώ. Να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 5 ευρώ και πόσα των 20 ευρώ έχουμε ;

27. Σε μια κάλπη βρίσκονται 100 ψηφοδέλτια δύο συνδικαλιστικών φορέων Α και Β. Αν προστεθούν στην κάλπη 3 ψηφοδέλτια του Α συνδικαλιστικού φορέα και 2 του Β συνδικαλιστικού φορέα τότε τα ψηφοδέλτια του Α θα είναι διπλάσια των ψηφοδελτίων του Β. Πόσα ψηφοδέλτια κάθε συνδικαλιστικού φορέα υπήρχαν αρχικά στην κάλπη;

28.Ένας παππούς μοιράζει ένα ποσό στα δύο εγγόνια του ηλικίας 3 και 7 ετών ανάλογα με την ηλικία τους . Να βρείτε τα ποσά που πήραν τα εγγόνια :

α) Αν το ποσό που μοίρασε είναι 1000€

β) Αν το ποσό που πήρε το εγγόνι με την μεγαλύτερη ηλικία είναι διπλάσιο του ποσού που πήρε το άλλο εγγόνι αυξημένο κατά 100 € .

29.Να βρείτε κλάσμα τέτοια ώστε αν στους δύο όρους του προσθέσουμε το 2 προκύπτει ο αριθμός 2 ενώ αν από τους όρους του αφαιρέσουμε 3 προκύπτει ο αριθμός 3.

30.Να βρείτε κλάσμα τέτοια ώστε αν στους δύο όρους του προσθέσουμε το 2 προκύπτει ο αριθμός 2 ενώ αν από τους όρους του αφαιρέσουμε 3 προκύπτει ο αριθμός 3.

31.Η Άλκηστη και η Ελένη αγαπούν την πεζοπορία και βρίσκονται το καλοκαίρι στην Αμοργό. Αποφασίζουν να περπατήσουν ένα μονοπάτι περίπου 16 χιλιομέτρων που συνδέει τη Χώρα με τον όρμο της Αιγιάλης.

Η Άλκηστη ανηφορίζει το μονοπάτι από την Αιγιάλη για να συναντήσει την Ελένη που μένει στη Χώρα. Υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 2,4 χιλιόμετρα την ώρα.

Την ίδια στιγμή, όμως, ξεκινά η Ελένη να κατηφορίζει το ίδιο μονοπάτι και υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 4 χιλιόμετρα την ώρα. Μια δεδομένη χρονική στιγμή σε κάποιο σημείο της διαδρομής συναντά την Άλκηστη.

α) Αν t είναι ο χρόνος που περπάτησαν μέχρι να συναντηθούν και s η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Αιγιάλη, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους το t και το s , το οποίο να περιγράφει την παραπάνω κατάσταση.

β) Σε πόση απόσταση από τη Χώρα και ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν οι δυο κοπέλες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(τράπεζα θεμάτων)

Λύση γραμμικού συστήματος 2x2 με ορίζουσες

Έστω το γραμμικό σύστημα 2x2: $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$.

Ορίζουσα D του συστήματος ονομάζεται η παράσταση $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\cdot\beta' - \alpha'\cdot\beta$

Την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του x θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με: $D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\cdot\beta' - \gamma'\cdot\beta$.

Ομοίως, την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με:

$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\cdot\gamma' - \alpha'\cdot\gamma$.

- Αν $D\neq 0$***, το σύστημα έχει μοναδική λύση*** (x,y)***, όπου*** $x=\dfrac{D_x}{D}$ ***και*** $y=\dfrac{D_y}{D}$

- Αν $D=0$***, το σύστημα θα είναι αδύνατο ή θα έχει άπειρες λύσεις.***

Ασκήσεις

32. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} (\sqrt{5}-1)x+4y=4(\sqrt{5}+1) \\ x+(\sqrt{5}+1)y=6+2\sqrt{5} \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} (2+\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})y=1 \\ \sqrt{3}x+(7\sqrt{3}-12)y=3\sqrt{3} \end{cases}$

33. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} \lambda x+y=2 \\ \lambda x+\lambda y=\lambda+1 \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για τις ορίζουσες D , D_x ,D_y του συστήματος ισχύουν $D=\lambda(\lambda-1)$, $D_x=\lambda-1$ και $D_y=\lambda(\lambda-1)$

β) Αν είναι $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, τότε να λύσετε το σύστημα. (τράπεζα θεμάτων)

34. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ :

α) $\begin{cases} \lambda x-y=1 \\ 10x-2y=\lambda-1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \lambda x+y=\lambda \\ x+y=2\lambda-1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \alpha x+2y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+\lambda^2 y=1-\lambda \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} x+(5\lambda-4)y=\lambda \\ (2\lambda+1)x+(\lambda-4)y=2\lambda \end{cases}$

35. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ, να βρείτε τα κοινά σημεία των ευθειών:

α) $\varepsilon_1:\lambda x+2y=\lambda+2$ και $\varepsilon_2:(2\lambda-1)x+(\lambda+1)y=2(\lambda+1)$

β) $\varepsilon_1:(\lambda+2)x+4y=8-3\lambda$ και $\varepsilon_2:2x+(\lambda+4)y=8$.

36. Αν το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-1)x+y=2 \\ 3x+(\lambda+1)y=4\lambda-2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+(2\lambda+1)y=3 \\ 2x-(1-3\lambda)y=\lambda \end{cases}$ είναι αδύνατο.

37. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους τα συστήματα $\Sigma_1 : \begin{cases} (\alpha-6)\ x-\beta y=2 \\ \alpha x+y=0 \end{cases}$ και $\Sigma_2 : \begin{cases} x+3y=1 \\ -x+\alpha y=2 \end{cases}$ είναι συγχρόνως αδύνατα.

38. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x-3y=11-\lambda \\ x+5y-\lambda=7 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ.
β) Να βρείτε τη μοναδική λύση .
γ) Για ποια τιμή του λ η λύση (x, y) που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη σχέση: $x+y=\frac{59}{13}$.

39. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $\begin{cases} D_x+D_y=D \\ D_x-D_y=3D \end{cases}$. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.

40. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $D_x^2+D_y^2=2D_xD_y$ και $D\neq 0$. Αν $x+y=6$, να βρεθούν τα x, y.

41. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y, για τις ορίζουσες του $D,\ D_x,\ D_y$ ισχύει η σχέση: $2D_x^2-2D_xD_y+D_y^2=0$. Να βρείτε τη λύση του συστήματος, αν γνωρίζετε ότι είναι μοναδική.

42. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $D^2+D_x^2+D_y^2=4D+2D_x-5$

α) Να αποδείξετε ότι: $(D-2)^2+(D_x-1)^2+D_y^2=0.$
β) Να βρείτε τη λύση του συστήματος.

43. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x+(\lambda+2)y=3$, $(\lambda-2)x+5y=3$ αντίστοιχα και $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x+2y=3$.(τράπεζα θεμάτων)

44.Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}(\alpha-1)x+3y=3\\ x+(\alpha+1)y=3\end{cases}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) , τότε $x_0 = y_0$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.

ii. δεν έχει λύση.

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για α = 3 , α = 2 , α = -2.

(τράπεζα θεμάτων)

45.Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}2x-4y=1-\lambda\\ x+6y=\lambda+2\end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

β) Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ.

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, για την οποία οι ευθείες: $2x-4y=1-\lambda$, $x+6y=\lambda+2$ και $16x+16y=19$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(τράπεζα θεμάτων)

46.Δίνονται οι ευθείες ε_1: $\lambda x + y = 1$ και ε_2: $x + \lambda y = \lambda^2$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του λ.

β) Για ποια τιμή του λ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες;

γ) Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3$ και $2x + 2\lambda y = \lambda^2-1$ είναι παράλληλες.

(τράπεζα θεμάτων)

Γραμμικό σύστημα 3x3

Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους x,y,z

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

και θέλουμε να βρούμε τις κοινές τους λύσεις τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα 3x3.
Η πιο συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης ενός τέτοιου συστήματος είναι η μέθοδος αντικατάστασης.
Λύνουμε τη μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στις δύο άλλες εξισώσεις. Έτσι οι δύο τελευταίες εξισώσεις μετατρέπονται σε γραμμικό σύστημα 2x2, το οποίο το λύνουμε με έναν από τους προηγούμενους τρόπους. Αφού προσδιορίσουμε τους δύο αγνώστους αντικαθιστούμε τις τιμές τους στην πρώτη εξίσωση απ' όπου υπολογίζουμε την τιμή και του τρίτου αγνώστου.

Ασκήσεις

47.Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ 2x + y - \omega = 6 \\ x - y + 2\omega = -5 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x - y - \omega = -1 \\ x + 2y - \omega = 8 \\ 3x - y + 2\omega = 3 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x + y + \omega = 1 \\ 4x - y + \omega = -5 \\ -x + y + 2\omega = 5 \end{cases}$

48.Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y + \omega = 0 \\ 2x + y - \omega = 0 \\ x - y + 2\omega = 0 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x - y - 3\omega = 0 \\ x + 2y - 4\omega = 0 \\ 8x - 4y - 12\omega = 0 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 2x + y + \omega = 0 \\ 4x - y + \omega = 0 \\ -x + y + 2\omega = 0 \end{cases}$

49.Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 6 \\ y + \omega = -4 \\ \omega + x = 18 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\omega} = 0 \\ \dfrac{1}{\omega} + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y} - \dfrac{4}{\omega} = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\omega} = 4 \\ \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{\omega} = -2 \end{cases}$

50. Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω: Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους.

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.(τράπεζα θεμάτων)

51. Κάποιος μοιράζει με διαθήκη ένα ποσό σε τρεις ανιψιούς του Α, Β, Γ άνισα, ανάλογα προς τους αριθμούς 7, 6 και 5. Στη συνέχεια, με μια δεύτερη διαθήκη, αλλάζει τα μερίδια και διανέμει το ποσό ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5 και 4.

α) Ποιος από τους κληρονόμους κερδίζει με τη νέα μοιρασιά; Ποιος χάνει;

β) Ένας από τους κληρονόμους κερδίζει με τη δεύτερη μοιρασιά 6.000€ περισσότερο απ' ότι κερδίζει με την πρώτη. Πόση ήταν η κληρονομιά και πόσο κάθε μερίδιο με τη δεύτερη μοιρασιά;

52. Να βρείτε τριψήφιο φυσικό αριθμό αν:

α) το άθροισμα των ψηφίων του είναι 24.

β) ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του.

γ) ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μη γραμμικά συστήματα λέγονται τα συστήματα στα οποία μία ή παραπάνω εξισώσεις δεν είναι γραμμικές.
Οι λύσεις ενός μη γραμμικού συστήματος μπορεί να είναι παραπάνω από μία.

Επίλυση μη Γραμμικού Συστήματος

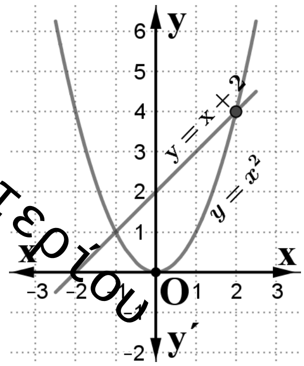
Γραφική επίλυση

Σχεδιάζουμε τις γραμμές που αντιπροσωπεύουν οι εξισώσεις του συστήματος. Αν: οι γραμμές τέμνονται, τότε το σύστημα έχει λύσεις τα σημεία τομής

Μέθοδος της Αντικατάστασης

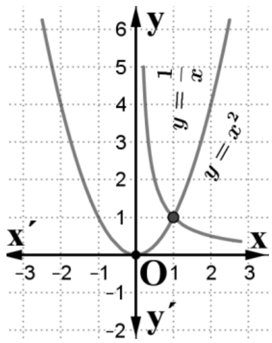
Λύνουμε τη γραμμική εξίσωση (αν υπάρχει) ως προς ένα άγνωστο και αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην 2η εξίσωση. Έτσι προκύπτει μία εξίσωση με ένα μόνον άγνωστο. Την λύνουμε και τη λύση (τις λύσεις) την αντικαθιστούμε στην 1η εξίσωση.

Ασκήσεις



53. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$:

α) με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος
β) αλγεβρικά.



54. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$;

α) με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος
β) αλγεβρικά.

55.α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα: $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α). (τράπεζα θεμάτων)

56. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να τα ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

α) $\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ 6x - y = 4 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 42 \\ x^2 - y^2 + x - y = 18 \end{cases}$

57. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + xy = 60 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 16 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 2xy \end{cases}$ **ε)** $\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ 6x - y = 4 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$

ζ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y = 8 \end{cases}$

58. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3x + y = 11 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y^2 + xy = 10 \\ 5x + y = 17 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

59. Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} y^2 - x^2 = 3 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ y^2 + xy = 24 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 12 \\ xy - 2(x + y) = -4 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + xy^2 + yx^2 + y^3 = 15 \end{cases}$ **στ)** $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -4 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

60.α) Να λύσετε το σύστημα (Σ_1) : $\begin{Bmatrix} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{Bmatrix}$

β) Είναι οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του (Σ_2) : $\begin{Bmatrix} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{Bmatrix}$;

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

γ) Είναι οι λύσεις του συστήματος (Σ_2) λύσεις και του (Σ_1);

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (τράπεζα θεμάτων)

61. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

α) $\begin{cases} x+y+x\cdot y=23 \\ xy\left(x+y\right)=120 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} xy=2 \\ y\omega=8 \\ x\omega=4 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2} \\ x+y=3 \end{cases}$

62. Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x-2$ και η παραβολή $y=2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή:
α) ένα κοινό σημείο **β)** δύο κοινά σημεία **γ)** κανένα κοινό σημείο.

63. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες η ευθεία $y=\lambda x+3$ εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2=4$;

64. Να βρείτε τις διαστάσεις ορθογωνίου που έχει περίμετρο 14m και εμβαδόν 10m.

65. Να βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με τη βάση ισοσκελούς τριγώνου ,αν γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο έχει περίμετρο ίση με 10 m και το γινόμενο δύο άνισων πλευρών του είναι ίσο με 12m.

66. Δίνεται η ευθεία $y=\lambda x-2$ και η παραβολή $y=2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή:
α) ένα κοινό σημείο **β)** δύο κοινά σημεία **γ)** κανένα κοινό σημείο.

67. Δύο πραγματικοί αριθμοί α,β έχουν διαφορά 10 και η διαφορά των τετραγώνων τους είναι 200 .Να υπολογίσετε το άθροισμα τους καθώς και τους αριθμούς αυτούς.

68. Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.
1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.
β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(τράπεζα θεμάτων)

69. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

α) Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

(τράπεζα θεμάτων)

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

70. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x+y=2\mu \\ (\mu+1)x+(\mu-1)y=2(\mu^2-1) \end{cases}$,όπου $\mu\in\mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση .

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0) .

γ) Να προσδιορίσετε το $\mu\in\mathbb{R}^*$ ώστε η παράσταση $\Pi = {x_0}^2 + {y_0}^2$ να γίνει ελάχιστη

71. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-1)x+\lambda y=-2 \\ \lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-1 \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει ορίζουσα D.

Επίσης η εξίσωση $\alpha^2-(D+5)\alpha+4(D+1)=0, \alpha\in\mathbb{R}$ έχει μία διπλή ρίζα.

α) Να βρείτε την ορίζουσα D και τη διπλή ρίζα της εξίσωσης

β) Να λύσετε το σύστημα

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(1)=0,\ f(-1)=10$ και $f(2)=1$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α,β,γ.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+f(x-1)\le 7$

73. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} 2x+y=-7 \\ 7x+2y=-11 \end{cases}$

α) Να βρείτε τη λύση (x_0, y_0) του συστήματος

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ έχει κορυφή το σημείο $K(x_0, y_0)$.

i) να βρείτε τους αριθμούς β και γ.

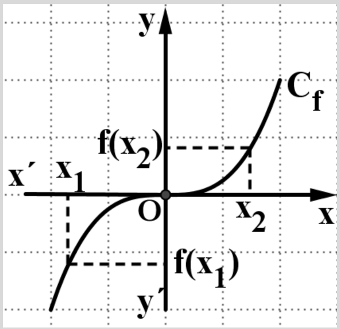
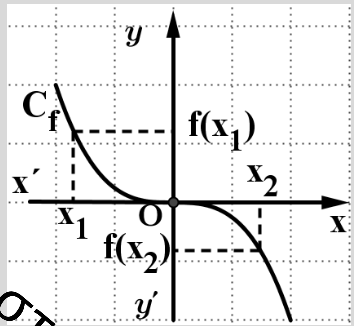
ii) να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

iii) να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y=f(x) \\ x+y=-6 \end{cases}$.

74.Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλεψε νωρίτερα;

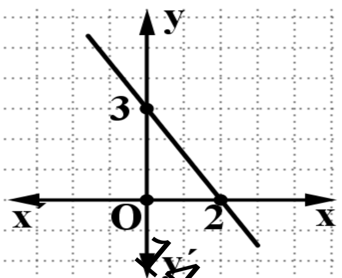
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Μονοτονία

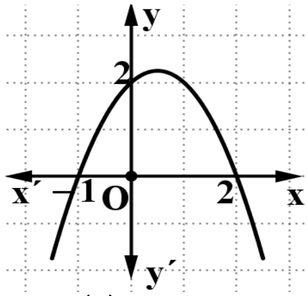
<table>
<tr>
<td>Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ΄ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι
$f(x_1) < f(x_2)$
Συμβολισμός: Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, γράφουμε:
f ↗ στο Δ.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ΄ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι
$f(x_1) > f(x_2)$
Συμβολισμός: Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, γράφουμε:
f ↘ στο Δ.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Ασκήσεις

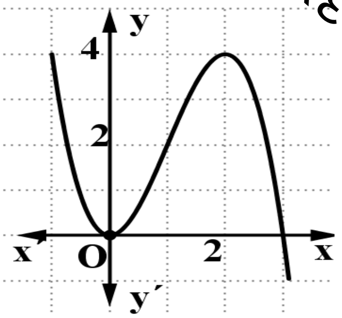
1. Με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων να γράψετε τα διαστήματα στα οποία κάθε συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα ή σταθερή.



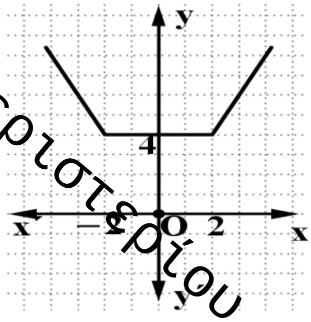
$\mathbf{f(x) = -\frac{3}{2}x + 3}$



$\mathbf{g(x) = -x^2 + x + 2}$



$\mathbf{h(x) = -x^3 + 3x^2}$



$\mathbf{t(x) = |x-2| + |x+2|}$

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = -x + 4$ **β)** $f(x) = 6x - 38$ **γ)** $f(x) = \sqrt{3-x}$

δ) $f(x) = 3 - 2\sqrt{x+1}$ **ε)** $f(x) = \frac{3}{x}$ **στ)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+9} & , x \le 0 \\ -2x+8 & , x > 0 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-4)$ και $f(1)$.

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

4. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το R 0<α<β να διατάξετε από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη τις τιμές:
$\mathrm{f}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right),\ \mathrm{f}(\alpha),\mathrm{f}(\beta),\mathrm{f}(0),\mathrm{f}(\alpha-\beta),\ \mathrm{f}\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)$

5. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
α) $f(3x+2)<f(x-4)$ **β)** $f(x-1)>f(3)$ **γ)** $f(x-2)-f(2x-3)<0$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3+x-5,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x-3)>0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=8-x^3$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)-8)<8$

8. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(5,2)$ και $\mathrm{B}(4,9)$.
α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3\mathrm{x})<2$.

(τράπεζα θεμάτων)

9. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση f: $\Re\to\Re$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία Α(2,3) και Β (4,5).
α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f.
β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο -2, να δείξετε ότι $f(0)>0$.

τράπεζα θεμάτων)

10. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R. Αν $f\left(\dfrac{1}{3}\right)>f\left(\dfrac{2}{5}\right)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο Α(1, 4) να λύσετε την ανίσωση $f(|3x-1|)\le 4$

11. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x+3)=x-1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2)\le 0$.

12. Η γραφική παράσταση της γνησίως μονότονης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,3)$ και $\mathrm{B}(2,1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

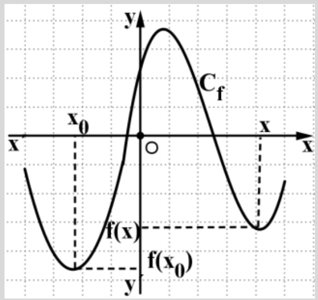
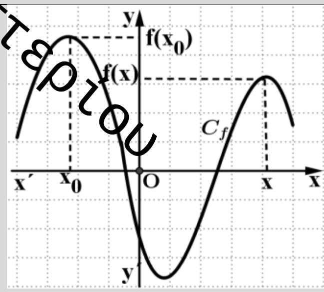
β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\left(x^4-4x^2+4\right)-1\right)\le 3$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(|3x-6|\right)\le f\left(|3x|\right)$.

13. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο R να λύσετε τις εξισώσεις.

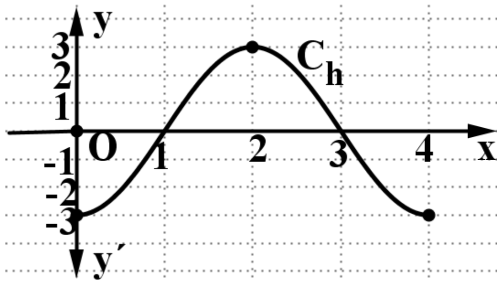
α) $f\left(x^2\right)=f\left(4x-4\right)$ **β)** $f\left(|2x-5|\right)=f\left(3\right)$

Ακρότατα

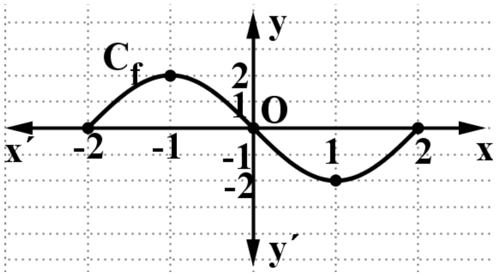
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0\in A$, όταν: $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x\in A$ ***Το x_0 λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο της f και το συμβολίζουμε με min $f(x)$.***	
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in A$, όταν: $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$ ***Το x_0 λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με max $f(x)$.***	

Ασκήσεις

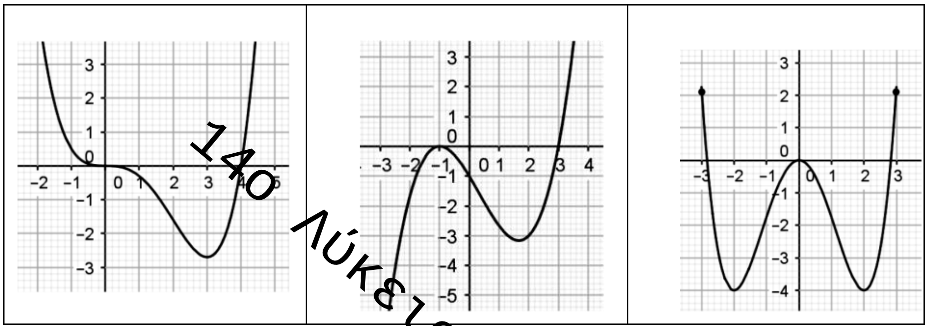
14. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης h του διπλανού σχήματος.



15. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



16. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f στα παρακάτω σχήματα:



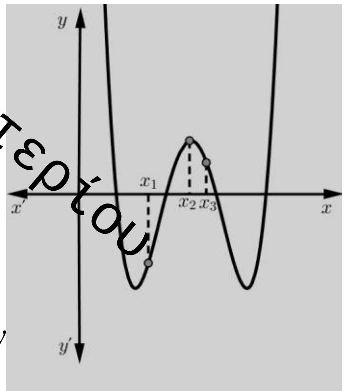
17. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1)$, $f(x_2)$ και $f(x_3)$

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(τράπεζα θεμάτων



18. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+4$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(3)=-5$.

β) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=2$

19. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x^2+2$ **β)** $f(x)=4(x-1)^2-3$ **γ)** $f(x)=x^{2014}+(x^2-x)^2+1$

20. Αν η συνάρτηση $f(x)=3x-1$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[2,5]$, να βρείτε τα ακρότατα της.

21. Αν η συνάρτηση $f(x)=-x+\lambda$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[1,4]$, να βρείτε τα ακρότατα της, αν γνωρίζετε ότι το μέγιστο είναι μεγαλύτερο κατά 5 από το ελάχιστο.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{4}{x^2+2}$ και $g(x)=x^{20}+2$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστο και η g ελάχιστο.

β) Να λύσετε την εξίσωση $4=\left(x^2+2\right)\left(x^{20}+2\right)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|+|x+1|+2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\geq 2$

β) Αληθεύει ότι η f έχει ελάχιστο το 2 ;

Άρτιες -περιττές συναρτήσεις

-Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α θα λέγεται άρτια, όταν για κάθε $\mathbf{x\in A}$ ισχύει: $\mathbf{-x\in A}$ και $\mathbf{f(-x)=f(x)}$

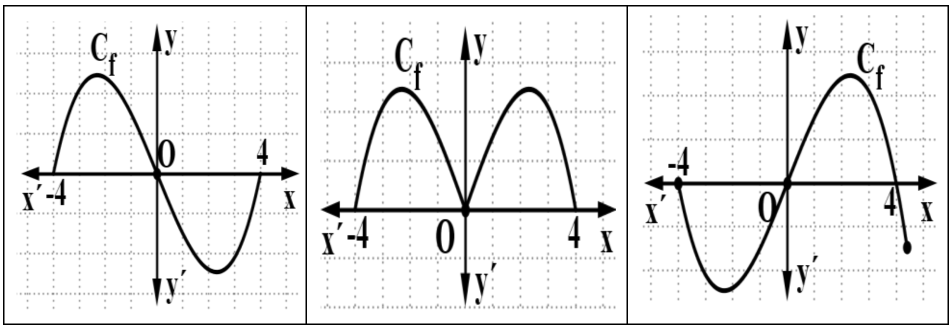
Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

-Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε $\mathbf{x\in A}$ ισχύει: $\mathbf{-x\in A}$ και $\mathbf{f(-x)=-f(x)}$

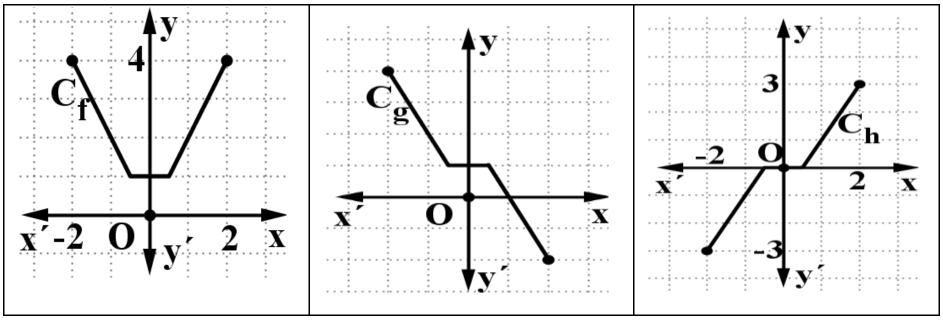
Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

Ασκήσεις

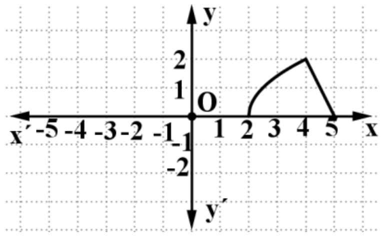
24. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συναρτήσης



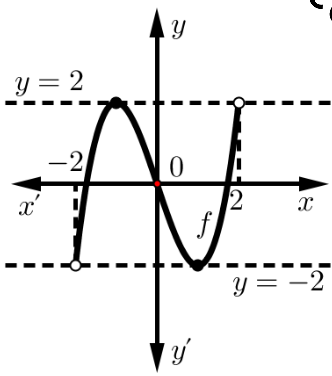
25. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης



26. Να συμπληρώσετε την διπλανή γραμμή ώστε να παριστάνει γραφική παράσταση:
α) άρτιας συνάρτησης
β) περιττής συνάρτησης



27. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράστασης της συνάρτησης
$f(x) = x^3 - 3x, x \in (-2, 2)$



α) Είναι η f άρτια ή περιττή; Να αποδείξετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας.
β) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
γ) Να βρείτε τις θέσεις των ακρότατων της f .

(τράπεζα θεμάτων)

28. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ **β)** $g(x) = x^5 - 2x^3 + 4x$ **γ)** $h(x) = \frac{x^2}{|x| - 1}$

δ) $t(x)=\dfrac{3x}{x-5}$ **ε)** $\varphi(x)=x^4-5x^3+x-4$ **στ)** $\sigma(x)=\sqrt{9-x^2}$

29. Να εξετάσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας τον y΄y και ποιες κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$:

α) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ **β)** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **γ)** $f(x)=x^2|x|$

30. Τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης. Να συμπληρώσετε τους αριθμούς που λείπουν:

(-1, 2) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (…, 2) (…, 4) (3, …) (-3, 18) $(\sqrt{2}, 4)$ $\left(-\frac{1}{2},...\right)$

31. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1, \lambda)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε το λ.

32. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και τα σημεία $A(2017,2018)$, $B(-2017, \lambda)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε το λ.

33. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ για το οποίο η συνάρτηση $f:(\lambda-4,\lambda)\to\mathbb{R}$ είναι άρτια.

34. Αν η συνάρτηση $f:(\lambda,3)\to\mathbb{R}$ είναι περιττή, να λύσετε την εξίσωση $f(2)+f(-2)+x=\lambda$.

35. Αν συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^{2016}-1\right)+x=2-f\left(1-x^{2016}\right)$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x)\le 1$

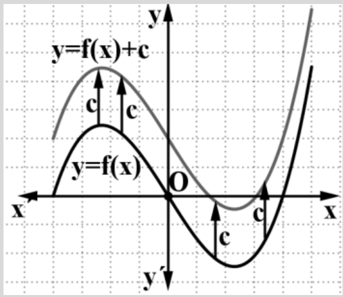
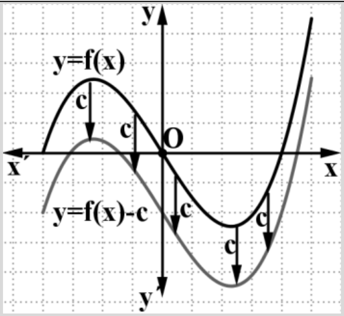
β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια η περιττή

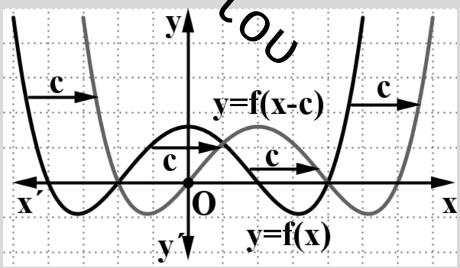
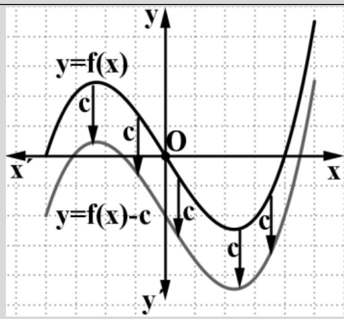
(τράπεζα θεμάτων)

Κατακόρυφη-Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

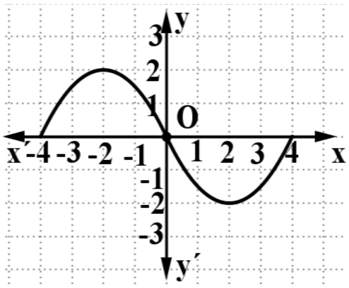
<table>
<tr>
<td>Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+c,\ c>0$
προκύπτει από
κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα πάνω.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x)-c,\ c>0$
προκύπτει από
κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά c μονάδες προς τα κάτω.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

<table>
<tr>
<td>Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x+c),\ c>0$
προκύπτει από
οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα αριστερά.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f(x-c),\ c>0$
προκύπτει από
οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα δεξιά.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Ασκήσεις

37. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

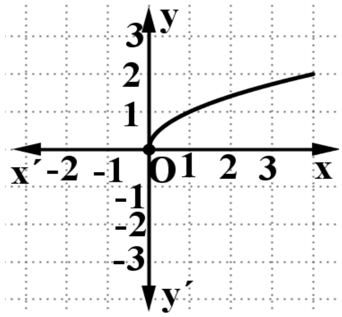


α) $g(x)=f(x)+1$ και $h(x)=f(x)-1$

β) $g(x)=f(x-2)$ και $h(x)=f(x+2)$

γ) $g(x)=f(x-2)+1$ και $h(x)=f(x+2)-1$

38. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x)=\sqrt{x}$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

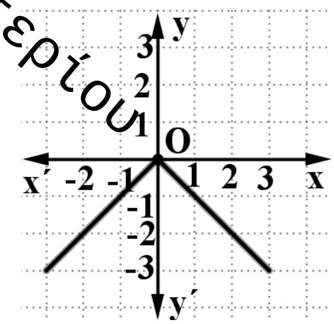


α) $g_1(x)=\sqrt{x}+3$, $g_2(x)=\sqrt{x}-1$

β) $h_1(x)=\sqrt{x-2}$ και $h_2(x)=\sqrt{x+4}$

γ) $\varphi_1(x)=\sqrt{x-2}-1$ και $\varphi_2(x)=\sqrt{x+4}+3$

39. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $f(x)=-|x|$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3-|x|, h(x)=-|x+2|$ και $\varphi\ (x)=3-|x+2|$.



40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3|x|+1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει :

α) κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω

β) κατά 2 μονάδα προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω

γ) κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω

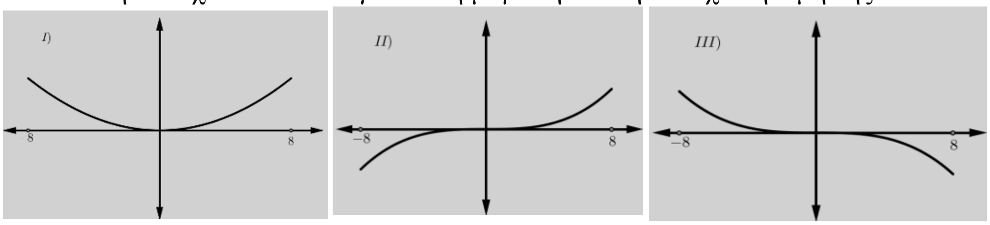
δ) κατά 2 μονάδα προς τα αριστερά και 3 μονάδες προς τα πάνω.

41.Δίνεται η συνάρτηση $f(\text{x}) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση *f* είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτησης *f* είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρείς προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - 3$ και $h(x) = f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές .

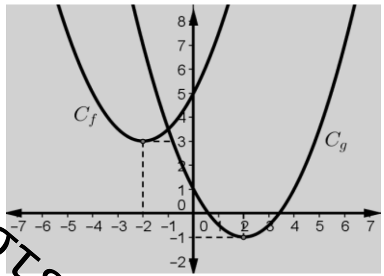
(τράπεζα θεμάτων)

42.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το ℝ. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της *f* με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της *f* και την τιμή του.

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C προκύπτει η C_g.

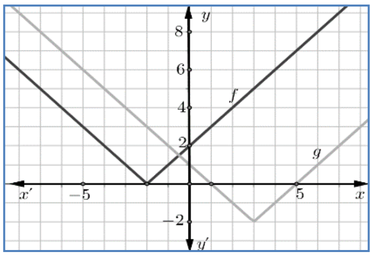


(τράπεζα θεμάτων)

43.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της *f* με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της *f*, το είδος του ακρότατου της f, τη θέση και την τιμή του.

β) Ποιες μετατοπίσεις της f δίνουν τη g. Να προσδιορίσετε στη συνέχεια τον τύπο της συνάρτησης g, αν $f(x) = |x+2|$.



(τράπεζα θεμάτων)

44.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta,\ \alpha, \beta \in R$.

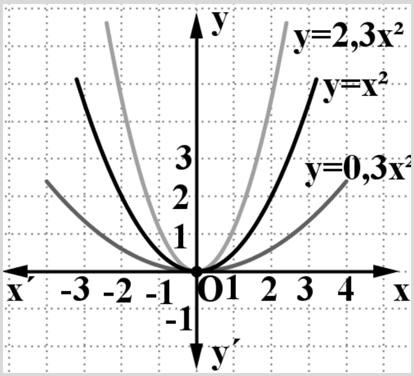
α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(5, 8), να δείξετε ότι $\alpha = \dfrac{3}{2}$ και $\beta = \dfrac{1}{2}$.

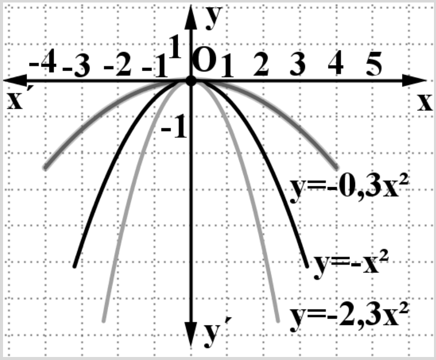
β) Αν g(x) είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g.

γ) Αν $h(x)=\frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{k}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το κ (κ > 0).

(τράπεζα θεμάτων)

Μελέτη της συνάρτησης $y = ax^2$





- ✓ ***Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2, \alpha \neq 0$ λέγεται παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο και άξονα συμμετρίας τον y΄y(άρτια).***
- ✓ ***Αν $\alpha > 0$:***

-η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα πάνω

- παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$

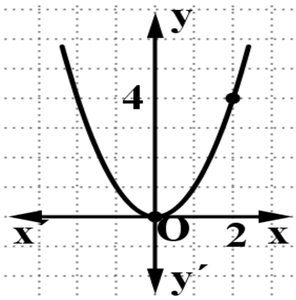
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και

- είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

- ✓ ***Αν $\alpha < 0$***
  - ***είναι ανοιχτή προς τα κάτω***
  - ***παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$***
  - ***είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$***
  - ***είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$***
- ✓ ***Καθώς το $|\alpha|$ μεγαλώνει, η παραβολή κλείνει και πλησιάζει τον y΄y.***

Ασκήσεις

45. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής του διπλανού σχήματος:



46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5,\ x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η *f* παρουσιάζει ελάχιστο στο *x* =0 .
β) Είναι η *f* άρτια συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Με ποια μετατόπιση της $g(x) = x^2$ προκύπτει η C_f ;

(τράπεζα θεμάτων)

47. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 3x^2, g(x) = 3x^2 + 2$ και $h(x) = 3x^2 - 2$.
β) $f(x) = -3x^2, g(x) = -3x^2 + 2$ και $h(x) = -3x^2 - 2$.

48. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 2x^2, g(x) = 2(x-1)^2$ και $h(x) = 2(x+1)^2$.
β) $f(x) = -2x^2, g(x) = -2(x-1)^2$ και $h(x) = -2(x+1)^2$.

49. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο Α(2,32) .

50. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = (3\lambda^2 - 4)x^2$ διέρχεται από το σημείο $A(1,8)$.

α) Να βρείτε τον θετικό αριθμό λ.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

51. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η παραβολή $y = (\lambda^2 - 4\lambda - 5)x^2$ είναι :

α) γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$
β) γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

52. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^2$ και $g(x) = (|\lambda - 1| - 2)x^2$.
Η C_f είναι παραβολή που παρουσιάζει ελάχιστο και η C_g διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.

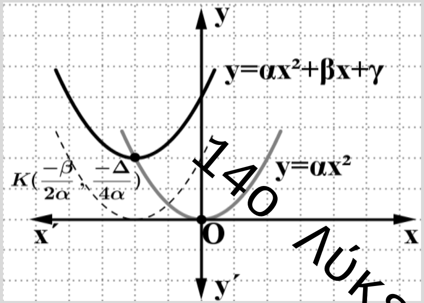
α) Να βρείτε την τιμή του λ,
β) Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

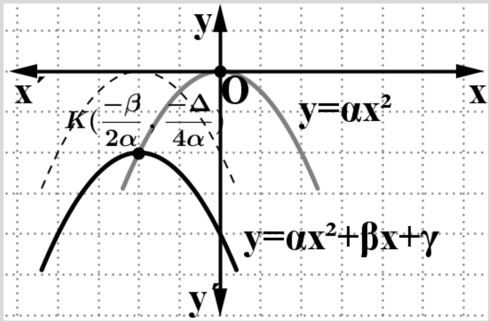
53.α) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = 9$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις $x^2 \le 9$ και $x^2 > 9$.
β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα του α) ερωτήματος.

54.α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}2x, x<0\\ -2x^2, x\geq 0\end{cases}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f.

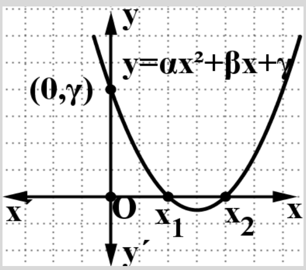
Μελέτη της συνάρτησης $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha\neq 0$

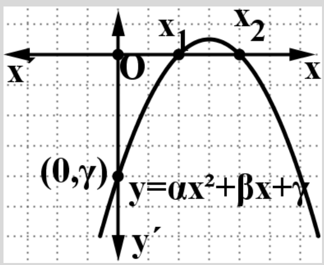


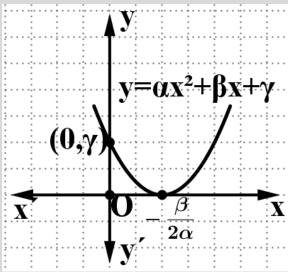
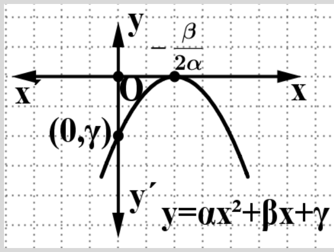
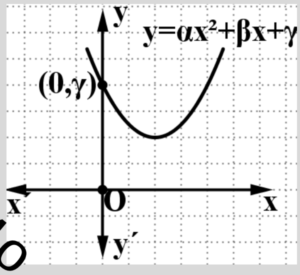
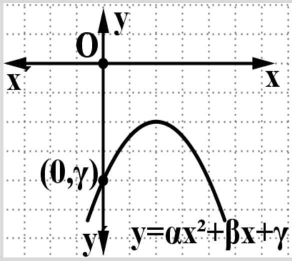


- ✓ ***Επειδή*** $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}$***, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της παραβολής*** $y=x^2$***. Μιας οριζόντιας κατά*** $\frac{\beta}{2\alpha}$ ***και μιας κατακόρυφης κατά*** $\frac{\Delta}{4\alpha}$.
- ✓ ***Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο*** $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ ***,έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ ***και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο*** $(0,\gamma)$

Αν Δ>0 τέμνει τον άξονα χ΄χ σε δύο σημεία $A(x_1,0), B(x_2,0)$ ***, όπου*** x_1, x_2 ***οι ρίζες του τριωνύμου***





Αν Δ=0 εφάπτεται του άξονα χ΄χ στο σημείο $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha},0\right)$ ***,όπου*** x_1,x_2 ***οι ρίζες του τριωνύμου***		
Αν Δ<0 δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα χ΄χ.		

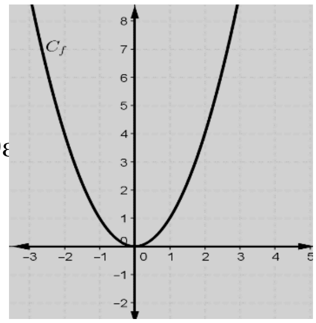
✓ ***Αν*** $\alpha>0$***:***

- ***παρουσιάζει ελάχιστο για*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ ***το*** $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$
- ***είναι γνησίως φθίνουσα στο*** $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ ***και***
- ***είναι γνησίως αύξουσα στο*** $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$

✓ ***Αν*** $\alpha<0$

- ***παρουσιάζει μέγιστο για*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ ***το*** $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$
- ***είναι γνησίως φθίνουσα στο*** $\left[-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$
- ***είναι γνησίως αύξουσα στο*** $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right]$

Ασκήσεις



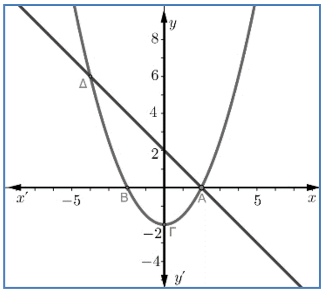
55.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=(x-2)^2+1$.

β) Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων που ακολουθε να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y=x^2$

(τράπεζα θεμάτων)

56. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$ και της ευθείας $g(x)=-x+2$



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, να βρείτε τα *α*, *β*, *γ*.

β) Αν $a=\dfrac{1}{2}$,β=0 και γ=-2 ,να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής .

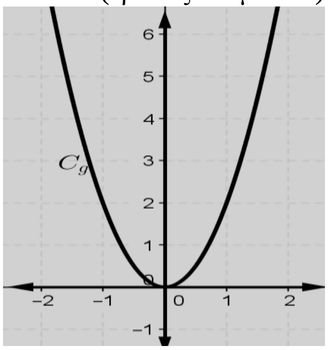
γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(τράπεζα θεμάτων)

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-12x+19$

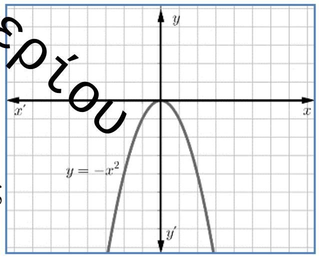
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x)=2(x-3)^2+1$

β) Δίπλα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$.Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g.



(τράπεζα θεμάτων)

58. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=-x^2+2x+1$, $x\in\mathbb{R}$



α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(x-1)^2+2$, $x\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\kappa<2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(τράπεζα θεμάτων)

59. Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=x^2+1$ **β)** $f(x)=x^2-4$ και $g(x)=x^2+4$

γ) $f(x)=(x-1)^2$ και $g(x)=(x+1)^2$ **δ)** $f(x)=3(x+2)^2$ και $g(x)=3(x-2)^2$

ε) $f(x)=(x-2)^2+1$ και $g(x)=(x-2)^2-1$

στ) $f(x)=2(x-1)^2+3$ και $g(x)=2(x-1)^2-3$

60.Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^2-2x-3$ **β)** $f(x)=x^2-4x+3$ **γ)** $f(x)=x^2-x-2$

δ) $f(x)=-2x^2+4x+6$ **ε)** $f(x)=-x^2+5x-6$ **στ)** $f(x)=-x^2+2x$

61.Να παραστήσετε γραφικά της συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^2-2x+1$ **β)** $f(x)=x^2-4x+4$ **γ)** $f(x)=-x^2+6x-9$

δ) $f(x)=-x^2+x-6$ **ε)** $f(x)=x^2+3x+4$ **στ)** $f(x)=x^2-2x+3$

62.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-x-1$.

α) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

63.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3x^2+x+2$.

α) Να βρείτε την κορυφή και τον άξονα συμμετρίας της C_f.
β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

64.Η παραβολή $f(x)=x^2+(\lambda-1)x+\mu+2$ έχει κορυφή το σημείο $K(-1,-4)$

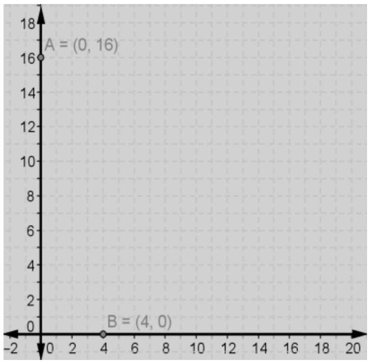
Να βρείτε :

α) τους αριθμούς λ και μ.
β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

65.Η παραβολή $f(x)=\alpha x^2+(\alpha-8)x-4\alpha, \alpha\neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=\dfrac{3}{2}$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>10$.

66. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{2}(x-c)^2-d, x\in\mathbb{R}$ με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία A(0, 16) και B(4, 0).



α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους.

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$,

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f, τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα

(τράπεζα θεμάτων)

67. Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

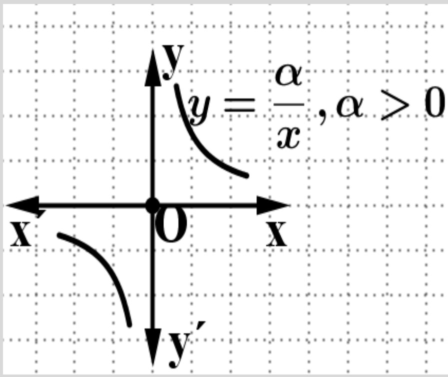
α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

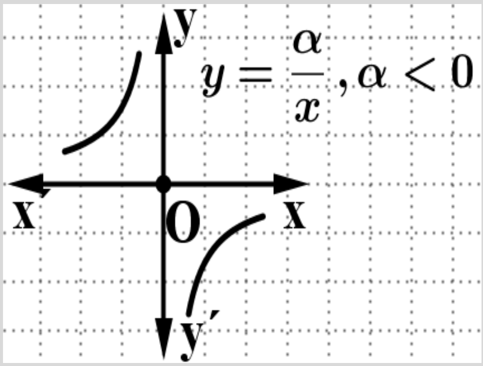
β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με Ε το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το Ε ως συνάρτηση του x.

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της E(x). Από τη γραφική παράσταση της E(x) να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

(τράπεζα θεμάτων)

Η συνάρτηση $y=\frac{\alpha}{x}, x\neq 0$





- ✓ *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x)=\frac{\alpha}{x}, x\neq 0$ *λέγεται ισοσκελής υπερβολή και έχει κέντρο συμμετρίας τον άξονα χ΄χ (περιττή).*
- ✓ *Έχει ασύμπτωτες τους άξονες χ΄χ και y΄y.*
- ✓ *έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες* $y=x$ *και* $y=-x$ *που διχοτομούν τις γωνίες των αξόνων.*
- ✓ *Αν* $\alpha>0$*:*

  -*αποτελείται από δύο κλάδους έναν στο 1ο και ένα στο 3ο τεταρτημόριο.*

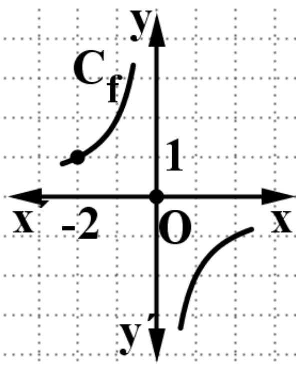
  - *είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα* $(-\infty,0)$ *και* $(0,+\infty)$
- ✓ *Αν* $\alpha<0$

  - *αποτελείται από δύο κλάδους έναν στο 2ο και ένα στο 4ο τεταρτημόριο.*

  -*είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα* $(-\infty,0)$ *και* $(0,+\infty)$.

Ασκήσεις

68. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής του διπλανού σχήματος.



69. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\frac{3}{x}, g(x)=\frac{3}{x}+1$ και $h(x)=\frac{3}{x}-1$.

β) $f(x)=-\frac{3}{x}, g(x)=-\frac{3}{x}+1$ και $h(x)=-\frac{3}{x}-1$.

70. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\frac{2}{x}, g(x)=\frac{2}{x-1}$ και $h(x)=\frac{2}{x+1}$.

β) $f(x)=-\frac{2}{x}, g(x)=-\frac{2}{x-1}$ και. $h(x)=-\frac{2}{x+1}$.

71.) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των

συναρτήσεων $f(x)=-\frac{1}{x}$ και $g(x)=-1$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις

ανισώσεις $-\frac{1}{x}\leq -1$ και $-\frac{1}{x}>-1$.

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματα του α) ερωτήματος.

72. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x)=\frac{3-\lambda}{x}$ διέρχεται από το

σημείο $K(\lambda,2)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ.

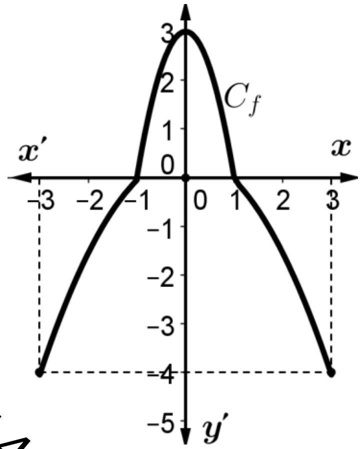
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

73. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in R$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης

α) $f(x)=\frac{\mu-3}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,

β) $f(x)=\frac{|\mu+1|-2}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

74. Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη

δ) Ποιες είναι οι θέσεις των ακροτάτων τους και ποια τα ακρότατα(αν υπάρχουν).

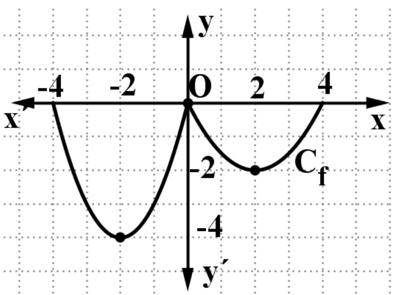
ε) Η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή .Δικαιολογήσετε την απάντηση σας

στ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :

i) πάνω από τον άξονα χ΄χ

ii) κάτω από τον άξονα χ΄χ.

75. Δίνεται η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη

δ) Ποιες είναι οι θέσεις των ακροτάτων τους και ποια τα ακρότατα(αν υπάρχουν).

ε) Η συνάρτηση g είναι άρτια ή περιττή .Δικαιολογήσετε την απάντηση σας

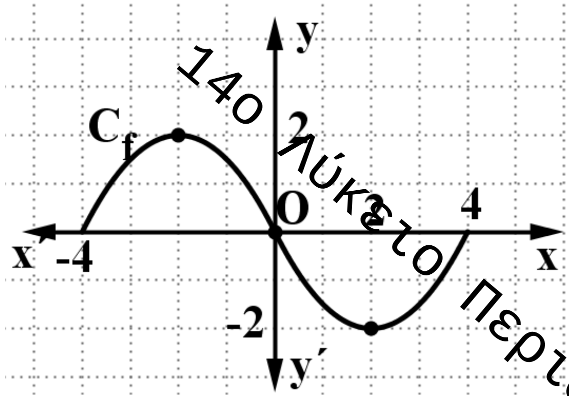
στ) Ποιο είναι το σημείο τομής με την ευθεία $y=-4$.

ζ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :

i) πάνω από τον άξονα χ΄χ.

ii) κάτω από τον άξονα χ΄χ.

76.Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως μονότονη

δ) Ποιες είναι οι θέσεις των ακροτάτων τους και ποια τα ακρότατα(αν υπάρχουν).

ε) Η συνάρτηση g είναι άρτια ή περιττή .Δικαιολογήσετε την απάντηση σας

στ) Ποιο είναι το σημείο τομής :

i) με την ευθεία $y=-4$.

ii) με την ευθεία $y=2$.

ζ) Να αναφέρετε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :

i) πάνω από τον άξονα χ΄χ.

ii) κάτω από τον άξονα χ΄χ.

77.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{-x+1}-x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε το σημείο τομής της f με τον άξονα y΄y.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{-x+1} < x+5$.

78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να βρείτε τη ρίζα και το πρόσημο της f.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > -6$.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $x^3 + 5x + 6 < 0$.

79. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{1821} + x^{1453} + 1$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^{1821} + x^{1453} - 2 > 0$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x)) < 3$.

80. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{16-x} - \sqrt{3x+9} - x + 1$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε το σημείο τομής της f με τον άξονα y΄y.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να βρείτε τα ακρότατα της f
ε) Να λύσετε την ανίσωση: $\sqrt{16-x} < \sqrt{3x+9} + x + 1$

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $K(1,-4)$.
α) Να δείξετε ότι $\lambda = -3$.
β) Να σχεδιάσετε την f και να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της.
γ) Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της f και ποιες είναι οι συντεταγμένες της κορυφής της;
δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + 2x$ είναι άρτια και στη συνέχεια να κατασκευάσετε την γραφική της παράσταση.

82. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \lambda x$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1,4)$.
α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -3$.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Αν $\alpha \neq \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\alpha^2 + \beta^2)$ και $f(2\alpha\beta)$
ε) Να λύσετε την ανίσωση : $(3x-1)^3 - (x^2-5)^3 < 3(x^2 - 3x - 4)$

83. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

β) Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το -1. Ποια είναι η θέση του κάθε ακρότατου;

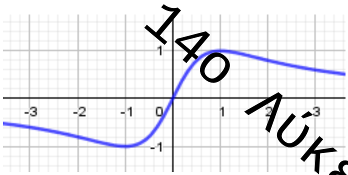
γ) Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f\left(x^{2018}-x\right)+f\left(x-x^{2018}\right)+f(\lambda)=f(3)$

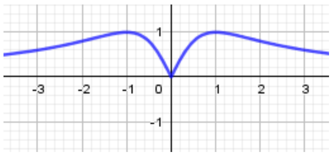
δ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

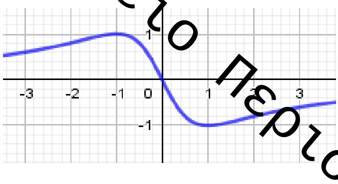
ε) Αν $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}+\dfrac{2\beta}{\beta^2+1}\le 2$ να βρείτε τα α,β.

στ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x)=f^{2018}(x)$ είναι άρτια ή περιττή.

ζ) Ποια από τις παρακάτω μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της f;

i. 



iii. 

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^4+\beta x^2$, $x\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,-7)$ και $B(2,-16)$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-8$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το -16. Ποιες είναι οι θέσεις ακροτάτων;

δ) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f(\alpha)+f(\beta)+32\le 0$.

ε) Μπορεί η f να είναι γνησίως μονότονη;

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^5-5x\right)+|x|=f\left(5x-x^5\right)-f(1)$.

ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$.

85. Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m.
Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

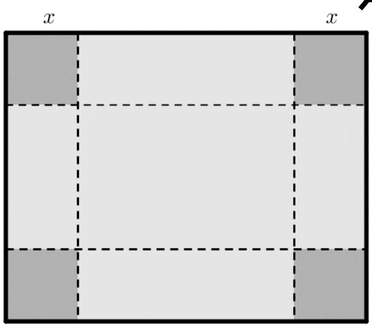
β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με Ε το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το Ε ως συνάρτηση του x.

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της E(x). Από τη γραφική παράσταση της E(x) να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

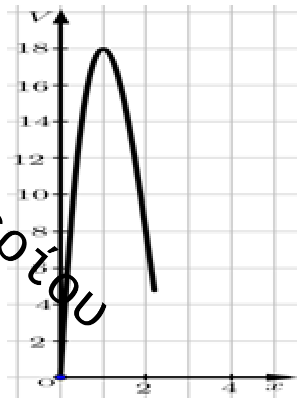
(τράπεζα θεμάτων)

86. Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5dm και 8dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς x, από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του (Σχήμα 1).

Σχήμα 1



Σχήμα 2



α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του χ με τον τύπο $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$.

β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε dm με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 8dm³.

δ) Στο σχ.2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$. για $x \in (0,\ 2.5)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο.

(τράπεζα θεμάτων)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

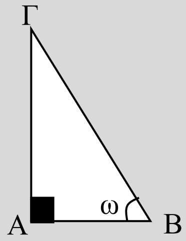
Οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου

Αν ω οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma},$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{AB}{B\Gamma} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta} = \frac{A\Gamma}{AB}.$$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας μεγαλύτερης από 360°.

Οι γωνίες $\kappa \cdot 360^\circ + \omega, \kappa \in \mathbb{Z}$ και ω έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

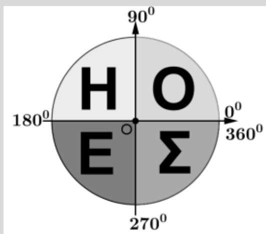
$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
$\varepsilon\varphi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$

Παρατήρηση
Επειδή οι τιμές του ημίτονου και του συνημίτονου μιας γωνίας δεν μπορούν κατά απόλυτη τιμή να υπερβούν την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, ισχύει ότι: $-1 \le \eta\mu\omega \le 1$ **και** $-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$.

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Για το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών παρατηρούμε ότι ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-



Παρατηρούμε ότι στο 1ο τεταρτημόριο **Ό**λοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί, για το λόγο αυτό στο κύκλο στο 1ο τεταρτημόριο έχουμε το γράμμα **Ο**. Στο 2ο τεταρτημόριο μόνο το ημίτονο είναι θετικό, για το λόγο αυτό έχουμε το γράμμα Η. Στο 3ο τεταρτημόριο η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη είναι θετικοί, οπότε προκύπτει το γράμμα Ε για το τεταρτημόριο αυτό. Τέλος στο 4ο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι θετικό, οπότε προκύπτει το γράμμα Σ.

Τύπος μετατροπής ακτίνιου σε μοίρες και το αντίστροφο

Έστω ότι μια γωνία ω είναι μ° και α rad τότε θα ισχύει :	$\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.

Γωνία ω		***Τριγωνομετρικοί αριθμοί***			
μοίρες	***rad***	***ημω***	***συνω***	***εφω***	***σφω***
0°	0	0	1	0	***Δεν ορίζεται***
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	***Δεν ορίζεται***	0
180°	π	0	-1	0	***Δεν ορίζεται***
360°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	***Δεν ορίζεται***	0

Ασκήσεις

1. Αν $\frac{9\pi}{2} < x < \frac{14\pi}{3}$ να αποδείξετε ότι: $ημx - συνx \ > εφx + σφx$.

2. Αν $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$ να αποδείξετε ότι: $ημx - εφx > συνx + σφx$.

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

α) $720°$ **β)** -13π rad **γ)** $1890°$ **δ)** $\frac{11\pi}{2}$rad

4. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών

1485^0, 2790^0, $\frac{91\pi}{3}$ $\frac{61\pi}{6}$.

5. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημ405° \ - \ ημ750°}{συν1125° + συν1860°} = 3 - 2\sqrt{2}$.

6. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει γωνία ω ώστε : $συνω = α^2 - 2α + 3, α \in \mathbb{R}$.

7. Να αποδειχθεί ότι τα παρακάτω ζεύγη γωνιών έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $ω = 2κπ + \frac{3\pi}{10}$ και $\phi = 2λπ - \frac{17\pi}{10}$

β) $ω = 2κπ - \frac{7\pi}{5}$ και $\phi = 2λπ + \frac{3\pi}{5}$

γ) $ω = κ \cdot 360^\circ + 230^\circ$, $φ = λ \cdot 360^\circ - 130^\circ$

δ) $ω = κ \cdot 360^\circ - 40^\circ$, $φ = λ \cdot 360^\circ + 320^\circ$

8. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

α) $ημ^2 x + 12 \le 7ημx$ **β)** $συν^2 x - 1 = συνx + 5$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$	$\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$\sigma\varphi\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
$\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1$	$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$	$\eta\mu^2\omega=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

Ασκήσεις

9. Αν $\eta\mu x=\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

10. Αν $\varepsilon\varphi x=\frac{3}{4}$ και $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

11. Αν $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{12}{13}$ και $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

12. Αν $\sigma\varphi x=\frac{15}{8}$ και $0<x<\frac{\pi}{2}$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας x rad.

13. Αν ένα σημείο Μ ενός τριγωνομετρικού κύκλου που έχει διαγράψει τόξο ω βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο και έχει τεταγμένη $y=\frac{5}{13}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{13\eta\mu\omega-12\varepsilon\varphi\omega+2012}{5\sigma\varphi\omega+13\sigma\upsilon\nu\omega-25}$.

14. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\le\frac{1}{2}$.

15. Αν $6\eta\mu^2x+\eta\mu x-1=0$ και $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, να βρεθεί το συνx.

16. Αν $4\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x=5$ και $0<x<\frac{\pi}{2}$, να υπολογιστεί η $\varepsilon\varphi x$.

17. Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x+1)\cdot(5\sigma\upsilon\nu x-4)=0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}$

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.
(τράπεζα θεμάτων)

18. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\eta\mu x-\varepsilon\varphi x\right)^2+\left(\sigma\upsilon\nu x-1\right)^2=\left(1-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)^2$ **β)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x}+\dfrac{\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\sigma\varphi x$

19. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}+\dfrac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ **β)** $\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{2}{\eta\mu x}$

20. Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\varphi^2 x\cdot\eta\mu^2 x=1$

β) $\left(\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\eta\mu x\right)^2+\left(\alpha\eta\mu x-\beta\sigma\upsilon\nu x\right)^2=\alpha^2+\beta^2$

γ) $\eta\mu^2 x\cdot\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

δ) $\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x+2=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ε) $\dfrac{\varepsilon\varphi x}{1-\sigma\varphi x}+\dfrac{\sigma\varphi x}{1-\varepsilon\varphi x}=\dfrac{1+\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$

21. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x\right)^2=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ **β)** $\eta\mu^2 x\cdot\varepsilon\varphi x-\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\sigma\varphi x=\varepsilon\varphi x-\sigma\varphi x$

γ) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}+\dfrac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$ **δ)** $\dfrac{\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=1+\sigma\upsilon\nu\alpha$

ε) $\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\varepsilon\varphi x\right)^2=\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}$ **στ)** $\dfrac{1-3\eta\mu x}{1-\eta\mu x}+\dfrac{2\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=-3\varepsilon\varphi^2 x$

22. Αν $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι :

$$\mathrm{A}=\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}{\sqrt{1+\eta\mu x}+\sqrt{1-\eta\mu x}}=\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

23. Αν $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ -, να αποδείξετε ότι $\sqrt{2\sigma\varphi x+\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}}=1+\sigma\varphi x$.

24. α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

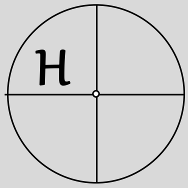
β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0\le\omega\le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση συνω + ημω = -1 και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (τράπεζα θεμάτων)

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ $1^{ο}$ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

1. Παραπληρωματικές γωνίες $(\theta,\ \pi-\theta)$

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

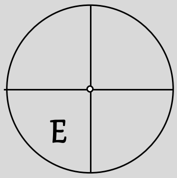
$\eta\mu(\pi-\omega)=\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$
$\varepsilon\varphi(\pi-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(\pi-\omega)=-\sigma\varphi\omega$



2. Γωνίες που διαφέρουν κατά π. $(\theta,\ \pi+\theta)$

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά π έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη και αντίθετα ημίτονα και συνημίτονα.

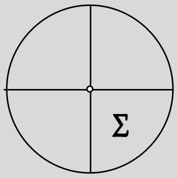
$\varepsilon\varphi(\pi+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(\pi+\omega)=\sigma\varphi\omega$
$\eta\mu(\pi+\omega)=-\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(\pi+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$



3. Αντίθετες γωνίες $(\theta,\ -\theta)$

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$	$\eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega$
$\varepsilon\varphi(-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(-\omega)=-\sigma\varphi\omega$



4. Συμπληρωματικές γωνίες $\left(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$

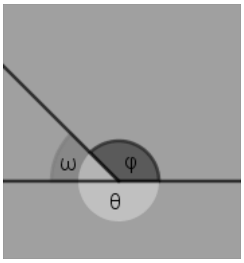
Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.	
$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$
$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega$

Ασκήσεις

25. Να συμπληρώσετε τον πίνακα :

Γωνία ω	ημω	συνω	εφω	σφω
$\frac{5\pi}{3}$				
$\frac{5\pi}{4}$				
150°				
45°				

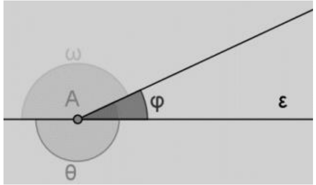
26. Δίνεται $\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{5}{13}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.



α) Να βρείτε το ημίτονο της γωνίας φ.

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

27. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

(τράπεζα θεμάτων)

28. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) 210° **β)** -1050° **γ)** 315° **δ)** 3750° **ε)** 7320°

29. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) $\frac{7\pi}{6}$ **β)** $\frac{3\pi}{4}$ **γ)** $\frac{2014\pi}{6}$ **δ)** $-\frac{43\pi}{6}$

30. Να αποδειχτεί ότι : $\frac{\varepsilon\varphi 120^\circ \cdot \eta\mu 210^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \varepsilon\varphi 225^\circ}{\sigma\varphi 210^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \eta\mu(-45^\circ) \cdot \varepsilon\varphi 135^\circ} = 1.$

31. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu\left(90^\circ - \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi 1845^\circ \cdot \varepsilon\varphi\left(810^\circ - \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(990^\circ + \theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(270^\circ + \theta\right)} = \frac{1}{\eta\mu\theta}$.

32. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{\eta\mu\frac{5\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}\varepsilon\varphi\frac{4\pi}{3}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{3}\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{4}\sigma\varphi\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ **β)** $\frac{-\eta\mu(270^\circ + \theta)}{1 + \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta)} = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) - 1}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta)}$

γ) $\frac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right)\sigma\varphi\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{17\pi}{2} - \theta\right)\eta\mu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right)\sigma\varphi\left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} - \theta\right)} = 1.$

33. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{\varepsilon\phi(\pi + x)\sigma\upsilon\nu(-x)\eta\mu(9\pi + x)}{\sigma\phi\left(\frac{17\pi}{2} - x\right)\sigma\upsilon\nu(x - 2\pi)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)} = 1.$

β) $\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu(\alpha - 2\pi)\varepsilon\phi(3\pi + \alpha)}{\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu(5\pi - \alpha)\eta\mu(\alpha - \frac{\pi}{2})} = -1.$

34. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu(21\pi-\theta)\eta\mu\left(\dfrac{13\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{11\pi}{2}-\theta\right)\varepsilon\varphi(9\pi+\theta)}{\sigma\varphi\left(\dfrac{15\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu(7\pi+\theta)\eta\mu(20\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{31\pi}{2}-\theta\right)}=1$.

35. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu\left(\dfrac{9\pi}{2}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{11\pi}{2}+\theta\right)\varepsilon\varphi\left(\dfrac{9\pi}{2}+\theta\right)\sigma\varphi\left(\dfrac{11\pi}{2}+\theta\right)}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{17\pi}{2}-\theta\right)\eta\mu\left(\dfrac{19\pi}{2}-\theta\right)\sigma\varphi\left(\dfrac{13\pi}{2}-\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{15\pi}{2}-\theta\right)}=1$.

36. Αν για τις οξείες γωνίες Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\eta\mu B=\dfrac{\sqrt{11}}{4}$ και $\eta\mu\Gamma=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

37. Αν Α,Β,Γ γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{3A+3B}{2}+\eta\mu\dfrac{3\Gamma}{2}=0$ **β)** $\eta\mu^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sigma\varphi^2\dfrac{B+\Gamma}{2}}{1+\sigma\varphi^2\dfrac{B+\Gamma}{2}}$

38.α) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu(x+45°)=\eta\mu(45°-x)$

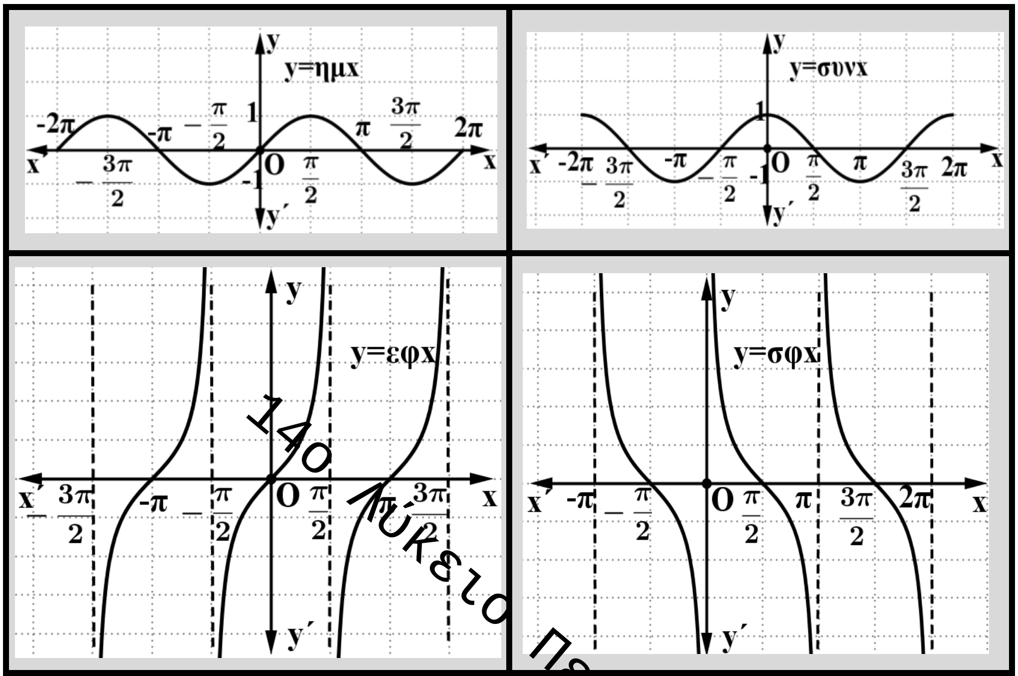
β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του αθροίσματος:
$\sigma\upsilon\nu^2(x+45°)+\sigma\upsilon\nu^2(x-45°)+\eta\mu^2(45°-y)+\eta\mu^2(y+45°)$

39. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu0^0+\sigma\upsilon\nu1^0+\sigma\upsilon\nu2^0+...+\sigma\upsilon\nu179^0+\sigma\upsilon\nu180^0=0$

β) $\eta\mu0^0+\eta\mu1^0+\eta\mu2^0+...+\eta\mu359^0=0$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



Η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x),\ \rho,\omega>0$

- ✓ ***Πεδίο ορισμού της είναι όλο το*** $\mathbb{R}$
- ✓ ***Σύνολο τιμών της είναι το κλειστό διάστημα*** $[-\rho,\rho]$
- ✓ ***το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με*** $-\rho$.
- ✓ ***Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι*** $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.
- ✓ ***Είναι γνησίως αύξουσα στα*** $\left[0,\dfrac{\pi}{2\omega}\right],\left[\dfrac{3\pi}{2\omega},\dfrac{2\pi}{\omega}\right]$ ***και***

  γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\dfrac{\pi}{2\omega},\dfrac{\pi}{\omega}\right],\left[\dfrac{\pi}{\omega},\dfrac{3\pi}{2\omega}\right]$
- ✓ ***Είναι περιττή συνάρτηση.***

Η συνάρτηση $g(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x),\ \rho,\omega>0$

- ✓ ***Πεδίο ορισμού της είναι όλο το*** $\mathbb{R}$
- ✓ ***Σύνολο τιμών της είναι το κλειστό διάστημα*** $[-\rho,\rho]$
- ✓ ***το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της που είναι ίση με*** $-\rho$.

✓ ***Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι*** $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

✓ ***Είναι γνησίως αύξουσα στα*** $\left[0,\dfrac{\pi}{\omega}\right]$ ***και***

γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\dfrac{\pi}{\omega},\dfrac{2\pi}{\omega}\right]$

✓ ***Είναι άρτια συνάρτηση.***

Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi(\omega x),\omega>0$

✓ ***Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι*** $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

✓ ***Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο*** $\mathbb{R}_1=\{x\ /\ \sigma\upsilon\nu\omega x\neq 0\}$

✓ ***Είναι περιττή συνάρτηση.***

✓ ***Η f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα μιας περιόδου της π.χ.*** $\left(-\dfrac{\pi}{2\omega},\dfrac{\pi}{2\omega}\right)$

✓ ***Έχει ασύμπτωτες τις ευθείες*** $x=\dfrac{\kappa\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{2\omega},\kappa\in\mathbb{Z}$.

Η συνάρτηση $g(x)=\rho\sigma\varphi(\omega x),\omega>0$

✓ ***Το ω καθορίζει την περίοδο Τ της συνάρτησης. Είναι*** $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

✓ ***Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο*** $\mathbb{R}_1=\{x\ /\ \eta\mu\omega x\neq 0\}$

✓ ***Είναι περιττή συνάρτηση.***

✓ ***Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε διάστημα μιας περιόδου της π.χ*** $\left(\dfrac{\pi}{\omega},\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$.

✓ ***Έχει ασύμπτωτες τις ευθείες*** $x=\dfrac{\kappa\pi}{\omega},\kappa\in\mathbb{Z}$.

Ασκήσεις

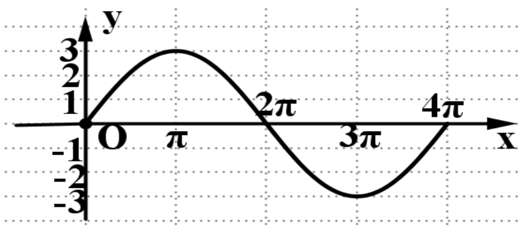
40. Να βρείτε το μέγιστο το ελάχιστο και την περίοδο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=4\eta\mu x$ **β)** $f(x)=-2\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{3}$ **γ)** $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x-5$

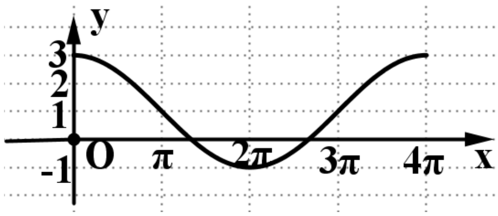
δ) $f(x)=-3\eta\mu 3x+4$

41. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x),\ \rho,\omega>0$

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών $\omega,\ \rho$.



42. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu(\omega x) + \beta,\ x \in [0, 4\pi]$.
Να βρείτε τα α, β, ω.



43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 3x), x \in \Re$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu 3x$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(τράπεζα θεμάτων)

44. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 \quad , x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = 1 + \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f .

(τράπεζα θεμάτων)

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x \,, x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(τράπεζα θεμάτων)

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x \quad , x \in \Re$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
συν2x					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\eta\mu\dfrac{x}{3}$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	**Διάστημα**	**Μονοτονία της f**
$f(x)=3\eta\mu\dfrac{x}{3}$	$\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$	
	$\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2}\right]$	
	$\left[\dfrac{9\pi}{2},6\pi\right]$	

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.
γ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης .
δ) Να κάνετε την γραφική της παράσταση στο διάστημα [0,6π].

48.α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	**Διάστημα**	**Μονοτονία**
$f\left(x\right)=\eta\mu 2x$	[0,π/4]	
	[π/4,3π/4]	
	[3π/4,π]	
$g\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu 2x$	[0,π/2,]	
	[π/2,π]	

β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x), \rho>0$ η οποία έχει περίοδο 4π και έχει ελάχιστο το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x)=-2\eta\mu(9x)$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f(x).

β) Αν $f(x)=2\eta\mu\dfrac{x}{2}$ να γίνει η γραφική παράσταση της f στο $\left[0,4\pi\right]$.

50. Δίνεται η συνάρτηση: $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-\eta\mu\left(\pi+x\right)$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x) και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

β) Να βρεθούν η περίοδος και τα ακρότατα της f(x), δηλαδή η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

51.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right)+\beta$ με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha>0, \beta\in\mathbb{R}$

α) Αν η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 και η γραφική παράσταση τέμνει τον y΄y στο 1 βρείτε τον τύπο της f.

β) Να κάνετε την γραφική παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου και στο διάστημα να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x.

52.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\kappa+3+2\eta\mu\frac{(2\lambda+1)x}{3}$ και

$g(x)=6\lambda+10-3\sigma\upsilon\nu\frac{(\kappa-2)x}{4}$. Να βρεθούν τα $\kappa\in(2,+\infty)$ και $\lambda\in(0,+\infty)$ αν είναι γνωστό ότι έχουν την ιδία μέγιστη τιμή και η περίοδος της f είναι τριπλάσια από την περίοδο της g.

53.Έχει διαπιστωθεί ότι η ακτινοβολία που απορροφά το ανθρώπινο σώμα κατά την έκθεση του στον ήλιο δίνεται από τη συνάρτηση $\mathrm{A}(\mathrm{t})=4-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi \mathrm{t}}{2}\right)$, όπου $0\le \mathrm{t}\le 4$ ο χρόνος σε ώρες που αντιστοιχεί από τις 11π.μ. έως και τις 3 μ.μ.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της Α.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

γ) Ποια ώρα της ημέρας έχουμε τη μέγιστη ακτινοβολία;

δ) Αν η απορρόφηση της ακτινοβολίας ήταν επικίνδυνη για το ανθρώπινο σώμα όταν η τιμή S της $\mathrm{A}(\mathrm{t})$ είναι πάνω από 4 μονάδες, τότε ποιες ώρες της ημέρας θα πρέπει να αποφύγουμε τον ήλιο;

54.Από ένα ταξιδιωτικό γραφείο διοργανώνονται εκδρομές σε κάποιο εξωτικό νησί και η συμμετοχή ατόμων (σε δεκάδες) κατά τη διάρκεια όλης της χρονιάς δίνεται από τη συνάρτηση $\mathrm{E}(\mathrm{t})=6-3\eta\mu\frac{\pi \mathrm{t}}{6}$, όπου t ο χρόνος σε μήνες (t = 1 αντιστοιχεί στον Ιανουάριο, t = 2 αντιστοιχεί στον Φεβρουάριο…)

α) Υπολογίστε πόσα άτομα συμμετέχουν τον Ιούλιο.

β) Να βρείτε πόσο είναι η μέγιστη μηνιαία συμμετοχή εκδρομέων.

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση όταν $0\le \mathrm{t}\le 12$.

δ) Να βρείτε ποιους μήνες έχουμε μειωτική τάση στη συμμετοχή των εκδρομέων.

55.Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t)=8+6\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

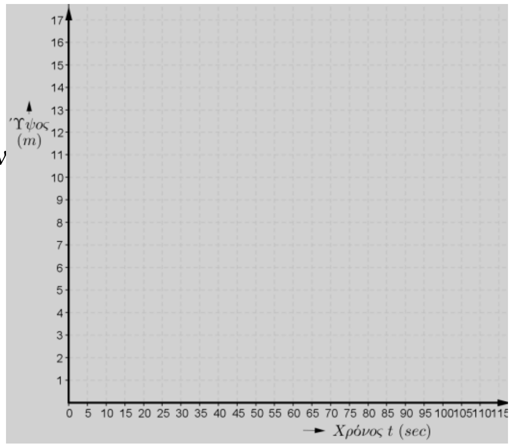
β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και :

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους h(t).

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h(t) με $0 \le t \le 90$.



t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							

56. Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$f(t) = 12ημ\frac{\pi t}{4} + 13$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές t = 5 και t = 8.

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από t = 0 έως t = 8, ποια χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(τράπεζα θεμάτων)

57. Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου (^oC) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετράωρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$f(t) = -8συν\frac{\pi t}{12} + 4$ με $0 \le t \le 24$ (t ο χρόνος σε ώρες).

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετράωρου.

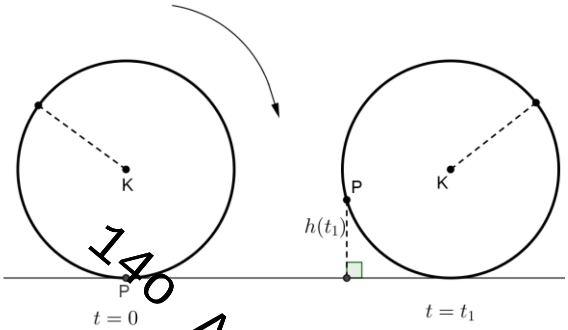
β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0^oC.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$.

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από 0^oC.

(τράπεζα θεμάτων)

58. Μια ρόδα ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Σημειώνουμε ένα σημείο P της ρόδας (όπως φαίνεται στο σχήμα), το οποίο τη χρονική στιγμή t = 0, είναι το σημείο επαφής της ρόδας με μια επιφάνεια. Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση h (σε m) του σημείου P από την επιφάνεια, t sec μετά την αρχή της κίνησης δίνεται από τη σχέση: $h(t) = -0,2\sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t) + 0,2$, με ω θετική πραγματική σταθερά. Υποθέτουμε ότι το σημείο P κάνει ένα πλήρη κύκλο σε 4sec.



α) Να αποδείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{2}$.

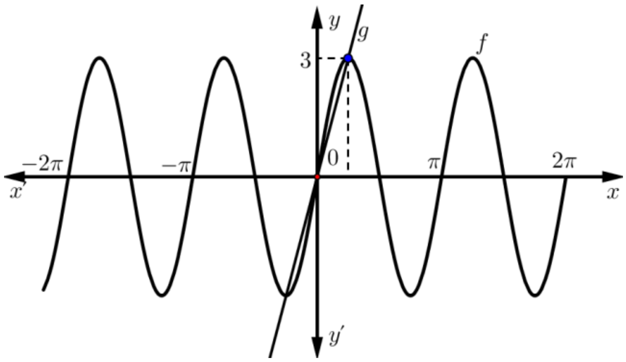
β) Να προσδιορίσετε την απόσταση του P από την επιφάνεια τις στιγμές: t_1 = 1sec, t_2 = 2sec και t_3 = 7sec.

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της h.

δ) Να προσδιορίσετε την ακτίνα της ρόδας.

(τράπεζα θεμάτων)

59. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφικήπαράσταση της συνάρτησης g(x)= αx+ β, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης f (x) = ρημ(ωx), όπουω > 0 και ρ > 0. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.



α) Να αποδείξετε ότι ρ = 3 και ω = 2

β) Να βρείτε τα α, β.

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \frac{12x}{\pi} = 0$ στο διάστημα [0, π].

(τράπεζα θεμάτων)

60.Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = -2\eta\mu\frac{\pi t}{2} + 2, t \in [0,4]$

α) Να βρείτε την περίοδο της f.

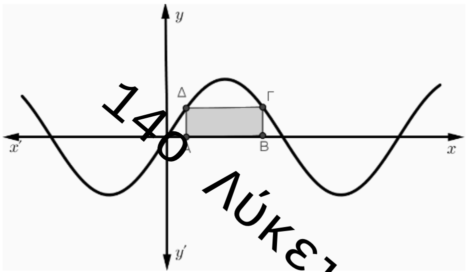
β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει τις τιμές αυτές.

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(τράπεζα θεμάτων)

61.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$.



α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $A\left(\frac{2}{3},0\right)$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ. (τράπεζα θεμάτων)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

✓ *Βασικές εξισώσεις*

$\eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow \left(x=2\kappa\pi+\theta\right)$ ή $\left(x=2\kappa\pi+\pi-\theta\right), k\in\mathbb{Z}$	$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\theta\ , k\in\mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta\ , k\in\mathbb{Z}$	$\sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta\ , k\in\mathbb{Z}$

✓*Ειδικές περιπτώσεις*

$\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $, k\in\mathbb{Z}$	$\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $, k\in\mathbb{Z}$	$\sigma\upsilon\nu x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi+\pi$ $, k\in\mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$	$\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$	$\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

✓***Οι παρακάτω πρώτες τρείς εξισώσεις μετασχηματίζονται σε βασικές εξισώσεις με τη βοήθεια των αντίθετων τόξων, ενώ η τέταρτη μετασχηματίζεται σε βασική με τη βοήθεια των παραπληρωματικών τόξων.***

$\eta\mu f(x)=-\eta\mu g(x) \Leftrightarrow \eta\mu f(x)=\eta\mu\left(-g(x)\right)$
$\varepsilon\varphi f(x)=-\varepsilon\varphi g(x) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi f(x)=\varepsilon\varphi\left(-g(x)\right)$
$\sigma\varphi f(x)=-\sigma\varphi g(x) \Leftrightarrow \sigma\varphi f(x)=\sigma\varphi\left(-g(x)\right)$
$\sigma\upsilon\nu f(x)=-\sigma\upsilon\nu g(x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-g(x)\right)$

✓***Οι παρακάτω εξισώσεις μετασχηματίζονται σε βασικές εξισώσεις με τη βοήθεια των συμπληρωματικών τόξων.***

$\eta\mu f(x)=\sigma\upsilon\nu g(x) \Leftrightarrow \eta\mu f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$
$\sigma\upsilon\nu f(x)=\eta\mu g(x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$
$\varepsilon\varphi f(x)=\sigma\varphi g(x) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi f(x)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$

$$\sigma\varphi f(x)=\varepsilon\varphi g(x)\Leftrightarrow \sigma\varphi f(x)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)$$

Όταν $f(x)=g(x)$ ***για τις δύο πρώτες χρησιμοποιείται ο τρόπος***

$$\eta\mu f(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)\overset{:\sigma\upsilon\nu f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi f(x)=1$$

$$\eta\mu f(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)\overset{:\eta\mu f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\sigma\varphi f(x)=1$$

✓*Οι εξισώσεις :*

$\alpha\eta\mu^2 f(x)+\beta\eta\mu f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***
$\alpha\sigma\upsilon\nu^2 f(x)+\beta\sigma\upsilon\nu f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***
$\alpha\varepsilon\varphi^2 f(x)+\beta\varepsilon\varphi f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***
$\alpha\sigma\varphi^2 f(x)+\beta\sigma\varphi f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***

μετασχηματίζονται σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις ($\alpha\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$ ***) με τη βοήθεια βοηθητικού αγνώστου ω.***

$\left(\eta\mu f(x)=\omega,\sigma\upsilon\nu f(x)=\omega,\varepsilon\varphi f(x)=\omega,\sigma\varphi f(x)=\omega\right)$.

✓*Οι εξισώσεις :*

$\alpha\eta\mu^2 f(x)+\beta\sigma\upsilon\nu f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***
$\alpha\sigma\upsilon\nu^2 f(x)+\beta\eta\mu f(x)+\gamma=0,\alpha\neq 0$ ***και f(x) της μορφής γx+δ***

λύνονται με τη βοήθεια των τύπων $\sigma\upsilon\nu^2 x=1-\eta\mu^2 x,\eta\mu^2 x=1-\sigma\upsilon\nu^2 x$ ***και με τη χρήση βοηθητικού αγνώστου όπως οι προηγούμενες.***

Ασκήσεις

62. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ **β)** $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **γ)** $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$

δ) $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **ε)** $\varepsilon\varphi x=-1$ **στ)** $\varepsilon\varphi x=-\sqrt{3}$

ζ) $\sigma\varphi x=\sqrt{3}$ **ζ)** $\sigma\varphi x=-1$

63. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{2}\eta\mu x+1=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu x+1=0$ **γ)** $\sqrt{3}\varepsilon\varphi x+1=0$ **δ)** $\sqrt{3}\sigma\varphi x=-3$

64. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{2}(1+\eta\mu x)(2+\sigma\upsilon\nu x)=0$ **β)** $\left(3\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}\right)\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=0$

γ) $\left(1-2\eta\mu^2 x\right)\left(1+2\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=0$ **δ)** $\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-1\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)=0$

65. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **β)** $\sigma\upsilon\nu 2x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **γ)** $\varepsilon\varphi\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$

δ) $\sigma\varphi 2x=-1$ **ε)** $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1}{2}$ **στ)** $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right)=-\sqrt{3}$

ζ) $\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ η) $\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+2x\right)=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

66.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)=-\sigma\varphi x$ **β)** $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

γ) $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **δ)** $\varepsilon\varphi\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\varepsilon\varphi x=0$

67.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **β)** $\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

γ) $\varepsilon\varphi 2x=\sigma\varphi\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **δ)** $\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

ε) $\varepsilon\varphi\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sigma\varphi\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ **ζ)** $\varepsilon\varphi 2x\cdot\varepsilon\varphi x=1$

η) $\sigma\varphi\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sigma\varphi x+1=0$ **θ)** $\sigma\varphi x\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=1$

68.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2 x+5\eta\mu x-3=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu^2 x+1=5\eta\mu x$ **γ)** $3\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x-5\sigma\upsilon\nu x=0$

69.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu^2 x+7\sigma\upsilon\nu x+3=0$ **β)** $4\eta\mu^2 x+2\left(3+\sqrt{3}\right)\eta\mu x+3\sqrt{3}=0$

γ) $\varepsilon\varphi^2 x-\sigma\varphi^2 x=\sigma\varphi x-\varepsilon\varphi x$ **δ)** $\sigma\varphi^2 x+\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})\sigma\varphi x$

70.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2 x-3\eta\mu x+1=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu^2 x+1=5\eta\mu x$ **γ)** $\varepsilon\varphi x+3\sigma\varphi x=2\sqrt{3}$

δ) $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+1=3\varepsilon\varphi x$ **ε)** $\eta\mu^3 x-2\eta\mu^2 x-8\eta\mu x=0$

στ) $4\eta\mu^4 x+5\sigma\upsilon\nu^2 x-4=0$

71.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\varepsilon\varphi^2 x+\varepsilon\varphi x=0$ **β)** $2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x=\eta\mu x$ **γ)** $1+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0$

δ) $\sqrt{3}\cdot\varepsilon\varphi x=2\eta\mu x$ **ε)** $\varepsilon\varphi x+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=2$ **στ)** $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=4$

72.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ **β)** $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0$

γ) $\eta\mu x=\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ **δ)** $\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3}\eta\mu x=0$

73.Να λύσετε την εξίσωση: $7-|\eta\mu x-3|-4\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x+|2-\eta\mu x|$.

74.Να λύσετε στο $[0,\pi)$ τις εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)=1$ **β)** $2\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1=0$

75.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ στο $(\pi,2\pi)$ **β)** $1-\sigma\varphi 2x=0$ στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$

76.Να λυθεί η εξίσωση $3\sigma\varphi x\cdot\sigma\upsilon\nu x+2\sqrt{3}=6\sigma\varphi x+\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x$ στο $[2\pi,4\pi]$.

77.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στα αντίστοιχα διαστήματα.

α) $2\sigma\upsilon\nu\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1=0$ στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ β) $2\eta\mu\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)=1$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

γ) $\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ στο $(0,2\pi)$ **δ)** $\varepsilon\varphi\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\varepsilon\varphi\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ στο $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

ε) $\eta\mu x-1=\sigma\upsilon\nu^2 x$ στο $[\pi,3\pi]$ **στ)** $\eta\mu^2 2x+\eta\mu^2 x=0$ στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

78.Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^{2012}2x+\sigma\upsilon\nu^{2014}x=0$

79.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu(\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x)=1$ **β)** $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\eta\mu x\right)=1$

80.α) Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$, όπου $x\neq 2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{\text{συν}x}{1-\text{ημ}x}+\dfrac{\text{συν}x}{1+\text{ημ}x}=\dfrac{-4}{\sqrt{3}}$.

81.α) Είναι η τιμή $x=\dfrac{\pi}{4}$ λύση της ανίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 4x+3=0$;Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία y=-1.

(τράπεζα θεμάτων)

82. Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση: $(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega=0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega=0$.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω.

(τράπεζα θεμάτων)

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x+1, x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

β) Για ποια τιμή του $x\in[0,2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(τράπεζα θεμάτων)

84.α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\pi+x\right)=0$

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\left[0,2\pi\right)$ για τις οποίες ισχύει $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

(τράπεζα θεμάτων)

85.α) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6},\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4},\sigma\upsilon\nu\dfrac{17\pi}{10}$

β) Αν $\pi<x_1<x_2<\dfrac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu(\dfrac{\pi}{2}-x_1)$ και $\eta\mu(\dfrac{\pi}{2}-x_2)$

(τράπεζα θεμάτων)

86. Δίνεται η παράσταση: Α= $\dfrac{\text{ημ}^2 x}{1-\text{συν}x}$, με $x\neq 2\kappa\pi$, $\kappa\in Z$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1+\sigma\upsilon\nu x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{\text{ημ}^2 x}{1-\text{συν}x}=\dfrac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

(τράπεζα θεμάτων)

87. Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ και $\text{ημ}(\pi-x)-\text{ημ}(\pi+x)=1$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x=\dfrac{1}{2}$

β) Να βρείτε την γωνία x.

(τράπεζα θεμάτων)

88.α) Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{ημx}{1-συνx}+\dfrac{ημx}{1+συνx}=\dfrac{2}{συνx}$ όπου $x \neq κπ$, $κ \in Z$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{ημx}{1-συνx}+\dfrac{ημx}{1+συνx}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(τράπεζα θεμάτων)

89.Δίνεται η εξίσωση $1-ημx=\sqrt{3}συνx$ (Α)

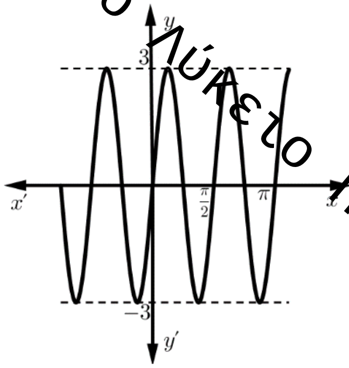
α) Να αποδείξετε ότι, αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (Α), τότε $συνx_0 > 0$.

β) Θεωρούμε την εξίσωση $(1-ημx)^2=3συν^2x$ (Β) η οποία προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης (Α).
Να λύσετε την εξίσωση (Β).

γ) Να λύσετε την εξίσωση (Α).

(τράπεζα θεμάτων)

90.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αημ(ωx)$ με παραμέτρους α, ω > 0



Να βρείτε:

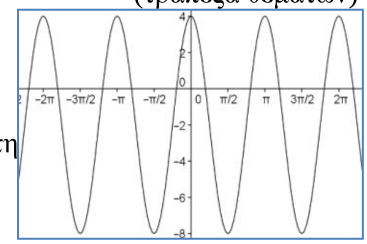
α) την περίοδο της συνάρτησης f .

β) τους αριθμούς α και ω

γ) τους αριθμούς $k \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση f (x) = κ έχει μοναδική λύση στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση .

(τράπεζα θεμάτων)

91.Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που είναι της μορφής $f(x)=α+βσυν2x$,όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Ποια είναι η περίοδος Τ της συνάρτησης f ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος,
να αποδείξετε ότι: $α=-2$ και $β=6$.

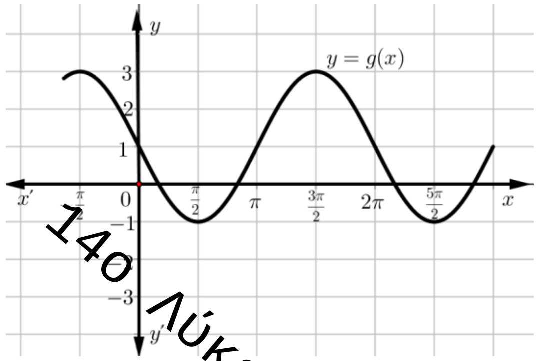
δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$ στο διάστημα $\left[0,2\pi\right]$.

(τράπεζα θεμάτων)

92. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2\eta\mu\left(3x\right)+1, x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T και τη μέγιστη τιμή της f .

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g\left(x\right)=\alpha\eta\mu\left(\beta x\right)+\gamma, x\in\mathbb{R}$



i. Να προσδιορίσετε τα α, β, γ.

ii. Για α = -2, β = 1 και γ = 1, να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x) στο διάστημα [0, π).

(τράπεζα θεμάτων)

93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ |\alpha+1|\eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\beta>0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ ή $\alpha=-4$ και $\beta=\dfrac{1}{2}$.

β) Για $\alpha=2$ και $\beta=\dfrac{1}{2}$,

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x)=3$

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,8]$.

(τράπεζα θεμάτων)

94. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}-x+2y=1\\ x+\lambda y=\lambda\end{cases}$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

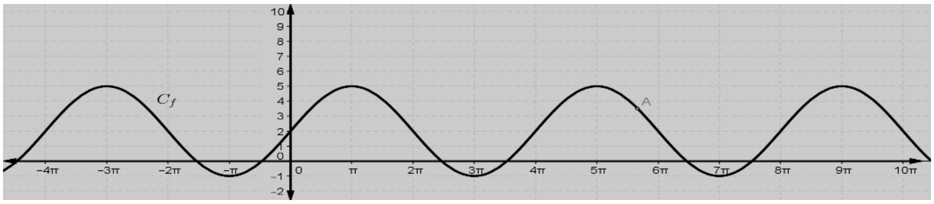
α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta\in[0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$.

γ) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1= \eta\mu\omega$.

(τράπεζα θεμάτων)

95. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής f(x) = ρ·ημ(ωx) + k, με ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι ρ = 3, $\omega = \dfrac{1}{2}$ και k = 2, να προσδιορίσετε **αλγεβρικά** την τετμημένη x_0 του σημείου $A\left(x_0, \dfrac{7}{2}\right)$ της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(τράπεζα θεμάτων)

96. Δίνονται οι συναρτήσεις f (x) = συνx και g(x) = συν2x.

α) Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) και g (x), για x ∊ [0, 2π].

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης συν2x = συνx (1) στο διάστημα [0, 2π].

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα [0, 2π] και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(τράπεζα θεμάτων)

97. Το βάθος του νερού στη γέφυρα του Ευρίπου κατά τη διάρκεια της ημέρας, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 20 + 4\text{συν}\dfrac{\pi t}{3}, 0 \le t \le 24$ (σε ώρες)

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

β) Να βρείτε ποιο είναι το μέγιστο και το ελάχιστο βάθος του νερού.
γ) Να βρείτε ποια ώρα της ημέρας το βάθος του νερού είναι 18 μέτρα.
δ) Αν το ύψος της γέφυρας είναι 30 μέτρα από τον πυθμένα, να ελέγξετε αν ένα σκάφος ύψους 8 μέτρων (από την επιφάνεια του νερού) μπορεί να περάσει κάτω από τη γέφυρα στις 12 το πρωί.

98. Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση:
$h(t) = a \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) + \beta$, όπου α, ω, β πραγματικές σταθερές.
Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο 100cm. Τη χρονική στιγμή t=0 το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης
(θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6 sec.

α) Να δείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{3}$

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας.
γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιγνιδιού από το πάτωμα 14sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.
δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h(t), για $0 \le t \le 12$.
(τράπεζα θεμάτων)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ α±β

Τυπολόγιο :

$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$
$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$	$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$
$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$	$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}$
$\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$	

Ασκήσεις

99. Αν $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ και $\eta\mu x = -\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu y = -\frac{4}{5}$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α+β .

100. Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$ και $\eta\mu x = \frac{12}{15}$, $\sigma\upsilon\nu y = \frac{24}{25}$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α-β .

101.Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<y<\pi$ και $\sigma\upsilon\nu x=\frac{12}{13}$, $\varepsilon\varphi y=-\frac{3}{4}$ να υπολογίσετε τα:

α) $\sigma\upsilon\nu(x+y)$ **β)** $\eta\mu(x-y)$

102.Αν $\eta\mu x-\eta\mu y=1$ και $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\sqrt{3}$, να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu(x+y)$.

103.Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$

β) $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta$

104.Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ είναι ανεξάρτητη του α.

105.Αν $3\eta\mu(\alpha+\beta)=4\eta\mu(\alpha-\beta)$, τότε για τις επιτρεπόμενες τιμές των α και β να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha=7\varepsilon\varphi\beta$.

106.Αν σ΄ ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\eta\mu A=2\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$, να δείξετε ότι είναι ισοσκελές.

107.Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\eta\mu A+\eta\mu(B-\Gamma)}=\sigma\varphi B$. Τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

108.Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

α) $\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma-2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=2$

β) $\eta\mu^2\frac{A}{2}+\eta\mu^2\frac{B}{2}+\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}-2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=1$

γ) $\eta\mu A\eta\mu(B-\Gamma)+\eta\mu B\eta\mu(\Gamma-A)+\eta\mu\Gamma\eta\mu(A-B)=0$

δ) $\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu\Gamma=-\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B$

109.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ **β)** $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

γ) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-2\sqrt{3}$

110. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$ **β)** $\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$.

111. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{10} \cdot \eta\mu x + \eta\mu\frac{\pi}{10}\sigma\upsilon\nu x = 1$ **β)** $\eta\mu x + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{15}\sigma\upsilon\nu x = 1$.

112. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και η εξίσωση

$x^2 + 674\sqrt{3} \cdot x + 2019 = 0$, $x \neq -673\sqrt{3}$ (1) .

Αν οι εφΒ και εφΓ είναι ρίζες της εξίσωσης (1),να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$.

113. Δίνονται οι γωνίες *ω, θ* με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ για τις οποίες ισχύει:

ω + θ = 135°.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = -1$

β) $\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$ (τράπεζα θεμάτων)

114.α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\eta\mu x$

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε στο διάστημα (0, *π*) την

εξίσωση: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\eta\mu x = 0$ (τράπεζα θεμάτων)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 2α

Τυπολόγιο

$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha =$ $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 =$ $1 - 2\eta\mu^2\alpha$
$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$

Τύποι αποτετραγωνισμού

$\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Τύποι του 2α συναρτήσει της εφα

$\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$,	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$,	$\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Τύποι συναρτήσει του $\dfrac{\alpha}{2}$

$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$
$\eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}$
$\eta\mu\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 =$ $1 - 2\eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$

Ασκήσεις

115.Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{1}{4}$ και $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ υπολογίστε το ημ2α και το συν2α.

116.Αν $εφα = 2$ να υπολογίσετε τα ημ2α, συν2α, εφ2α.

117.Αν $ημx + συνx = \frac{3}{4}$ να υπολογιστεί το $ημ2x$ και το $συν2x$ αν γνωρίζουμε ότι $-\frac{π}{4} < x < 0$.

118.Για τη γωνία α ισχύει ότι: $5συν2α - 14συνα - 7 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $συνα = -\frac{3}{5}$

β) Αν επιπλέον ισχύει: $π \le α \le \frac{3π}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α, συν2α, εφ2α.

119.Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\frac{α}{2}$,αν :

α) $συνα = \frac{15}{17}$ και $\frac{3π}{2} < α < 2π$

β) $συνα = -\frac{4}{5}$ και $π < α < \frac{3π}{2}$.

120.Να δείξετε ότι:

α) $\frac{1 + συν4α + συν2α}{ημ4α + ημ2α} = σφ2α$

β) $\frac{συνx + ημx}{συνx - ημx} - \frac{συνx - ημx}{συνx + ημx} = 2εφ2x$

121.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $συν2x - συν^2x = 0$ **β)** $ημ2x - συνx = 2ημx - 1$ **γ)** $συν2x - συνx = 2$

δ) $συνx + ημ\frac{x}{2} = -2$ **ε)** $1 + συνx + συν2x = 0$ **στ)** $συν2x = 4συνx + 5$

122.Δίνεται γωνία *ω* για την οποία ισχύει ότι: $-συν2ω + 5ημω - 2 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2ημ^2ω + 5ημω - 3 = 0$

β) Να αποδείξετε ότι $ημω = \frac{1}{2}$

123.α) Να δείξετε ότι : $ημ\left(x + \frac{π}{4}\right) + ημ\left(x - \frac{π}{4}\right) = \sqrt{2}ημx$.

β) Να βρείτε με την βοήθεια του ερωτήματος α) την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = ημ\left(x + \frac{π}{4}\right) + ημ\left(x - \frac{π}{4}\right), x \in \mathbb{R}$.

124. Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5συν2ω + 28συνω + 21 = 0$.

α) Να δείξετε ότι: $συνω = -\frac{4}{5}$

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{π}{2} < ω < π$ τότε:

i. να δείξετε ότι: $συν2ω = \frac{7}{25}$ και $ημ2ω = -\frac{24}{25}$

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$Π = \frac{13 \cdot \left[ημ^2 2ω + συν^2 2ω\right] + 12}{18 \cdot εφ2ω \cdot σφ2ω + 25\left[ημ\ \ 2ω + συν\ \ 2ω\right]}$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις Τριγωνομετρίας

125. Έστω η συνάρτηση : $f\left(x\right)=\dfrac{\text{συν}x+1}{\text{ημ}x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να λύσετε την εξίσωση : $f\left(x\right)=\text{ημ}x$.

126. Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\dfrac{16\text{εφ}^2 x}{1+\text{εφ}^2 x}$ και $g\left(x\right)=\text{εφ}^2 x+1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους
β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=3g\left(x\right)$.
γ) Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=16\text{ημ}^2 x$ και $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $16\text{ημ}^2 x\text{συν}^2 x-3=0$.

127. Το βάθος του νερού κάτω από τη γέφυρα του Ευρίπου κατά τη διάρκεια της ημέρας δίνεται από τη συνάρτηση $f\left(t\right)=20+4\text{συν}\dfrac{\pi t}{3}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες με $0\leq t\leq 24$.

α) Να βρεθεί η περίοδος της συνάρτησης.
β) Ποιο είναι το μέγιστο και το ελάχιστο βάθος του νερού;
γ) Αν το ύψος της γέφυρας είναι 30μ(από τον πυθμένα του νερού) να ελεγχθεί αν το σκάφος ύψους 8μ πάνω από (την επιφάνεια του νερού) μπορεί να περάσει κάτω από τη γέφυρα στις 12 το πρωί.
δ) Ποια ώρα της ημέρας το βάθος του νερού είναι 18μ;

128. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2\text{ημ}^2 x+5\text{συν}x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο 2π.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(f\left(x\right)+2\text{συν}^2 x\right)^2-8\left(f\left(x\right)+2\text{συν}^2 x\right)-20=0$

129. Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\alpha+2\text{ημ}\left(2\beta x\right)$ και $g\left(x\right)=\alpha+\beta+\text{συν}\left(\left(\alpha+\beta\right)x\right)$, $\alpha,\beta>0$.

Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε:
α) να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$. **β)** Να βρείτε τη τιμή της παράστασης

$$A=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)+3=2g\left(x\right)$ στο διάστημα $\left[\pi,2\pi\right)$.

130.Δίνεται η παράσταση: $f(x)=\eta\mu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x+2$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να παραγοντοποιήσετε την f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.

στ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο το 4.

131.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\beta$, α, $\beta\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A\left(-\frac{\pi}{4},-1\right)$, $B\left(\frac{\pi}{4},1\right)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$

β) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης καθώς και την περίοδό της.

γ) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της f .

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=2$.

ε) Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+f\left(\frac{5\pi}{4}\right)-f\left(\frac{7\pi}{4}\right)+f\left(\frac{9\pi}{4}\right)=1$

132.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu^2 x+\eta\mu x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π .

β) Να αποδείξετε ότι κανένα σημείο της γραφικής παράστασης της f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στο διάστημα $(0,\pi)$ με τεταγμένη 2.

δ) Να λύσετε στο διάστημα $[0,2\pi)$ την εξίσωση: $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

133.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x-3\sigma\upsilon\nu x+2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π .

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το $-\frac{1}{8}$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2-3\sigma\upsilon\nu x$.

ε) Να λύσετε στο διάστημα $[0,\pi)$ την εξίσωση: $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

134.Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\sqrt{3}\varepsilon\varphi^2\mathrm{x}-(\sqrt{3}+1)\varepsilon\varphi\mathrm{x}+1$, $\mathrm{x}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$.

β) Αν θ η μεγαλύτερη ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu(2\pi+\theta)\varepsilon\varphi(\pi-\theta)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)}{\eta\mu(1821\pi+\theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta)\sigma\varphi\left(\frac{17\pi}{2}-\theta\right)}=-1$$

135.Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=2\eta\mu\mathrm{x}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

β) Για ποιες τιμές του x παίρνει ελάχιστη τιμή η συνάρτηση;

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\mathrm{f}(\mathrm{x})+\eta\mu^2\mathrm{x}=3+\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{x}$.

δ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=\frac{\mathrm{f}(8\pi-\mathrm{x})\mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{2}-\mathrm{x}\right)\mathrm{f}\left(\frac{9\pi}{2}-\mathrm{x}\right)\mathrm{f}(7\pi+\mathrm{x})}{\mathrm{f}^2\left(\frac{13\pi}{2}+\mathrm{x}\right)\mathrm{f}^2(\mathrm{x})}$

είναι ανεξάρτητη του x.

136.Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{\eta\mu\mathrm{x}\cdot\varepsilon\varphi\mathrm{x}}{1-\sigma\upsilon\nu\mathrm{x}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}(\mathrm{x})=1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{x}}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

δ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right)=\mathrm{f}\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}-\mathrm{x}\right)$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right)=3$.

137.Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=2\eta\mu^3 2\mathrm{x}-\eta\mu^2 2\mathrm{x}-4\eta\mu 2\mathrm{x}+2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{x}\right)=\mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{2}-\mathrm{x}\right)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\mathrm{g}(\mathrm{x})=2\eta\mu^3 2\mathrm{x}-2\eta\mu 2\mathrm{x}-\mathrm{f}(\mathrm{x})$ καθώς και τις αντίστοιχες τιμές του x, για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Μονώνυμο

Μονώνυμο του x λέγεται κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν} , όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Πολυώνυμο

- ***Πολυώνυμο του x λέγεται κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{\nu}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.***
- ***Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu}$, $\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}$, ... , $\alpha_1 x$, α_0 λέγονται όροι του πολυωνύμου και οι αριθμοί $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{\nu}$ συντελεστές του.***
- ***Τα πολυώνυμα της μορφής α_0, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται σταθερά πολυώνυμα. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο.***
- ***Αν $\alpha_{\nu}\neq 0$, τότε ο αριθμός ν λέγεται βαθμός του πολυωνύμου. Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.***
- ***Αριθμητική τιμή ή απλά τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$ λέγεται ο αριθμός $P(\rho)=\alpha_{\nu}\rho^{\nu}+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+...+\alpha_1\rho+\alpha_0$. Αν είναι $P(\rho)=0$ τότε ο ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου.***

Ίσα πολυώνυμα

Δύο πολυώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $\beta_{\mu}x^{\mu}+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+...+\beta_1 x+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$ είναι ίσα όταν: $\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1,...,\alpha_{\nu}=\beta_{\nu}$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=...=\alpha_{\mu}=0$

Πράξεις πολυωνύμων

- ***Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.***
- ***Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.***

Ασκήσεις

1. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(\kappa+1)x^3+(2+\mu)x-\lambda$ και $Q(x)=(2\lambda-\mu)x+3\mu-5$.Να βρεθούν οι κ ,λ $\in R$ για τους οποίους

α) είναι ίσα τα πολυώνυμα

β) Το άθροισμα τους να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

2. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x)=-2x^3+\lambda^2(x^2-1)+\lambda(x^3-1)+\lambda+9$ και

$Q(x)=(\lambda+12)x^2+(\lambda-2)x^3+(\lambda^2-9)x, \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα.

(τράπεζα θεμάτων)

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το πολυώνυμο

$P(x)=\lambda(\lambda^2+4\lambda+3)x^2+(\lambda^2+3\lambda)x+\lambda^2-9$ είναι

α) δευτέρου βαθμού

β σταθερό

γ) το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ το πολυώνυμο :

$P(x)=(\mu^3-16\mu)x^3+(\mu^2-4\mu)x^2+(5\mu-20)x+\mu^2-5\mu+4$ είναι

α) τρίτου βαθμού

β δευτέρου βαθμού

γ) πρώτου βαθμού

δ) το μηδενικό πολυώνυμο.

5. Δίνονται τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(\mathrm{x})=4\mathrm{x}^3-6\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}-8$ και $\mathrm{Q}(\mathrm{x})=\alpha\mathrm{x}^3+\beta\mathrm{x}^2+\gamma\mathrm{x}+\delta$. Να βρείτε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς α, β, γ, δ, ώστε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})-\mathrm{Q}(\mathrm{x})$, να είναι:

α) 3ου βαθμού **β)** το πολύ 2ου βαθμού **γ)** μηδενικού βαθμού

6. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ,μ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+(\lambda-1)x^2+3\mu x+2$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 και η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=2$ είναι ίση με 20.

7. Δίνοντας το πολυώνυμο $P(x)=3x^2-x-\alpha$ και $Q(x)=3x^2+(\alpha-4)x+\beta+2a$ να προσδιορίσετε τους α, β όταν ο αριθμός 1 είναι κοινή τους ρίζα.

8. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ,μ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(\lambda-\mu)x^2+2\lambda x+8$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και $\mathrm{P}(1)=7$.

9. Να βρείτε τις τιμές των α, $\beta \in \mathbb{R}$,ώστε οι αριθμητικές τιμές του πολυωνύμου $P(x)=x^3+(2\alpha-3\beta)x^2+(2-\alpha)x+\beta-\alpha$,για $x=-1$ και $x=1$,να είναι 3 και -5 αντίστοιχα.

10.Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^2+(\alpha-1)x+2\alpha$ έχει ρίζα το - 1 να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x)=x^3+4x^2+(\alpha^2-1)x$.
Το αντίστροφο ισχύει;

11.Να αναλύσετε τη κλασματική παράσταση $\dfrac{3x-3}{x^2-9}$ σε άθροισμα δύο κλασμάτων με πρωτοβάθμιους παρονομαστές.

12.Να αναλύσετε τη κλασματική παράσταση $\dfrac{2}{x^2-5x+6}$ σε άθροισμα δύο κλασμάτων με πρωτοβάθμιους παρονομαστές.

13.Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+16$ είναι τέλειο τετράγωνο του $Q(x)=x^2+x+\delta$.

14.Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ δεύτερου βαθμού, για το οποίο ισχύει $P(2x+1)=P(2x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

15.Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ το πολύ 2ου βαθμού, για το οποίο ισχύει ότι $P(x)+P(x-1)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

16.Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει ότι $P(x)+P^2(x)=x^2+5x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

17.Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^2+3x+1$ και $Q(x)=x^2-3$.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(Q(x))$.

β) Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι:
$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon=P(Q(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

18.Έστω πολυώνυμο $P(x)$. Αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)-x$, να αποδείξετε ότι είναι ρίζα και του $P(P(x))-x$.

19.Έστω πολυώνυμο $P(x)$. Αν το 2 είναι ρίζα του $P(x)-2x$, να αποδείξετε ότι είναι ρίζα και του $P(P(x)-2)-2$.

20.Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $P(2x+1)=3P(x)+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $P(0)=0$. Να αποδείξετε ότι $P(15)=80$.

21.α)Αν η εξίσωση $x^{10}+\alpha x^{8}+\beta x^{6}+1=0$ έχει ρίζα το 1, να αποδείξετε ότι: $|\alpha|+|\beta|\geq 2$.

β) Αν η εξίσωση $5x^{3}+2\alpha x^{2}+3\beta=0$ έχει ρίζα το 1, να αποδείξετε ότι: $2|\alpha|+3|\beta|\geq 5$.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Θεώρημα (Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)\neq 0$ υπάρχει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ για τα οποία ισχύει: $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x)$ όπου το $\upsilon(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.

Παρατηρήσεις

Αν $\upsilon(x)=0$ τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια και η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)$$

Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$

Θεώρημα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$.

Θεώρημα

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Ισοδύναμες προτάσεις τέλειας διαίρεσης πολυωνύμων

- ✓ ***Το P(x) διαιρείται με το x – ρ.***
- ✓ ***Το x – ρ διαιρεί το P(x).***
- ✓ ***Το x – ρ είναι διαιρέτης του P(x).***
- ✓ ***Το P(x) έχει παράγοντα το x – ρ.***
- ✓ ***Το x – ρ είναι παράγοντας του P(x).***
- ✓ ***Η διαίρεση του P(x) με το x – ρ είναι τέλεια.***
- ✓ ***Ο αριθμός ρ είναι ρίζα του P(x).***
- ✓ ***Ισχύει ότι P(ρ) = 0.***
- ✓ ***Το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x) : (x – ρ) είναι ίσο με μηδέν.***

Αυτό σημαίνει ότι αν ισχύει (αν δοθεί) μία από αυτές, τότε θα ισχύουν συγχρόνως όλες μαζί. Συνήθως όλες αυτές τις προτάσεις τις συσχετίζουμε με την (viii), διότι η πρόταση P(ρ) = 0 είναι αμέσως αξιοποιήσιμη.

Σχήμα Horner

Χρησιμοποιείται για διαιρέση ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x-ρ.
Είναι ένας πίνακας με τρείς γραμμές.
Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου (Συμπληρώνουμε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν).
Στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής γράφουμε τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου .
Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ.
Κάθε άλλο στοιχείο της τρίτης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.
Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $\boldsymbol{P(x):(x-\rho)}$ ***.***
Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

Ασκήσεις

22. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) $(3x^5+x^3-\ 2x^2+\ 9)\ :\ (x^2+1)$

β) $(x^4-3x^3+x-5):(x^3+1)$

γ) $(x^3-2\alpha x+3\alpha^2):(x-3\alpha)$

δ) $[3x^3-\left(2\alpha+3\alpha^2\right)x+3\alpha^2]:(x-\alpha)$

23. Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις:

α) $\left(12x^3-12x^2+10x-5\right):\left(3x^2-2x+6\right)$

β) $\left(x^3-1\right):\left(x-1\right)$

γ) $\left(2x^2-4x^3-2x+x^4+1\right):\left(1+x^2-x\right)$

δ) $\left(x^3+x^2-x+3\right):\left(x^2-3x\right)$

24. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων:

α) $\left(\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}-3\right):\left(\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+2\right)$

β) $\left(5\mathrm{x}^2-12\mathrm{x}-32\right):\left(\mathrm{x}-4\right)$

γ) $\left(3\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}-3\right):\left(\mathrm{x}+3\right)$

δ) $\left(\mathrm{x}^4-\mathrm{k}^4\right):\left(\mathrm{x}-\mathrm{k}\right)$

25. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(2\mathrm{x}^3-7\mathrm{x}^2+11\mathrm{x}-4\right):\left(\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+4\right)$ χωρίς να κάνετε τη διαίρεση.

26.α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης
$(x^3 - 6x^2 + 11x - 2) : (x - 3)$.

β) Αν $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda$ να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x) : (x - 3)$ να έχει υπόλοιπο 0.

(τράπεζα θεμάτων)

27. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 8$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

α) $P(x) : (x - 1)$ **β)** $P(x) : (x + 2)$

28. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4x^{2017} - 5x^{2018} + 1$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

α) $P(x) : (x - 1)$ **β)** $P(x) : (x + 1)$

29. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) που όταν διαιρείται με $x^2 + 1$ δίνει πηλίκο $3x + 2$ και υπόλοιπο $-x + 3$.

30. Να βρείτε τα κ, λ ώστε το $P(x) = x^4 + 1$ να διαιρείται ακριβώς με $x^2 + \kappa x + \lambda$.

31. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να βρεθούν τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων :

α) $\left(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x - 14\right) : (x - 2)$ **β)** $\left(2x^3 - x^2 + 7x + 5\right) : (x + 1)$

γ) $\left(x^5 - 3x^2 + x + 1\right) : (x - 1)$ **δ)** $\left(5x^2 - 2\alpha x - 3\alpha^2\right) : (x - \alpha)$

32. Αν το $x - 3$ είναι παράγοντας του P(x), να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $Q(x) = P(4x - 5)$.

33. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (2\beta - 1)x^2 + (\alpha - \beta)x + 1$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$, να έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$, να είναι 4.

34. Να βρείτε τα α, β, ώστε το πολυώνυμο
$P(x) = x^4 + (2\alpha + 1)x^3 + (3 - \beta)x^2 + 5\beta x - 2$ να έχει παράγοντα το $x^2 - 3x + 2$.

35. Το πολυώνυμο P(x) αν διαιρεθεί με το (x - 2) δίνει πηλίκο $\left(x^2 - 3x + 2\right)$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό υ.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β) Αν P(1) = 10, να βρείτε το υ.

γ) Αν υ=10 ,να βρείτε το P(x).

(τράπεζα θεμάτων)

36. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το x^2+x-2 είναι $3x+1$, να βρείτε το υπόλοιπο των διαιρέσεων $P(x):(x-1)$ και $P(x):(x+2)$.

37. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές και $P(1)=P(3)=5$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-4x+3\right)$ είναι $\upsilon=5$.

38. Αν οι διαιρέσεις ενός πολυωνύμου $P(x)$ με τα $x+1$ και $x-2$ δίνουν αντίστοιχα υπόλοιπα 3 και -3, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-x-2\right)$.

39. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x+3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+3)$.

40. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$ είναι 8 και με το $x+2$ είναι -7, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)(x+2)$.

41. Να βρείτε το α, $\beta\in\mathbb{R}$,ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2\alpha x^2+\beta x+6$,να διαιρείται με το γινόμενο $(x-2)(x-3)$.

42. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\kappa x^2+(\lambda-1)x+5$ να έχει για παράγοντα το $(x-1)(x+2)$.

43. Να βρείτε το α, $\beta\in\mathbb{R}$,ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3-5x^2+\beta x+12$,να έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

44. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x(x-2)^{1821}+(x-1)^{1453}+2$

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $Q(x)=x^3-3x^2+2x$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $10\cdot 8^{1821}+9^{1453}-89$ είναι πολλαπλάσιο του 720.

45. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $(x-2)P(x)+(x-1)P(x+2)=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι -2, τότε:

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-4$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-6x+8.

γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

δ) Αν το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού, τότε να βρεθεί.

46. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με x +1 αφήνει υπόλοιπο 16 + P(1) και διαιρούμενο με x -1 αφήνει υπόλοιπο 16 - P (-1) , τότε:

α) να αποδείξετε ότι P(1) = 0 και P(-1) = 16

β) να αποδείξετε ότι α = 4 και β = -3

γ) να αποδείξετε ότι $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7) \neq 0$

(τράπεζα θεμάτων)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Πολυωνυμικές εξισώσεις

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$.

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου
$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, ***δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει*** $P(\rho) = 0$.

Θεώρημα ακεραίων ριζών

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ ***με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος*** $\rho \neq 0$ ***είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου*** α_0.

Παρατηρήσεις

✓ ***Για να λύσουμε μία πολυωνυμική εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου του δευτέρου:***

- ***Μεταφέρουμε όλους τους όρους σ' ένα μέλος***
- ***Κάνουμε παραγοντοποίηση αν γίνεται εύκολα οπότε έχουμε γινόμενο παραγόντων ίσο με το μηδέν δηλαδή***
  $P(x) = 0 \Leftrightarrow A_1(x) \cdot A_2(x) \cdot \ldots \cdot A_\nu(x) = 0 \Leftrightarrow$
  $A_1(x) = 0$ ή $A_2(x) = 0$ ή... $A_\nu(x) = 0$
- ***Βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου.***
- ***Επαληθεύουμε τους διαιρέτες στην εξίσωση με αντικατάσταση.***
- ***Με όποιο την επαληθεύει κάνουμε σχήμα horner για τη διαίρεση*** $P(x) : (x - \rho)$ ***όπου ρ ο διαιρέτης που βρήκαμε.***
- ***Αν*** $\pi(x)$ ***το πηλίκο της διαίρεσης*** $P(x) : (x - \rho)$ ***,λύνουμε την εξίσωση*** $\pi(x) = 0$.

  Αν το πολυώνυμο π(x) είναι 1ου ή δευτέρου βαθμού η εξίσωση λύνεται εύκολα.
  Αν είναι μεγαλύτερου βαθμού επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το π(x).

✓ ***Για να βρούμε τα σημεία τομής μιας συνάρτησης f με τον άξονα χ΄χ λύνουμε την εξίσωση*** $f(x) = 0$.
Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ ***οι ρίζες της εξίσωσης τα ζητούμενα σημεία είναι τα*** $(\rho_1, 0), (\rho_2, 0), \ldots, (\rho_\nu, 0)$

✓***Για να βρούμε τα σημεία τομής δύο συναρτήσεων f,g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.***

Αν $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ οι ρίζες της εξίσωσης τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(\rho_1, f(\rho_1)),(\rho_2, f(\rho_2)),...,(\rho_\nu, f(\rho_\nu))$ ή $(\rho_1,g(\rho_1)),(\rho_2,g(\rho_2)),...,(\rho_\nu,g(\rho_\nu))$.

Κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο της συνάρτησης που έχουμε πιο εύκολες πράξεις.

Ασκήσεις

47.Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0$ **β)** $3x^3+10x^2+2x-3=0$.

γ) $x^3-x^2-10x-8=0$ **δ)** $x^5-x^4-5x^3+5x^2+4x-4=0$.

ε) $3x^3-13x^2+13x-3=0$ **στ)** $x^3+3x^2-6x-8=0$.

48.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}=0$ **β)** $\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{7}{4}x^2-4x+3=0$

γ) $x^4-\frac{7}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}=0$ **δ)** $\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^2+2x-\frac{3}{2}=0$

49.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-10x^2+9x-2$

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $3x^2-4x+1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(τράπεζα θεμάτων)

50.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+x-12$

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το διώνυμο x-3 είναι παράγοντας του P(x).

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(τράπεζα θεμάτων)

51. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα χ΄χ:

α) $f(x)=3x^3+8x^2-15x+4$ **β)** $f(x)=x^4+3x^3-x^2-9x-6$

52.Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^4-5\mathrm{x}^3+7\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+6$ και $\mathrm{g}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^3-6\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής με τον άξονα χ΄χ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

53.Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^4-4x^3+10x^2+20x-10$ και $g(x)=5x^3-8x^2+2x+30$.

54.Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4-x^3+ax^2-5x+6$ διέρχεται από το σημείο Μ(-2,0),

α) να αποδείξετε ότι α=-14

β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες χ΄χ και y΄y.

(τράπεζα θεμάτων)

55.Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+(\alpha-1)x^2-4x-\alpha-2$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη -4.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in R$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=x+1$

56.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2-4x+\lambda$.

α) Αν P(-1) = 6, να δείξετε ότι λ = 1.

β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

(τράπεζα θεμάτων)

57.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(k-6)x^2-7x+k$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του $k\in\mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του P(x).

β) Αν κ = 6, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

(τράπεζα θεμάτων)

58.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda^2x^3-4\lambda x+3$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το x-1.

β) Αν λ=3 να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου P(x).

(τράπεζα θεμάτων)

59.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5 .

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

β) Για α=-4 να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(τράπεζα θεμάτων)

60.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για x=1 είναι 16 .

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

β) Αν α=-4 και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$ να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$.

61.Το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^4-2(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+\lambda+1$ είναι 3ου βαθμού.

α) Να δείξετε ότι λ = -1.
β) Να βρείτε το P(x).
γ) Να βρείτε τις ρίζες του P(x).

(τράπεζα θεμάτων)

62.Δίνονται τα πολυώνυμα : $P(x)=\lambda^3x^3-2\lambda^2x^2+3\lambda x-6, \lambda\in\mathbb{R}$ και $Q(x)=16x^8+15x^4-1$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1,να βρείτε το λ
β) Για $\lambda=2$
- **i)** να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x^2+1 και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης των πολυωνύμων.
- **ii)** να λύσετε την εξίσωση P(x)=0
- **iii)**να λύσετε την εξίσωση $Q(x)=0$

63.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες τα $x+1$ και $x-2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha=-5$ και $\beta=-6$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

64.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2\text{-}5x+\beta$ με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x-2 είναι ίσο με - 4, να βρείτε τα $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.
β) Αν α=-2 και β=6 , να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(τράπεζα θεμάτων)

65.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+(\beta-1)x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2+x-2 δίνει υπόλοιπο $3x+5$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=3$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=3x+5$.

66.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-18x+\beta-1$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $Q(x)=x^2+2x+1$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των α και β.
β) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του P(x).
γ) Να γίνει γινόμενο το πολυώνυμο P(x).

67.Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-(3+\alpha)x+\beta+10$ να έχει για παράγοντα το $(x-2)^2$.

68.Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$

α) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 - 4$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης, χωρίς να γίνει η διαίρεση.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

69.Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$ και $Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$,

όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

β) Αν α = 1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση P(x) = 0 δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(τράπεζα θεμάτων)

70.Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^3 + 2x^2 - \lambda x + 4 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ακέραια ρίζα.

Πολυωνυμικές ανισώσεις

✓***Για να λύσουμε μία πολυωνυμική ανίσωση βαθμού μεγαλύτερου του δευτέρου:***

- ***Μεταφέρουμε όλους τους όρους σ' ένα μέλος.***

Κάνουμε παραγοντοποίηση αν γίνεται εύκολα οπότε έχουμε να λύσουμε ανίσωση γινομένου αλλιώς με τη βοήθεια του θεωρήματος ακέραιων ριζών βρίσκουμε τις ρίζες του πολυωνύμου $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ ***και το παραγοντοποιούμε*** $P(x)=P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot...\cdot P_\nu(x)$.

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράστασης του γινομένου ξεχωριστά

Μεταφέρουμε τις παραστάσεις σε πίνακα της μορφής

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$\ldots\ldots\rho_\nu$	$+\infty$
$P_1(x)$					
$P_2(x)$					
$\vdots$					
$P_\nu(x)$					
$P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot...\cdot P_\nu(x)$		0	0	0	

όπου $\rho_1,\rho_2,...,\rho_\nu$ ***οι ρίζες των παραστάσεων*** $P_1(x),P_2(x),...,P_\nu(x)$.

Με τη βοήθεια του κανόνα προσήμων βρίσκουμε το πρόσημο του $P_1(x),P_2(x),...,P_\nu(x)$ ***στα διαστήματα που έχει χωριστεί ο άξονας από τις ρίζες και επιλέγουμε αυτό(αυτά) που ζητάει η ανίσωση.***

✓ ***Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης*** f ***:***

α) βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ λύνουμε την ανίσωση $f(x)>0$.

β) βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ λύνουμε την ανίσωση $f(x)<0$.

γ) δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ λύνουμε την ανίσωση $f(x)\leq 0$.

δ) δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ λύνουμε την ανίσωση $f(x)\geq 0$.

✓***Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης*** f ***:***

α) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g ***λύνουμε την ανίσωση*** $f(x)>g(x)$.

β) βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g ***λύνουμε την ανίσωση*** $f(x)<g(x)$.

γ) δεν βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g ***λύνουμε την ανίσωση*** $f(x)\leq g(x)$.

δ) δεν βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g λύνουμε την ανίσωση $f(x) \geq g(x)$.

Ασκήσεις

71. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $x^4+3x^3+x^2-3x-2<0$ **β)** $x^3(x+1)-2>x(x-1)$

γ) $x^3-2x^2-x+2>0$ **δ)** $x^3+3x^3 \geq 5x^2-9$

ε) $3x^4-x^3-9x^2+9x-2 \leq 0$ **στ)** $x^4-3x^3+6x \leq 4$

72. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(5x-10)(x+3)(x^2+9x+20)<0$ **β)** $(10-x^2-3x)(x^2-2x+1)>0$

γ) $(1-x)^2(x^2-8x+16) \leq 0$ **δ)** $(x^2-4x+6)(4x+5-x^2) \geq 0$

73. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $(2x^2+5)(x^2+3x)(x^2-2x+1)<0$ **β)** $(3-x^2-2x)(x^3-7x+6)>0$

γ) $(x^3-8)(2x+1)^{2018}(x^2-16)^{2017} \leq 0$ **δ)** $(x^3-x-2)(x^3+x-2) \geq 0$

74. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+(x+1)^2$ δεν έχει κανένα σημείο κάτω από τον x΄x.

75. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+8x-4$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ.

(τράπεζα θεμάτων)

77. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2,\ x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του $f(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $f(x)$ με το $\pi(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$ και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(x)$ με το $x-2$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

78. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda x^3+x^2-(\lambda+5)x+4,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Αν το $P(x)$ έχει ρίζα για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, τότε:

α) να βρείτε τη ρίζα.

β) να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του.

γ) Αν $\lambda=1$, να λύσετε την εξίσωση $\left(P(x)-x^3\right)^2+6P(x)=6x^3-5$.

79. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το x^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left(P(x)-2\right)^3+\left(P(x)-2\right)^2+P(x)>2$.

80. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-5x+4,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

81. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0,1 και 3 .

α) Να δείξετε ότι β=-4,γ=3 και δ=0.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

(τράπεζα θεμάτων)

82. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$.

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για x = 1 είναι ίση με 10 και P(2) = 10, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

β) Αν α = -5 και β = 8, να λύσετε την ανίσωση P(x) > 10.

(τράπεζα θεμάτων)

83. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ Αν το P(x) έχει παράγοντα το x + 1 και P(2) = 18,τότε:

α) Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = 2

β) Να λύσετε την εξίσωση: P(x) = 0

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x)\le 0$

(τράπεζα θεμάτων)

84. Έστω P(x) πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε P (1) = 0 και P(2) = 8.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 8 .

γ) Να λύσετε την ανίσωση P(x) > 2 .

(τράπεζα θεμάτων)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Κλασματικές εξισώσεις

Για να λύσουμε μία κλασματική εξίσωση:
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών .
- Βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες δεν μηδενίζεται το Ε.Κ.Π
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών
- Επιμεριστική ιδιότητα όπου χρειάζεται
- Αναγωγή ομοίων όρων
- Καταλήγουμε σε μία πολυωνυμική εξίσωση την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.
- Δεν ξεχνάμε τους περιορισμούς.

Ασκήσεις

85.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x^2-3x+2}{x}+\frac{2}{x^2-x}=\frac{1-3x^2}{x-1}$ **β)** $\frac{x^3-11x}{x-9}=\frac{2}{x-1}$

γ) $\frac{3x^2}{x-2}-\frac{10}{x^2+2x}-\frac{10x^2+20}{x^3-4x}=4+\frac{9x}{x^2-4}$ **δ)** $\frac{x^2}{x-1}+\frac{6}{x-3}=\frac{4}{x^2-3x+2}$

86.Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{x^2}{x+2}=\frac{4(x-2)}{x}-\frac{x-10}{x^2+2x}$ **β)** $\frac{x^3+6x-5}{x^2-9}+\frac{3x}{x+3}+\frac{5}{x-3}+2=0$

γ) $\frac{2x^2}{x+2}=\frac{3x}{x-1}-\frac{2x+3}{x^2+x-2}$ **δ)** $x^2+\frac{3x^2}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{3-x^2}{x^2-1}$

Εξισώσεις με βοηθητικό άγνωστο

Για να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής
$\alpha_\nu f^\nu(x)+\alpha_{\nu-1}f^{\nu-1}(x)+...+\alpha_1 f(x)+a_0=0$ **:**
-Θέτουμε $f(x)=\omega$ (1) οπότε έχουμε να λύσουμε μία πολυωνυμική εξίσωση
$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+a_0=0$ ***, την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***
- Τέλος αντικαθιστούμε τις λύσεις του ω που βρήκαμε στην (1) και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης.

Ασκήσεις

87. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^8-x^4-2=0$ **β)** $27(x+3)^6-28(x+3)^3+1=0$

γ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=0$ **δ)** $x^4-5x^2+6=0$

88. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2-3x-2)^3+(x^2-3x-4)^2-8=0$

β) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$

γ) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-8=0$

δ) $(x^2-2)^4-3(x^2-2)^3+9(x^2-2)^2-21(x^2-2)+14=0$

89. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $4\eta\mu^3x+8\eta\mu^2x-\eta\mu x-2=0$ **β)** $2\sigma\upsilon\nu^4x-\sigma\upsilon\nu^3x+\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x-1=0$.

90. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\varepsilon\varphi^3x-\varepsilon\varphi^2x-3\varepsilon\varphi x+3=0$

β) $3\sqrt{3}\sigma\varphi^3x+(3\sqrt{3}-6)\sigma\varphi^2x-(6+3\sqrt{3})\sigma\varphi x-3\sqrt{3}=0$

91. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\eta\mu^3x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2x+\sqrt{3}=0$ **β)** $16\sigma\upsilon\nu^4x+16\eta\mu^2x-13=0$

92. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $(2\eta\mu x-1)^4+(2\eta\mu x-1)^2-2=0$ **β)** $2\eta\mu^3x+5\eta\mu^2x+5\eta\mu x+2=0$

γ) $2\sigma\upsilon\nu^4x-5\sigma\upsilon\nu^3x+5\sigma\upsilon\nu x-2=0$ **δ)** $2\sigma\upsilon\nu^3x-5\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu x+3=0$

Άρρητες εξισώσεις

Για να λύσουμε μία άρρητη εξίσωση $\left(\sqrt[\nu]{A(x)}=B(x)\right)$ ***:***

- Βρίσκουμε τα διαστήματα(διάστημα) του x για τα οποία $A(x)\geq 0$ και $B(x)\geq 0$.

- Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην ν-οστή δύναμη

- Κάνουμε πράξεις καταλήγουμε σε μία πολυωνυμική εξίσωση ,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

- Τέλος επαληθεύουμε τις λύσεις αν ανήκουν στα διαστήματα (διάστημα) που βρήκαμε στο 1º βήμα.

Ασκήσεις

93.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{x+1}=2$ **β)** $\sqrt{x+3}=-4$ **γ)** $\sqrt{2x+7}=x+2$ **δ)** $\sqrt{x}=-2x$

94.Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{x+7}=5$ **β)** $\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{5}$ **γ)** $\sqrt[3]{2x+25}-3=0$ **δ)** $\sqrt{25-x^2}-4=0$

95.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{5x+10}=8-x$ **β)** $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}=2$ **γ)** $\sqrt{x+32}+\sqrt{x}=16$

δ) $2\sqrt{x+5}=x+2$ **ε)** $\sqrt{x+1}=\sqrt{x}+2$ **στ)** $\sqrt{x}-2=\sqrt{x+1}$

ζ) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$ **η)** $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}$

96.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x}=\sqrt[3]{-x+2}$ **β)** $\sqrt{x+1}=\sqrt[4]{x+3}$

97.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-2017}=\lambda$ **β)** $\sqrt{4x^2+1}=2x+\lambda$

γ) $\sqrt{x^2+4}=-x+\lambda$ **δ)** $\sqrt{9-x^2}=\lambda$

Αντίστροφες εξισώσεις

Για να λύσουμε μία αντίστροφη εξίσωση διαιρούμε όλους τους όρους με το $x^2 \neq 0$,οπότε προκύπτει εξίσωση της μορφής $\alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x\pm\frac{1}{x}\right)+\gamma=0$.

Θέτουμε $x+\frac{1}{x}=\omega$ οπότε $x^2+\frac{1}{x^2}=\omega^2\pm 2$ ……….

Ασκήσεις

98.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$ **β)** $2x^4-x^3+10x^2-x+2=0$

99.Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x=0$ **β)** $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

Κλασματικές ανισώσεις

✓ ***Ανισώσεις της μορφής*** $\frac{A(x)}{B(x)}>0(<0)$.

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα.

Επομένως $\frac{A(x)}{B(x)}>0 \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x)>0$ ***και*** $\frac{A(x)}{B(x)}<0 \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x)<0$

αφού,καμία από τις λύσεις της $A(x)\cdot B(x)>0$ ***και*** $A(x)\cdot B(x)<0$ ***δεν μηδενίζει το*** $B(x)$.

✓***Ανισώσεις της μορφής*** $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0(\leq 0)$.

-Οι ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ ***αληθεύουν για τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως*** $A(x)\cdot B(x)\geq 0$ ***και*** $B(x)\neq 0$

-Οι ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}\leq 0$ ***αληθεύουν για τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως*** $A(x)\cdot B(x)\geq 0$ ***και*** $B(x)\neq 0$.

✓***Ανισώσεις της μορφής*** $\frac{A(x)}{B(x)}>\Gamma(x)(<\Gamma(x))$.

Για να λύσουμε τις ανισώσεις αυτής της μορφής φέρνουμε το $\Gamma(x)$ ***στο 1ο μέλος , κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα οπότε έχουμε πλέον τη μορφή*** $\frac{A(x)}{B(x)}>0(<0)$

✓***Ανισώσεις της μορφής*** $\frac{A(x)}{B(x)}\geq\Gamma(x)(\leq\Gamma(x))$.

Για να λύσουμε τις ανισώσεις αυτής της μορφής φέρνουμε το $\Gamma(x)$ ***στο 1ο μέλος , κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα οπότε έχουμε πλέον τη μορφή*** $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0(\leq 0)$.

Ασκήσεις

100. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\dfrac{2x^2-x-1}{(2x-2)x}>0$ **β)** $\dfrac{(-x)(x^2+3x+2)}{x^2-5x+6}\geq 0$ **γ)** $\dfrac{6-x-x^2}{(x-1)(x^2+4)}\geq 0$

δ) $\dfrac{x^3-6x+7}{x^2}\geq 0$ **ε)** $\dfrac{(x+2017)^2(3x^2+4)}{2x-7}\leq 0$ **στ)** $\dfrac{2x^2-8}{3x^2-8x-3}\geq 0$

101. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\dfrac{x^2-2x-3}{x+2}>0$ **β)** $\dfrac{(1-x)(x^2+x+2)}{x^2+4x+3}\geq 0$ **γ)** $\dfrac{2-x-x^2}{x^2-4}\geq 0$

δ) $\dfrac{x^3+x-2}{x-3}>0$ **ε)** $\dfrac{(2x+3)(x^2+2)}{x^3-7x+6}>0$ **στ)** $\dfrac{x^3-1}{x^2-3x-4}\geq 0$

102. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\dfrac{2x-1}{x+3}<1$ **β)** $\dfrac{x+1}{3x-1}>3$ **γ)** $\dfrac{4x+7}{x+2}\leq 3$

δ) $\dfrac{5x-3}{x^2+3}\geq 1$ **ε)** $\dfrac{2x^2-3x+3}{x+1}<x$ **στ)** $\dfrac{x^3-2x}{5x-6}\geq 1$

Άρρητες ανισώσεις

Για να λύσουμε μία άρρητη ανίσωση $\left(\sqrt[\nu]{A(x)} > B(x)\right)$:

- Αν $B(x) < 0$ για κάθε πραγματικό x ,τότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \,/\, A(x) \geq 0\}$

- Αν $B(x) = 0$ για κάθε πραγματικό x ,τότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \,/\, A(x) > 0\}$

- Αν *δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του* $B(x)$ *,βρίσκουμε τα διαστήματα (διάστημα) του x για τα οποία* $A(x) \geq 0$ *και* $B(x) \geq 0$.

- Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην ν-οστή δύναμη

- Κάνουμε πράξεις καταλήγουμε σε μία πολυωνυμική ανίσωση ,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

- Τέλος συναληθεύουμε τις λύσεις τις ανίσωσης με τα διαστήματα (διάστημα) του x για τα οποία $A(x) \geq 0$ και $B(x) \geq 0$.

Για να λύσουμε μία άρρητη ανίσωση $\left(\sqrt[\nu]{A(x)} < B(x)\right)$:

- Αν $B(x) \leq 0$ για κάθε πραγματικό x ,τότε η ανίσωση είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

- Αν *δεν γνωρίζουμε το πρόσημο του* $B(x)$ *,βρίσκουμε τα διαστήματα (διάστημα) του x για τα οποία* $A(x) \geq 0$ *και* $B(x) \geq 0$.

- Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην ν-οστή δύναμη

- Κάνουμε πράξεις καταλήγουμε σε μία πολυωνυμική ανίσωση ,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

- Τέλος συναληθεύουμε τις λύσεις τις ανίσωσης με τα διαστήματα (διάστημα) του x για τα οποία $A(x) \geq 0$ και $B(x) \geq 0$.

Ασκήσεις

103. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\sqrt{x+2} \geq 0$ **β)** $\sqrt{x+2017} > -4$ **γ)** $\sqrt{2017x+14} < -2018$ **δ)** $\sqrt{x} \leq 0$

ε) $\sqrt{x+2017} > 0$ **στ)** $\sqrt{2017x+2017} < 0$

104. Να λύσετε τις ανισώσεις :

α) $\sqrt{6x+6} \geq 12$ **β)** $\sqrt{x^2-2x-3} \leq \sqrt{5}$ **γ)** $\sqrt[3]{x+5} - 3 > 0$ **δ)** $\sqrt{9-x^2} - 1 < 0$

105. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\sqrt{x+1} \leq 8 - x$ **β)** $\sqrt{2x+2} > x - 3$ **γ)** $\sqrt{x+6} \geq x$

δ) $3\sqrt{x+24} < 6x + 9$ **ε)** $\sqrt{x+15} < \sqrt{x} + 3$ **στ)** $\sqrt{x-3} \geq 1 - \sqrt{x-1}$

106. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\sqrt{3x+7} < \sqrt{x+3}$ **β)** $x-1 \geq \sqrt{x+5}$ **γ)** $\sqrt{x^2+x+3} \geq x+\frac{1}{2}$

Ανισώσεις με βοηθητικό άγνωστο

Για να λύσουμε μία ανίσωση της μορφής

$\alpha_\nu f^\nu(x)+\alpha_{\nu-1} f^{\nu-1}(x)+\ldots+\alpha_1 f(x)+a_0 > 0(<0)(\geq 0)(\leq 0)$ **:**

- Θέτουμε $f(x)=\omega$ (1) οπότε έχουμε να λύσουμε μία κλασματική ανίσωση

$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+a_0 = 0 > 0(<0)(\geq 0)(\leq 0)$, την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

- Γράφουμε τις λύσεις της ανίσωσης σε μορφή διαστημάτων (διάστημα)

- Αντικαθιστούμε το ω με $f(x)$, και λύνουμε τις ανισώσεις που προκύπτουν.

Ασκήσεις

107. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6-7x^3-8 \geq 0$

β) $x^4-3x^2-4 \leq 0$

γ) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4>0$

δ) $(x\text{-}1)^{10}-33(x\text{-}1)^5+32<0$

108. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x-2+\sqrt[3]{x-2}-2 \geq 0$

β) $x-3\sqrt{x}+2<0$

γ) $x^2+1+\sqrt{x^2+1}-2 \leq 0$

δ) $\sqrt[3]{x^2-6x+9}-2\sqrt[3]{x-3}-3>0$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

109. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x)=x^4-3x^3+(\alpha+2\beta)x^2-3x+\alpha+\beta$.

Αν έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x-2 :

α) Να βρείτε τα α ,β

β) Αν α=β=1

i) να λύσετε την εξίσωση P(x)=0

ii) να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{-\dfrac{\mathrm{P}(x)}{x^2+1}}=2-x$

iii) να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{2x^2-5x+2}\leq 0$

iv) να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x^2-9}>x^2-3x+2$

110. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=ax^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$,όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι ίσο με 2 ,να βρείτε τα α και β.

β) Αν α=2 και β=4

i) να βρείτε τα σημεία στα οποία η πολυωνυμική συνάρτηση P(x) τέμνει τον άξονα χ΄χ

ii) να βρείτε τα διαστήματα στα οποία βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ

iii) να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\mathrm{P(x)}}{x^2-x-12}\leq 0$

111. Δίνεται το πολυώνυμο: $\mathrm{P}(\mathrm{x})=2\mathrm{x}^4-3\mathrm{x}^3+3\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+1$

α) Να αποδείξετε ότι το $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ διαιρείται με το πολυώνυμο $2\mathrm{x}-1$. Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(\mathrm{x})$;

β) Να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})=0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})\leq 0$.

δ) Να βρείτε το υπόλοιπο υ της διαίρεσης του $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ με το x + 1.

ε) Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^4\mathrm{x}-3\eta\mu^3\mathrm{x}-3\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{x}-3\eta\mu\mathrm{x}+4=0$

112. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{\nu}+2\mathrm{x}^{\nu-1}+3\mathrm{x}+\nu^2-\nu-8,\ \nu\in\mathbb{N},\mathrm{x}\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζα το -1.

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{P}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^4+2\mathrm{x}^3+3\mathrm{x}+4$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})=0$ δεν έχει άλλες ακέραιες ρίζες .

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})+\mathrm{P}(-\mathrm{x})<40$

113. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x-10)(x-20)^{20}(x-30)^{30}$.

α) Να βρείτε το βαθμό του. **β)** Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=-x+10$ **δ)** Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$

114. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x+1$ είναι -18.

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+1)$.

Έστω $P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{P(x)}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P^2(x)>-2P(x)$.

115. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=4x^3-3\eta\mu\omega\cdot x^2-\sigma\upsilon\nu^2\omega\cdot x+2,\ \omega\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

α) Να βρείτε το ω για το οποίο το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\eta\mu\omega$ να είναι ίσο με 2.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=(2\eta\mu\omega)^2$ για $\omega=\frac{3\pi}{4}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $6\eta\mu\omega+2P(1)-11=0$.

116. Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x)=\left(\kappa^2-1\right)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο P(x) είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x -1 είναι ίσο με - 4.

β) Για κ = 1 και λ = -2

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x -1.

ii. Να λύσετε την εξίσωση P(x) + 4 = x^2 -1.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1$.

(τράπεζα θεμάτων)

117. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+ax^2+\beta x+2$ με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x - 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x +1 είναι ίσο με -6, να βρείτε τα $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

β) Αν α = -5 και β = 1, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3 3\omega+5\eta\mu^2 2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0$.

(τράπεζα θεμάτων)

118. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x + 2 .

β) Για κ = -7 και λ = 6 να λυθεί η εξίσωση P(x) = 0 .

γ) Για κ = -7 και λ = 6 να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x-5} \geq 0$.

119. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x) \geq 0$

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$

120. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση P(x):(x - α) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το (x - α) διαιρεί το P(x).

γ) Αν $\alpha = -1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)P(x) \leq 0$.

(τράπεζα θεμάτων)

121. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 30cm^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y = \dfrac{60}{x}$ και

$(x+1)^2 = x^2 + y^2$

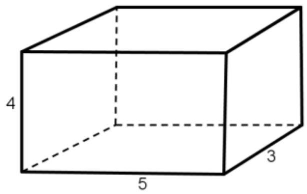
β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$.

γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

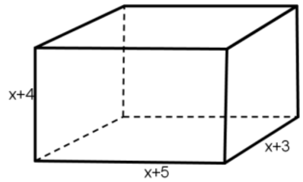
(τράπεζα θεμάτων)

122. Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm.



Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3 , δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.
Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x.

α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$.

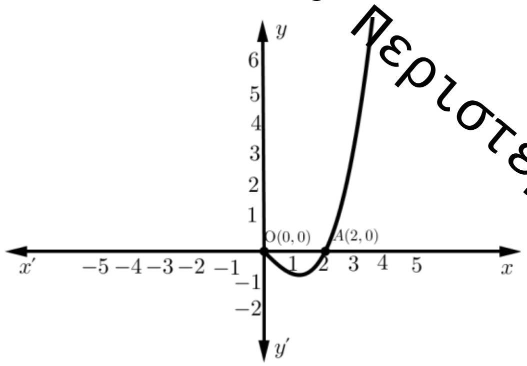


(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: V = α·β·γ)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).

(τράπεζα θεμάτων)

123. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \gamma x + \delta, x \in R$ και γ, δ πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι γ = -1 και δ = 0.

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, x \in R$:

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in R$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για x < 0.

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις

$$f(x) = -\frac{3}{4} \text{ και } f(x) = \frac{3}{4}.$$

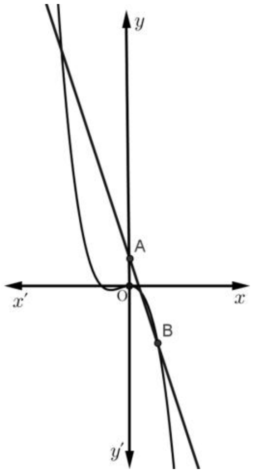
124. Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α (0, 1) και Β (1, -2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

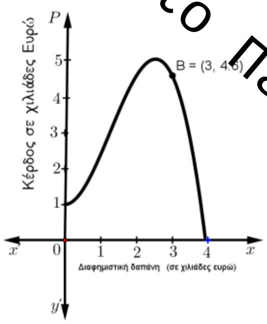
β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση y = -3x + 1, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$

(τράπεζα θεμάτων)



125. Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν: $\mathrm{P}(x) = -\,0{,}5x^3 + 1{,}9x^2 + 1\,,\ 0 \le x < 4,$ όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.



α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος.

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i.

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ;

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Αν α>0,μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος ,τότε ορίζουμε:	$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$
Επιπλέον αν μ ,ν θετικοί ακέραιοι ,ορίζουμε :	$\boxed{0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0}$

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

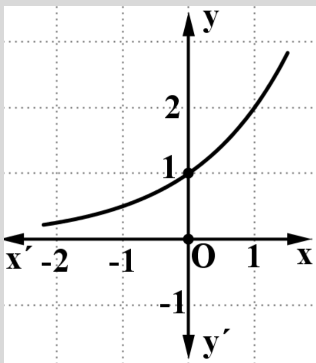
Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,τότε :		
$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$	$\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$	$\left(\alpha^{x_1}\right)^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$
$(\alpha\beta)^x = \alpha^x \beta^x$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$	

Εκθετική συνάρτηση

Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$,στη δύναμη α^x ,ορίζουμε την συνάρτηση :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$, η οποία στην περίπτωση που είναι $\alpha \neq 1$,λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α .
Αν είναι $\alpha = 1$,τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

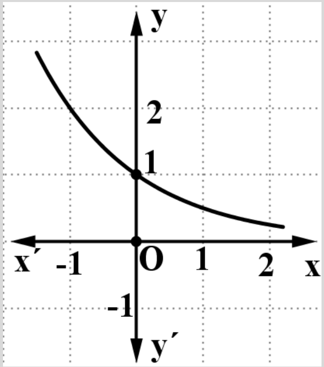
Για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$,
ισχύει ότι :

- ***Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$***
- ***Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$***
- ***Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.***
  Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι
  $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$
- ***Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0,1) και έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x.***



Για κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha^x$ με $0<\alpha<1$, ισχύει ότι :

- ***Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$***
- ***Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$***
- ***Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.***
  Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι
  $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$
- ***Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x.***



Ο αριθμός e

Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = 2{,}718280...$ Τον αριθμό στον οποίο τείνει η ποσότητα $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ καθώς το ν αυξάνεται απεριόριστα τον συμβολίζουμε με e (Euler).

Εκθετικές εξισώσεις

Για να λύσουμε μία εκθετική εξίσωση :

- ***Αν έχουμε δυνάμεις της μορφής $\alpha^{\gamma x+\delta}$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\alpha^{\gamma x+\delta} = \alpha^{\gamma x}\cdot a^{\delta}$.***

✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και τον ίδιο εκθέτη ,τις μεταφέρουμε στο ένα μέλος και τους αριθμούς στο άλλο,οπότε έχουμε :***
$\kappa_1\alpha^{f(x)} + k_2 a^{f(x)} + ... = \lambda_1 + \lambda_2 + ...$
Κάνουμε τις πράξεις που γίνονται(αναγωγή ομοίων ορων κ.λ.π) οπότε καταλήγουμε $\alpha^{f(x)} = \beta \Leftrightarrow \alpha^{f(x)} = \alpha^{\varepsilon} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \varepsilon.....$

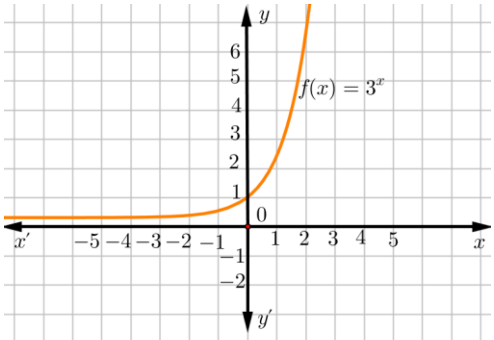
✓***Αν έχουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και εκθέτες πολλαπλάσια της ίδιας παράστασης*** $\kappa_1\alpha^{\lambda f(x)} + k_2\alpha^{\mu f(x)} + k_2\alpha^{\nu f(x)} + ... = ...,\ \lambda \neq \mu \neq \nu$:

- ***Θέτουμε $\alpha^{f(x)} = \omega$ (1) και καταλήγουμε σε πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + a_0 = 0$,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***
- ***Τέλος αντικαθιστούμε τις λύσεις του ω που βρήκαμε στην (1) και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης όπως στην προηγούμενη περίπτωση.***

✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με διαφορετική βάση και ίδιο εκθέτη διαιρούμε με την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση ή με τη μικρότερη και μετά έχουμε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις..***

Ασκήσεις

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x$, με $x\in R$



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h;

(τράπεζα θεμάτων)

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2^{x-1}=\sqrt{2}$ **β)** $3^{x^2-4x+6}=27$ **γ)** $5^{x^4-5x^2+4}=1$

δ) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+4}=\left(\sqrt{27}\right)^{2x+18}$ **ε)** $18^{8-4x}=\left(54\sqrt{2}\right)^{3x-2}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}=\left(\frac{5}{3}\right)^{x+6}$ **β)** $\left(\sqrt{3}+1\right)^{x^4-5x^2+4}=1$ **γ)** $5^{\sqrt{x}}=625$

δ) $3^{x^2-9x+11}=27$ **ε)** $2^{x^2-2x}=8^{x-2}$ **στ)** $3^x=81^{2-|x|}$

ζ) $27^{\frac{x+1}{x-2}}=3^{2x-4}$ **η)** $3^{x^2-3x}=\frac{1}{9}$ **θ)** $\left(4^{3-x}\right)^{2-x}=1$

ι) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4-5x}$ **κ)** $\sqrt[x-2]{27^{x+1}}=9^{x-2}$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^{x+3}-2^{x+2}+2^{x+1}=48$ **β)** $3^{x+2}+5\cdot 3^x+3^{x-1}-3^{x-2}=128$

γ) $3^{x-1}-\frac{15}{3^{x+1}}+3^x-\frac{21}{3^{x+1}}=0$ **δ)** $5^{x^2+1}+25^{x^2}=6$ **ε)** $3^x-4\sqrt{3^x}+3=0$

στ) $e^{2x}+e=e^x+e^{x+1}$ **ζ)** $8^x-3\cdot 4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$

η) $3^{x-1}-\frac{4}{3}\sqrt{3^x}=-1$ **θ)** $3\left(\frac{3}{2}\right)^x+2\left(\frac{2}{3}\right)^x=5$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left(5^{x}-\sqrt{5}\right)\left(e^{x}+1\right)=0$ **β)** $\left(13^{2x+1}-1\right)\left(e^{3x-3}-\dfrac{1}{e^{2}}\right)=0$

γ) $\left(2^{|2x-4|}-2\right)\left(3^{x^{2}-4}-3\right)\cdot\left(x^{2}-5x+6\right)=0$ **δ)** $\left(2^{x}-3\cdot\sqrt{2^{x}}+2\right)\left(2^{3x}-7\cdot 2^{x}+6\right)$

ε) $\left(3^{2x}+2018\right)\left(e^{2018x+2018}+2018\right)\cdot x=0$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7^{2x}-8\cdot 7^{x}+7=0$ **β)** $13^{2x}-11\cdot 13^{x}=26$

γ) $2^{2x}-3\cdot 2^{x+3}+128=0$ **δ)** $3^{2x}+81=10\cdot 3^{x+1}$

δ) $2^{x}-5\cdot\sqrt{2^{x+4}}+64=0$ **ε)** $5^{x}-6\cdot\sqrt{5^{x+2}}+125=0$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^{x+3}-3^{x+1}=3^{x+3}-3\cdot 2^{x+2}$ **β)** $3^{x+1}-2^{x}=3^{x-1}+2^{x+3}$

γ) $3\cdot 2^{x-4}-2^{x-1}=5^{x-2}-6\cdot 5^{x-3}$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$ **β)** $5^{x+3}-51\cdot 7^{x}=7^{x+2}-71\cdot 5^{x}$

γ) $\dfrac{1}{2}\cdot 3^{x-1}+2\cdot 5^{x}=5^{x+1}-\dfrac{3}{2}\cdot 3^{x+1}$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2\cdot 4^{x}+3\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$ **β)** $9^{x}+6^{x}=2\cdot 4^{x}$ **γ)** $4^{x}=-2\cdot 14^{x}+3\cdot 49^{x}$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7\cdot 25^{x}-12\cdot 35^{x}+5\cdot 49^{x}=0$ **β)** $27\cdot 4^{x}+8\cdot 9^{x}=30\cdot 6^{x}$

γ) $2\cdot 9^{x}-5\cdot 6^{x}+3\cdot 4^{x}=0$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left(x^{2}-2x\right)^{x^{2}-3x}=1$ **β)** $\left(x^{2}-5x+6\right)^{x^{2}-2x}=1$ **γ)** $\left(x-3\right)^{x^{2}}=\left(x-3\right)^{x+2}$

Εκθετικές ανισώσεις

Για να λύσουμε μία εκθετική ανίσωση :

- ***Αν έχουμε δυνάμεις της μορφής*** $\alpha^{\gamma x+\delta}$ ***χρησιμοποιούμε την ιδιότητα*** $\alpha^{\gamma x+\delta}=\alpha^{\gamma x}\cdot a^{\delta}$.

✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και τον ίδιο εκθέτη ,τις μεταφέρουμε στο ένα μέλος και τους αριθμούς στο άλλο ,οπότε έχουμε :***

$$\kappa_1\alpha^{f(x)}+k_2a^{f(x)}+\ldots>(<)(\geq)(\leq)\lambda_1+\lambda_2+\ldots$$

Κάνουμε τις πράξεις που γίνονται(αναγωγή ομοίων ορων κ.λ.π) οπότε καταλήγουμε :

- Αν α>1 : $\alpha^{f(x)}>(\geq)\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}>(\geq)\alpha^{\varepsilon}\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>(\geq)\varepsilon.....$ ***ή***

$$\alpha^{f(x)}<(\leq)\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}<(\leq)\alpha^{\varepsilon}\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<(\leq)\varepsilon.....$$

- Αν $0<\alpha>1$ ***:*** $\alpha^{f(x)}>(\geq)\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}>(\geq)\alpha^{\varepsilon}\overset{\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<(\leq)\varepsilon.....$ ***ή***

$$\alpha^{f(x)}<(\leq)\beta\Leftrightarrow\alpha^{f(x)}<(\leq)\alpha^{\varepsilon}\overset{\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>(\geq)\varepsilon.....$$

✓***Αν έχουμε δυνάμεις με την ίδια βάση και εκθέτες πολλαπλάσια της ίδιας παράστασης*** $\kappa_1\alpha^{\lambda f(x)}+k_2\alpha^{\mu f(x)}+k_2\alpha^{\nu f(x)}+\ldots.>(<)(\geq)(\leq)\ldots.,\ \lambda\neq\mu\neq\nu$ ***:***

- Θέτουμε $\alpha^{f(x)}=\omega$ ***(1) και καταλήγουμε σε πολυωνυμική ανίσωση*** $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+a_0>(<)(\geq)(\leq)0$ ***,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***

- ***Τέλος αντικαθιστούμε στις ανισώσεις που προέκυψαν από τη λύση της πολυωνυμικής αντί για ω το ίσον του και βρίσκουμε τις λύσεις της ανίσωσης όπως στην προηγούμενη περιπτώσεις.***

✓ ***Αν έχουμε δυνάμεις με διαφορετική βάση και ίδιο εκθέτη διαιρούμε με την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση ή με τη μικρότερη και μετά έχουμε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις.***

Ασκήσεις

12.Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $2^{x^2-3x+2}<1$ **β)** $2^{x+1}<2^{2x-4}$ **γ)** $3^{x^2+3}<81$

δ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$ **ε)** $4^{x^2-7x+6}>1$ **στ)** $\left(\frac{5}{13}\right)^{x^2-x}\geq 0$.

13.Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $3^{x+2}-2\cdot3^{x+1}+3^x\leq 36$ **β)** $7^{x-2}+2\cdot7^{x-1}+7^{x+1}-7^x>2127$

γ) $2^{x-2}-\frac{8}{2^{x+2}}+2^x-\frac{14}{2^{x+1}}\geq 0$ **δ)** $5^{x^2+1}+2\cdot5^{x^2}<7$

ε) $13^x-14\sqrt{13^x}+13\leq 0$ **στ)** $e^{2x}+e\geq e^x+e^{x+1}$

ζ) $27^{x}-3\cdot 9^{x}+3^{x+2}-27>0$ **η)** $2^{x-1}-\dfrac{3}{4}\sqrt{2^{x}}\leq 5$

θ) $5\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x}+2\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x}>7$

14.Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\left(2^{x}-\sqrt{2}\right)\left(17^{x}+5\right)\left(3^{2x}-1\right)\left(5^{x}-5\right)>0$

β) $\left(3^{5x-\frac{1}{2}}-9\sqrt{3}\right)\left(e^{2x+1}-\dfrac{1}{e^{3}}\right)\left(5^{x}-1\right)\leq 0$

γ) $\left(11^{x}+2017\right)\left(17^{x^{3}}-17\right)\left(5^{x^{2}}-1\right)>0$

δ) $\left(10^{2x-1}-1000\right)\left(6^{x}+6\right)\left(17^{3x-3}-17\right)\geq 0$

ε) $\left(49-7^{x}\right)\left(25-5^{x}\right)\left(27-3^{x}\right)\leq 0$

στ) $\left(8^{x}\cdot 4^{x-9}-64\right)\left(11^{x}-11\right)\cdot 2018^{x}<0$

15.Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $4\sqrt{2^{x}}-8.2^{x}>0$ **β)** $4^{x}+8<6\cdot 2^{x}$

γ) $6^{x}+6^{x+1}<2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}$ **δ)** $25^{x}-4\cdot 5^{x}-5\geq 0$

16.Να λύσετε τις ανισώσεις: **α)** $\left(e^{x}+3\right)\left(e^{x}-1\right)>0$ **β)** $\dfrac{2^{x}-4}{2^{x}-8}\leq 0$.

17.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3\cdot 2^{x+2}-3^{x+3}\geq 3^{x+1}-2^{x+3}$ **β)** $5\cdot 2^{x}-5\cdot 3^{x+1}\leq 12\cdot 3^{x}-3\cdot 2^{x}$

γ) $6\cdot 3^{x}-2\cdot 7^{x+1}>35\cdot 7^{x}-3^{x+1}$

18.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7\cdot 3^{x+1}+5^{x+3}<3^{x+4}+5^{x+2}$ **β)** $125\cdot 5^{x}-7^{x+2}\leq 51\cdot 7^{x}-71\cdot 5^{x}$

γ) $6\cdot 3^{x-1}-5^{x+1}\geq 2\cdot 5^{x}-3\cdot 3^{x+1}$

19.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $7\cdot 9^{x}+3\cdot 49^{x}<10\cdot 21^{x}$ **β)** $9^{x}-11\cdot 15^{x}+10\cdot 25^{x}>0$

γ) $10\cdot 4^{x}\geq 29\cdot 10^{x}-10\cdot 25^{x}$

20.Να λύσετε την ανίσωση: $1+25^{\sigma\upsilon\nu^{2}x}\geq 10\cdot 5^{2\sigma\upsilon\nu^{2}x-1}$.

21.Να λύσετε την ανίσωση: $4^{2\eta\mu x+\frac{1}{2}}+2^{\eta\mu x}<3$.

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $(x-3)^{x^2-1}>1$ για $x>3$ **β)** $(x+2)^{x^2-3x-4}\geq 1$,για $x>-2$.

Εκθετικά συστήματα

Ασκήσεις

✓ ***Συνηθισμένες περιπτώσεις είναι :***

- ***Να αποτελείται από 2 εκθετικές εξισώσεις με ίδια βάση,τις οποίες λύνουμε όπως έχουμε μάθει.***
- ***Να είναι της μορφής*** $\begin{cases}\kappa_1\cdot\alpha^x+\kappa_2\cdot\beta^x=\mu\\ \kappa_3\cdot\alpha^x+\kappa_4\cdot\beta^x=\nu\end{cases}$ ***το οποίο***

μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια βοηθητικών αγνώστων $\left(\alpha^x=\omega,\beta^x=\varphi\right)$

23. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1}\\ 5\cdot 5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}4^{x-2}\cdot 2^{y-3}=1\\ 3^x\cdot 3^{y-3}=9\end{cases}$ **γ)** $\begin{cases}3^x-2^{y+3}=-5\\ 2^y-3^{x-3}=3\end{cases}$

24. Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases}5^{x+1}=25^{y-3}\\ 9^{x+y}=27\cdot 3^y\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}17^{x^2-4x+3}=1\\ x-y=4\end{cases}$

γ) $\begin{cases}5^{x-1}\cdot 25^y=1\\ 2^x\cdot 2^{y-1}=8\end{cases}$ **δ)** $\begin{cases}2\cdot 3^x-5^y=1\\ 7\cdot 3^x+3\cdot 5^y=10\end{cases}$

25. Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases}3^x+5^y=34\\ 5\cdot 3^x-3\cdot 5^y=-30\end{cases}$ **β)** $\begin{cases}7^x-5^y=44\\ 5\cdot 7^x-9\cdot 5^{y+1}=200\end{cases}$

γ) $\begin{cases}11^{3x+1}\cdot 11^{y-x}=121\\ 13^{2x-13}\cdot 13^{x-y}=13\end{cases}$ **δ)** $\begin{cases}3^{5x+1}\cdot 9^{y-2x}=8\\ 2^{2x-11}\cdot 2^{2-y}=1\end{cases}$

26. Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases}3^x=2y\\ 2^x=3y\end{cases}$ β) $\begin{cases}5^x=49y\\ 7^x=25y\end{cases}$.

Εκθετικές συναρτήσεις

Ασκήσεις

✓ ***Για να βρούμε τις τιμές μιας παραμέτρου έστω λ για τις οποίες μία συνάρτηση της μορφής $\left(\mathbf{f}(\lambda)\right)^{x}$:***

- ***ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$ λύνουμε την ανίσωση $\mathbf{f}(\lambda)>0$***
- ***είναι εκθετική λύνουμε την ανίσωση $\mathbf{f}(\lambda)>0$ και $\mathbf{f}(\lambda)\neq 1$.***
- ***είναι γνησίως αύξουσα λύνουμε την ανίσωση $\mathbf{f}(\lambda)>1$.***
- ***είναι γνησίως φθίνουσα λύνουμε την ανίσωση $\mathbf{f}(\lambda)<1$ και συναληθεύουμε με τις λύσεις της ανίσωσης $\mathbf{f}(\lambda)>0$.***

✓ ***Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης που έχει συναρτήσεις της μορφής $\left(\mathbf{f}(\lambda)\right)^{x}$ χρησιμοποιούμε ότι έχουμε μάθει στις εκθετικές ανισώσεις και εξισώσεις.***

27. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\left(4-\lambda^2\right)^x$.

α) Για ποιες τιμές του λ ορίζεται η f;
β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.
γ) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική παράσταση της f(x) να περνάει από το σημείο $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.
δ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η γραφική παράσταση της f(x) να περνάει από το σημείο Σ(2,1).

28. Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $\alpha^{38}<\alpha^{24}, a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=0$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$.

(τράπεζα θεμάτων)

29. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ∈ R η συνάρτηση f με $f(x)=(\lambda^2-2\lambda+1)^x$:

α) είναι γνησίως αύξουσα
β) είναι γνησίως φθίνουσα

30. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ∈ R ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{\lambda+3}{6-\lambda}\right)^x$:

α) ορίζεται σε όλο το R
β) είναι εκθετική
γ) είναι γνησίως αύξουσα
δ) είναι γνησίως φθίνουσα

31. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{(2018^x-1)(x^2-4x+3)(x-2)}$

β) $g(x)=\sqrt{\left(16-2^x\right)(2017x-2017)\left(2^{2x}-3\cdot 2^x+2\right)}$

γ) $h(x)=\sqrt{(e^{3x+3}-1)(e^x-1)\left(3^x-9\right)}$

δ) $k(x)=\dfrac{\sqrt{27^x-3}}{21\cdot 3^x+5^{x+3}-3^{x+4}-5^{x+2}}$

32. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{e^{-x+3}-1}$ **β)** $f(x)=\sqrt{\left(1-e^x\right)(x-2017)}$

γ) $f(x)=\sqrt{1-\left(\dfrac{2017}{2018}\right)^{4x-5}}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{81-3^x}}{2017^x-1}$.

33. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f με :

α) $f(x)=\sqrt{\left(e^x-e^2\right)\left(x^2-1\right)}$ **β)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{16-2^x}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-4}+\dfrac{1}{x+3}$

γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{2018}{2017}\right)^{4x^2-4}}}{x}$ **δ)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{e-e^x}}{e^{2x}-(e+1)e^x+e}$

34. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των:

α) f(x)= $\sqrt{\dfrac{1}{9^x}-\sqrt{3}}$ **β)** f(x) = $\sqrt{25^x-6\cdot 5^x+5}$ **γ)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{27^x-3}}{3^x-4\cdot 9^x+3\cdot 27^x}$.

Νόμος εκθετικής μεταβολής

Ασκήσεις

35. Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t)=q_0 a^t \ ,t\geq 0$ όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), $f(t)$ η ποσότητα του φαρμάκου(σε mg) και οι αριθμοί α,q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει 0 < α < 1.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ συναρτήσει της αρχικής τιμής q_0.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t)	q_0	$\frac{q_0}{2}$							

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0,6].

(τράπεζα θεμάτων)

36. Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q(t) = Qo\cdot e^{ct}$). Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια είναι: $Q(t) = 8\cdot e^{-\frac{t}{2}\cdot ln2}$

β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(τράπεζα θεμάτων)

Σύνθετα Θέματα

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(1,3) και B(2,13).

α) Να αποδείξετε ότι α = 5 και β = -7.

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y΄y.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x-31)<3$.

(τράπεζα θεμάτων)

38.α) Να λύσετε την εξίσωση: $3\cdot 4^x+2\cdot 5^x=4\cdot 3^x+5\cdot 2^x$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3\cdot 4^x+2\cdot 5^x$ και $g(x)=4\cdot 3^x+5\cdot 2^x$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της .

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{2\alpha+2}{3\alpha-3}\right)^x$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του α∈R η f είναι

i) γνησίως αύξουσα **ii)** γνησίως φθίνουσα.

β) Για α=-3 να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $3f(x)+f(x+1)<\dfrac{10}{9}$ **ii)** $\dfrac{3f(2x)+3}{10f(x)}>1$.

γ) Για α=17 να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} f(x)+3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^y=4 \\ 3f(-x)+2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-y}=5 \end{cases}$.

40. Δίνεται η γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda^3-\lambda-5\right)^x$.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου λ.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(7\cdot 3^{x+1}+5^{x+3}\right)<f\left(3^{x+4}+5^{x+2}\right)$.

γ) Να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,19)$.

δ) Αν $\lambda=3$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(-x)=2$.

41. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ και $g(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $f^{2}(x)-g^{2}(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $g(\alpha-\beta)=g(\alpha)f(\beta)-g(\beta)f(\alpha)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+2g(x)=1$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\lambda^{2}-4\lambda+4)^{x}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1,9)$.

γ) Αν $\lambda\in(2,3)$, να λύσετε την ανίσωση $f(x^{2})>f(5x-6)$.

δ) Αν $\lambda=4$, να λύσετε την ανίσωση $2f(x)+3\cdot 9^{x}-5\cdot 6^{x}\leq 0$.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5^{x}+x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι $5^{\alpha}-5^{\beta}<\beta-\alpha$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $5^{x^{2}-1}+x^{2}=5^{x+1}+x+2$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $5^{x}+x>6$

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^{x}+x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $3^{x}-3^{x+1}<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες $3^{x}-3^{x^{2}}>x^{2}-x$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $3^{x^{2}-3x}+x^{2}+6<3^{4x-6}+7x$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}+x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε τη εξίσωση $e^{x}=1-x$.

γ) Αν $\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι $e^{\alpha}-e^{\beta}<\beta-\alpha$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^{3}}-e^{x}>x-x^{3}$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+e^{x}-2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x}=2-e^{x}$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{2x}-1\right)-f\left(-e^{x}+1\right)<0$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2e^{x}}-e^{2e^{2}}=e^{e^{2}}-e^{e^{x}}$.

47. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=4^{x}+2$ και $g(x)=6\cdot 2^{x}-6$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

β) Να λύσετε την ανίσωση $g(x)+2g(-x)>0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x-1)-5\sqrt{f(x-2)-2}-1=0$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^{x}\right)>g\left(2^{x}\right)$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{g(x)}{g(x)-6}<0$.

48. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=21\cdot 3^{x}+5^{x+3}$ και $g(x)=3^{x+4}+5^{x+2}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι f,g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις.

β) Να λύσετε την εξίσωση $21\cdot 3^{x}+5^{x+3}=32$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x+4}+5^{x+2}=10$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9^{x}+3^{x}-12}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\sqrt{78}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^{3}+1\right)-f(3x-1)=0$.

ε) Να αποδείξετε ότι $9^{\alpha}-9^{\beta}<3^{\beta}-3^{\alpha}$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4^{x}+2^{x}-20}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\sqrt{52}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(3^{x}-3^{-x}\right)>f\left(3^{-x}-1\right)$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f(3x)=f(2x)+f(4x)$

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\lambda-1)^{x}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το λ.

β) Αν $\lambda=3$ να λύσετε την ανίσωση $f(2x)+16\leq 5f(x+1)$.

γ) Αν $1<\lambda<2$ να λύσετε την ανίσωση $f\left(2^x+3\right)-f\left(12-2^{3-x}\right)>0$.

δ) Αν $\lambda>2$ να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ είναι $f(x)+f(3x)<f(2x)+f(4x)$.

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-3,8)$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$

β) Να διατάξετε τους αριθμούς $f(\pi),\ f(0,789),\ f(e)$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι $f(x)+f(-x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $2f(2x)-5f(x)+2=0$.

στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(-x)-f(x)>3\big(1-f(x)\big)$.

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $3\cdot 9^x+2f(-2x)\leq 5\cdot 6^x$.

η) Να λύσετε την ανίσωση $f(-x)+3x<5$.

θ) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 3^y f(-x)=4 \\ f(-y)\cdot 3^x=9 \end{cases}$.

53. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=21\cdot 3^x+5^{x+3}$ και $g(x)=3^{x+4}+5^{x+2}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι f,g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις.

β) Να λύσετε την εξίσωση $21\cdot 3^x+5^{x+3}=32$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x+4}+5^{x+2}=10$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός

Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το
Δηλαδή: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$

Συνέπειες

$\log_\alpha \alpha^x = x$	$\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$	$\log_\alpha 1 = 0$	$\log_\alpha \alpha = 1$

✓ Ο δεκαδικός λογάριθμος logx

$10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta$

$\log 10^x = x$	$10^{\log \theta} = \theta$	$\log 1 = 0$	$\log 10 = 1$

✓ Ο φυσικός λογάριθμος lnx

$e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln \theta$

$\ln e^x = x$	$e^{\ln \theta} = \theta$	$\ln e^\theta = \theta$	$\ln e = 1$

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το x ώστε να αληθεύουν οι ισότητες:

α) $\log 100 = x$ **β)** $\ln \sqrt[4]{e} = x$ **γ)** $\log \frac{1}{1000} = x$

δ) $\ln \sqrt[3]{e^4} = x$ **ε)** $\log \sqrt[6]{x} = \sqrt[3]{2}$ δ) $\ln \sqrt[8]{x^3} = \sqrt[4]{27}$

2. Να υπολογίσετε τους λογαρίθμους:

α) $\ln \frac{e \cdot \sqrt[3]{e^2}}{\sqrt[5]{e}}$ **β)** $\ln e^5$ **γ)** $\ln \frac{e^4}{\sqrt[4]{e^8}}$

δ) $\ln \frac{1}{e^5}$ **ε)** $\ln \frac{\sqrt{e}}{e}$ **στ)** $\ln \frac{\sqrt[3]{e^2}}{e}$

3. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

α) $e^{\ln 7}$ **β)** $\ln e^{2017}$ **γ)** $\log 10^{2018}$

δ) $10^{\log(\ln e^{10})}$ **ε)** $\sqrt{e}^{\ln 16}$ **στ)** $e^{\ln(\log 10000)}$

4. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

α) $\log\left(\ln e^{10}\right)$ **β)** $\ln\left(\log 10^{e^2}\right)$ **γ)** $\log\left(\ln \sqrt[100]{e}\right)$

δ) $\log\left(\log\sqrt{10^4}\right)$ **ε)** $\ln\left(\ln e^{e^{2017}}\right)$ **στ)** $\ln\left(\ln\left(\ln\left(e^e\right)\right)\right)$

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta_1,\theta_2,\theta>0$ και $k\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$
2. $\log_\alpha\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$
3. $\log_\alpha\theta^k=k\log_\alpha\theta$

Ο δεκαδικός λογάριθμος logx

1. $\log(\theta_1\cdot\theta_2)=\log\theta_1+\log\theta_2$
2. $\log\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\log\theta_1-\log\theta_2$
3. $\log\theta^k=k\log\theta$

Ο φυσικός λογάριθμος lnx

1. $\ln(\theta_1\cdot\theta_2)=\ln\theta_1+\ln\theta_2$
2. $\ln\dfrac{\theta_1}{\theta_2}=\ln\theta_1-\ln\theta_2$
3. $\ln\theta^k=k\ln\theta$

Ασκήσεις

✓ ***Θα ασχοληθούμε με τις ασκήσεις που αναφέρονται στο φυσικό και στο δεκαδικό λογάριθμο.***

5. Να αποδείξετε ότι αληθεύουν οι ισότητες:

α) $\log 32 + 2\log 4 - \log 64 = \log 8$ **β)** $\log 3 + 2\log 4 - \log 12 = 2\log 2$

γ) $\dfrac{\log\sqrt{125} + \log\sqrt{27} - \log\sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \dfrac{3}{2}$ **δ)** $2\log\dfrac{5}{2} + \log\dfrac{3}{11} - \log\dfrac{40}{77} - \log\dfrac{105}{32} = 0$

ε) $3\log 2 + \dfrac{1}{2}\log 16 = 5\log 2$ **στ)** $2 + 3\log 2 - \log 10 = 1 + 3\log 2$

ζ) $2\log 5 + 3\log 2 - \log 60 + \log 3 = 1$ **η)** $3\log 2 + 2\log 6 - \log 4 - \log 8 = 2\log 3$.

6. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

α) $\dfrac{\ln\sqrt[4]{343} - \ln\sqrt[4]{8} - \ln\sqrt[4]{27}}{\ln 7 - \ln 6}$ **β)** $\dfrac{\log 70 + \log 30 - 2}{\log 7 + \log 3}$

γ) $\dfrac{2\log 5 + \log 3 + 4\log 2 - 2}{\log 30 + 2\log 20 - 3}$ **δ)** $\dfrac{\ln\left(9e^4\right) - 2\ln 3 - 2}{\ln\left(2e^2\right) - \ln 2 + 1}$.

7. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \dfrac{\log\sqrt{27} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{64}}{\log\sqrt{8} + \log\sqrt{27}}$.

8. Να δείξετε ότι : $\log 8 + 2\log\sqrt{27} - \log 2 - \log 243 = -2\log\dfrac{3}{2}$.

9. Να δείξετε ότι :

α) $\log\left(10 - 4\sqrt{5}\right) + \log\left(10 + 4\sqrt{5}\right) - \log 2 = 2$.

β) $\log 220 - \log\left(5 - \sqrt{3}\right) - \log\left(5 + \sqrt{3}\right) = 1$.

γ) $2\ln(3 + \sqrt{3}) + \ln(12 - 6\sqrt{3}) = 2\ln 6$.

δ) $3\log\sqrt[4]{4\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} + 2\log 5$.

10. Να δείξετε ότι : $\dfrac{\log\sqrt{216} + \log\sqrt{343} - \log\sqrt{125}}{\log 42 - \log 5} = \dfrac{3}{2}$.

11. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης : $A = 10^{3 - \frac{1}{3}\log 1000}$.

12. Να δείξετε ότι :

α) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{2})+\frac{1}{2}\ln(2-\sqrt{2})=\ln 2$

β) $\frac{1}{3}\log 3+\frac{1}{3}\log(3+\sqrt[3]{3})+\frac{1}{3}\log(9-3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=\log 3$.

γ) $\frac{1}{2}\log 5+\frac{1}{2}\log\left(5+\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\log(\sqrt{10}+\sqrt{5+\sqrt{5}})+\frac{1}{2}\log(\sqrt{10}-\sqrt{5+\sqrt{5}})=2$.

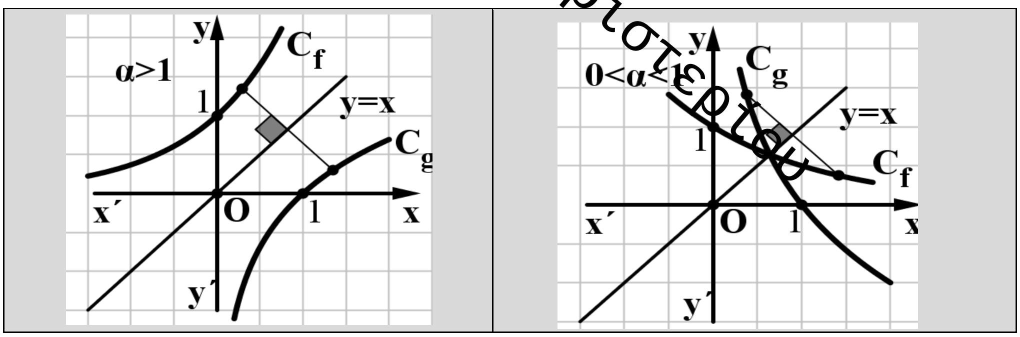
ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός

Αν $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$ τότε η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\log_\alpha x$ λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α.

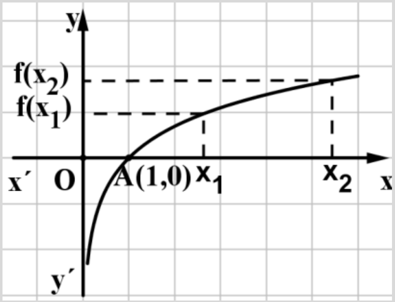
Επειδή $\log_\alpha x=y \Leftrightarrow \alpha^y=x$, αν το $M(\xi,\eta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\log_\alpha x$ τότε το $N(\eta,\xi)$ θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\alpha^x$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, Μ και Ν είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=\log_\alpha x$ και $y=\alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.



Αν α > 1, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

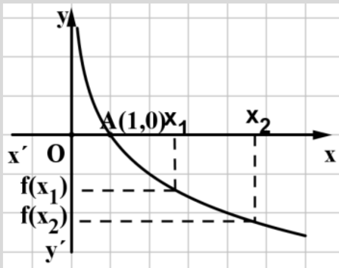
- ***Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$***
- ***Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$.***
- ***Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$***
- ***Για κάθε $0<x<1$ είναι $\log_\alpha x<0$ και για κάθε $x>1$ είναι $\log_\alpha x>0$.***
- ***Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτη τον ημιάξονα Oy'.***



Αν $0<\alpha<1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

- ***Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$.***
- ***Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$.***
- ***Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι: αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$***

  Για κάθε $0<x<1$ είναι $\log_\alpha x>0$ και για κάθε $x>1$ είναι $\log_\alpha x<0$.
- ***Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Α(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.***



Τέλος, από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:
αν $x_1 \neq x_2$ *τότε* $\log_\alpha x_1 \neq \log_\alpha x_2$

και με απαγωγή σε άτοπο έχουμε ότι: αν $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2$ *τότε* $x_1 = x_2$.

Επομένως ισχύει η ισοδυναμία: $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Λογαριθμικές εξισώσεις

Για να λύσουμε μία λογαριθμική εξίσωση :

- ✓ ***Βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίας ορίζονται οι συναρτήσεις που υπάρχουν στην εξίσωση,τις οποίες συναληθεύουμε,***
  Κυρίως χρησιμοποιούμε ότι η παράσταση μέσα σε μία λογαριθμική συνάρτηση πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.
- ✓ ***Εφαρμόζουμε ιδιότητες λογαρίθμων, όπου είναι δυνατό.***

- ✓ ***Μεταφέρουμε στα αντίστοιχα μέλη και καταλήγουμε :***

  - $\ln f(x) = \ln g(x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x)$.... ή $\ln f(x) = 0 = \ln 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 1$....

  - $\log f(x) = \log g(x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x)$.... ή $\log f(x) = 0 = \log 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 1$....

- ✓***Αν έχουμε*** $a_\nu \log^\nu f(x) + a_{\nu-1} \log^{\nu-1} f(x) + ... = ...,$ ***:***
  - ***Θέτουμε*** $\log f(x) = \omega$ ***(1) και καταλήγουμε σε πολυωνυμική εξίσωση***
    $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ ***,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***
  - ***Τέλος αντικαθιστούμε τις λύσεις του ω που βρήκαμε στην (1) και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης όπως στην προηγούμενη περίπτωση.***

- ✓***Αν έχουμε*** $a_\nu \ln^\nu f(x) + a_{\nu-1} \ln^{\nu-1} f(x) + ... = ...,$ ***:***
  - ***Θέτουμε*** $\ln f(x) = \omega$ ***(1) και ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία***
- ✓ ***Αν έχουμε εξίσωση με ισότητα δυνάμεων με θετική βάση λογαριθμίζουμε κατά μέλη και καταλήγουμε σε προηγούμενες περιπτώσεις….***

Ασκήσεις

13.Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log(x-2)^2 = 2\log 4$ **β)** $\log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$

γ) $2\log x - \log 4 = \log(x-1) - \log 3$ **δ)** $2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12$

ε) $\log\left(4^{x-2} + 9\right) - \log\left(2^{x-2} + 1\right) = 1 - \log 2$

στ) $2\log(2x-1) - \log\left(3x - 2x^2\right) = \log(4x-3) - \log x$

14.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log(2x+3) + \log(6x+2) = 2\log(3x+1)$

β) $2\log(2x-1) - \log\left(3x - 2x^2\right) = \log(4x-3) - \log x$

γ) $\frac{1}{3}\log(x-1)=\log x-\log 2$

δ) $\frac{\log x+3}{\log x}+\frac{\log x-2}{\log x-3}=\frac{9}{2}$

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log 25+x\log 5=\log 9+x\log 3$

β) $x\log 3+\log\left(3^x-4\right)=\log\left(3^x+1\right)+\log\left(3^x-1\right)$

γ) $\ln 5+x\ln 7=\frac{1}{2}\ln 25$

δ) $x\ln 2+\ln\left(2^x-2\right)=\ln\left(2^x-1\right)$.

16. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $5^{3x-1}=2^{x+3}$ **β)** $2^x=11$ **γ)** $7^{x-2}=5^{x-1}$

δ) $e\cdot x^{\ln x}=x^2\sqrt{x}$ **ε)** $x^{2-\log x}=\frac{10}{\sqrt{x}}$.

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log^2 x-5\log x+4=0$ **β)** $\ln^2 x-3\ln x+2=0$

γ) $\log^2(x+1)-2\log(x+1)+1=0$ **δ)** $\ln^2 x-5=4\ln x$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log^4 x-4\log^2 x-5=0$ **β)** $\ln^4 x-7\ln^2 x+6=0$

γ) $\log^6(x+1)-7\log^3(x+1)-8=0$ **δ)** $\ln^{10} x-3=2\ln^5 x$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log^3 x-7\log x+6=0$ **β)** $\ln^4 x-\ln^3 x-\ln x-1=0$

γ) $\log^3 x+2\log^2 x-\log x-2=0$ **δ)** $\ln^3 x-6=6\ln^2 x-11\ln x$

20. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3^{\ln x}+3^{1-\ln x}=4$ **β)** $5^{\sqrt{\ln x}}-5^{1-\sqrt{\ln x}}=4$

21. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log\left(x^2-x-2\right)=1$ **β)** $\log\left[\log(3x-5)\right]=0$

γ) $\ln\left(9^x-3^x-5\right)=0$ **δ)** $\log\left(2x^2-10x\right)=2$.

22. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^{\log x}=10$ **β)** $x^{\log(x-1)}=x-1$

γ) $x^{\ln x}=9$ **δ)** $x^{\ln\sqrt{x}}=e^2$.

23.α) Να αποδείξετε ότι: $2^{\log x} = x^{\log 2}$, $x > 0$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2^{\log x} + x^{\log 2} = 16$.

24.Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\log\left(3^{2x-2} + 10\right) = 1 + \log\left(3^{x-1} - 1\right)$

β) $\log x + \log\left(\log x\right) = 1$

Λογαριθμικές ανισώσεις

Ασκήσεις

Για να λύσουμε μία λογαριθμική ανίσωση :

- ✓ ***Βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίας ορίζονται οι συναρτήσεις που υπάρχουν στην εξίσωση,τις οποίες συναληθεύουμε,***
  Κυρίως χρησιμοποιούμε ότι η παράσταση μέσα σε μία λογαριθμική συνάρτηση πρέπει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.
- ✓ ***Εφαρμόζουμε ιδιότητες λογαρίθμων,όπου είναι δυνατό.***
- ✓ ***Μεταφέρουμε στα αντίστοιχα μέλη και καταλήγουμε :***

  - $\ln f(x) > (<) \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)....$ ή $\ln f(x) = 0 = \ln 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 1....$

  - $\log f(x) = \log g(x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x)....$ ή $\log f(x) = 0 = \log 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 1....$

✓***Αν έχουμε*** $a_\nu \log^\nu f(x) + a_{\nu-1} \log^{\nu-1} f(x) + ... = ...,$:

- ***Θέτουμε*** $\log f(x) = \omega$ ***(1) και καταλήγουμε σε πολυωνυμική εξίσωση*** $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + a_0 = 0$ ***,την οποία λύνουμε όπως μάθαμε στην αντίστοιχη παράγραφο.***
- ***Τέλος αντικαθιστούμε τις λύσεις του ω που βρήκαμε στην (1) και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης όπως στην προηγούμενη περίπτωση.***

✓***Αν έχουμε*** $a_\nu \ln^\nu f(x) + a_{\nu-1} \ln^{\nu-1} f(x) + ... = ...,$:

- ***Θέτουμε*** $\ln f(x) = \omega$ ***(1) και ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία***

✓ ***Αν έχουμε εξίσωση με ισότητα δυνάμεων με θετική βάση λογαριθμίζουμε κατά μέλη και καταλήγουμε σε προηγούμενες περιπτώσεις….***

25.Να συγκριθούν μεταξύ τους οι αριθμοί:

α) $\log 3$,0, $\log\frac{1}{3}$ **β)** $\ln e^2, 0, \ln\frac{1}{e^2}$ και $\log_{\frac{1}{2}} 11$.

26. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $\log 11,\ \log\frac{1}{2},\ \ln\pi,\ \ln\frac{1}{3}$.

27. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\ln x > 1$ **β)** $\log\left(2x+\frac{2}{5}\right) < -1$

γ) $\ln(x-2) < -1$ **δ)** $\log(3x-3) \le \log(x-2)+1$.

28. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $2^x \le 7$ **β)** $3^{x-3} \ge 5^{x+1}$

γ) $\left(\frac{3}{4}\right)^x \le 2$ **δ)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{2-x}$

29. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log^2 x - 3\log x - 4 \ge 0$ **β)** $2\ln^2 x - 5\ln x + 3 \ge 1$

γ) $2\log^2 x - \log x^2 - 4 \le 0$ **δ)** $\log^2 x^3 - \log x - 8 > 0$.

30. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log^2 x \ge 9$ **β)** $\ln^2 x \le \ln x$

γ) $\ln^2 x > 0$ **δ)** $\log^3 x < 27$

31. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log^2 x \ge \log x^6$ **β)** $\ln\sqrt{x} \le \ln^2 x$

γ) $4\log\sqrt[4]{x} > \log^3 x$ **δ)** $25\ln\sqrt[5]{x} < \ln^2 x^3$

32. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log(2x-3) > \log(24-6x)$ **β)** $\log\left(x^2-5x+7\right) < 0$

γ) $\log\left[\log\left(x^2-7x+22\right)\right] < 0$.

33. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\log\left(x^2-5x+7\right) < 0$ **β)** $\log\left(\log\left(x^2-3x+12\right)\right) < 0$

γ) $\log\left(x^2+1\right) > 1 - \log x$.

34. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\ln^2 x < |2\ln x|$ **β)** $\ln(e^3 + |3-x|) \ge 3$

γ) $\log(|1-x|-1) < 0$ **δ)** $\ln(2-|x+4|) \le 0$

35. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $(2\log x-2)(3\log x+3)\ge 0$

β) $\log x\cdot(\log x-1)\cdot(2-\log x)\le 0$

γ) $(3^x-9)(1-\log x)\le 0$

δ) $(\ln x-\ln\frac{1}{3})\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x-\frac{25}{9}\right](1-\ln x)\le 0$.

36. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\left(x-1\right)(2\log x-2)(3e^x+3)\ge 0$

β) $\left(x^2-1\right)\cdot(1-\ln x)\cdot(e^x-e^2)\le 0$

γ) $(5^x-25)\cdot(1-\log x)\left(2x^2-5x+2\right)\le 0$

δ) $(\ln x-\ln\frac{1}{3})\left[\left(\frac{3}{5}\right)^x-\frac{25}{9}\right](1-\ln x)\le 0$

37. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{\ln x}{1-\ln x}\le 1$

β) $\frac{\log x-1}{\log x}\ge\frac{3\log x-3}{\log x+1}\le 0$

γ) $\ln x\le\frac{3}{\ln x-2}$

δ) $\frac{\ln x^2+1}{\ln\left(e\cdot x\right)}>1$.

38. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $9^x-5\cdot 3^x+6<0$

β) $\frac{49^x-5}{7^x+1}\le 1$

γ) $\frac{8e^{2x}-12}{e^x+1}<4$

δ) $\frac{4^x-11}{2^x-1}<5$.

39. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\log\left(5\cdot 10^x-6\right)>2x$

β) $x^{\ln x}>e$

γ) $\ln\left(2e^{2x}-1\right)<-x$

δ) $e^{2\ell n\sqrt{x^2-2x+2}}>5$

40. Έστω συνάρτηση $f\left(x\right)>0$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\log f\left(2\right)$ και $\log f\left(5\right)$

β) $\ln f\left(e\right)$ και $\ln f\left(e^2\right)$

Λογαριθμικά συστήματα

Ασκήσεις

- ***Για να λύσουμε σύστημα με λογαρίθμους χρησιμοποιούμε ιδιότητες λογαρίθμων και τα γνωστά μας από τα συστήματα.***
- ***Αν είναι της μορφής*** $\begin{cases} \kappa_1 \cdot \log f(x) + \kappa_2 \cdot \log(g(x)) = \mu \\ \kappa_3 \cdot \log f(x) + \kappa_4 \cdot \log(g(x)) = \nu \end{cases}$,

   μετατρέπεται σε γραμμικό σύστημα με τη βοήθεια βοηθητικών αγνώστων $\left(\log f(x) = \omega, \log(g(x)) = \varphi\right)$

41. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \log x + \log y = \dfrac{3}{2} \\ \log x - \log y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 10 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases}$

42. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + 2y = 30 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \log x - \log y = \log 3 \\ \log(y - x) = 1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \log x + \log y = 4 \\ 2\log x + 3\log y = 11 \end{cases}$

43. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2^{\log x} + 3^{\log y} = 13 \\ 4^{\log x} + 9^{\log y} = 97 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3^{\log x} + 5^{\log y} = 8 \\ 9^{\log x} + 25^{\log y} = 34 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 13^{\log x} + 5^{\log y} = 18 \\ 2 \cdot 13^{\log x} + 3 \cdot 5^{\log y} = 41 \end{cases}$.

44. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^{\log x} = 10000 \\ x \cdot y = 200 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \dfrac{100^x}{10^y} = \dfrac{1}{100} \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \log x + \log y = 3\log 2 \\ 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \end{cases}$

Λογαριθμική συνάρτηση

Ασκήσεις

- ***Θα ασχοληθούμε με τις ασκήσεις που αναφέρονται στο φυσικό και στο δεκαδικό λογάριθμο.***
- ***Το πεδίο ορισμού κάθε λογαριθμικής συνάρτησης είναι το $(0,+\infty)$.***
  Άρα για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $\ln f(x)$ βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)>0$
- ***Για να αποδείξουμε ότι μία συνάρτηση της μορφής $\ln f(x)$ είναι περιττή, διευκολύνει : $\ln f(-x)=-\ln f(x) \Leftrightarrow \ln f(-x)+\ln f(x)=0 \Leftrightarrow$***
  $\ln\big(f(-x)\cdot f(x)\big)=0 \Leftrightarrow \ldots$

45. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

α) $f(x)=\log x$, $g(x)=\log(x-3)$ και $h(x)=\log(x+3)$.

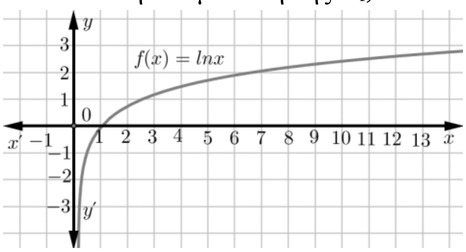
β) $f(x)=\log x$, $g(x)=\log x-3$ και $h(x)=\log x+3$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-3), x>3$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.

β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f;



(τράπεζα θεμάτων)

47. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=5\log(x-1)$ **β)** $f(x)=\ln(2-2x)$ ` **γ)** $f(x)=\log(2x-3)+\log(2-x)$.

48. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log(x^2-25)$ **β)** $f(x)=\log(x^3-8)-7\log(x^2-6x+9)$

γ) $f(x)=2\log(x^2-4)-3\log(9-x^2)$ **δ)** $f(x)=\ln(4-4x^2)$

49. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\dfrac{2x-4}{5-x}$ **β)** $f(x)=\log\left(\dfrac{3-x}{3+x^2}\right)$ **γ)** $f(x)=\log\dfrac{x^2-1}{2-x}$.

50. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\dfrac{x+2}{2-x}$ **β)** $f(x)=\dfrac{\log\left(x^2-8x+15\right)}{\sqrt{16-x^2}}$

51. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\left(4^x+4\right)$ **β)** $f(x)=\ln\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^x-1\right)$

γ) $f(x)=\log\left(2^{2x-4}-1\right)$ **δ)** $f(x)=\ln\left(e^x-e\right)$

52. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\left(4^x-5\cdot 2^x+4\right)$ **β)** $f(x)=\ln\left(-9^x+4\cdot 3^x-3\right)$

γ) $f(x)=\log\left(25^x-6\cdot 5^x+5\right)$ **δ)** $f(x)=\ln\left(e^x-(e+1)x+e\right)$.

53. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\log\left(2^{x+3}-3^{x+1}-3^{x+3}+3\cdot 2^{x+2}\right)$ **β)** $f(x)=\ln\left(2\cdot 4^x+3\cdot 9^x-5\cdot 6^x\right)$

γ) $f(x)=\log\left(3^{x+1}-2^x-3^{x-1}-2^{x+3}\right)$ **δ)** $f(x)=\ln\left(7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}\right)$

54. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln|x-2|$ **β)** $f(x)=\log\sqrt{x^2-4}$

γ) $f(x)=\ln\left(|3x-3|-5\right)$ **δ)** $f(x)=\log\left(2-|x|\right)$

55.α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A=\ln x+\ln(x+6)$

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x+\ln(x+6)=\dfrac{1}{2}\ln 49$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln\left(e^{2x}-e\right)-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

(τράπεζα θεμάτων)

57. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ln\left(x^2+4\right)$ και $g(x)=lnx+ln4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

(τράπεζα θεμάτων)

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln\left(3-\sqrt{x+1}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

(τράπεζα θεμάτων)

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y .

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$.

(τράπεζα θεμάτων)

60. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:

α) $f(x)=\ln\frac{3-x}{3+x}$ **β)** $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

61. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες:

α) $f(x)=x^3\cdot\ln\frac{5-x}{5+x}$ **β)** $f(x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\cdot ημx$

62. Αν $f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$, δείξτε ότι $f(α)+f(β)=f\left(\frac{α+β}{1+αβ}\right)$.

63.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+100^{\log\sqrt{6}}-4=0$

(τράπεζα θεμάτων)

64.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left[(k-1)x^2-2(k-3)x+k\right]$.

α) Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

β) Αν $k=2$, να αποδείξετε ότι $f(0)f(-2)+1>\log\dfrac{1}{100^{f(0)}}$.

65.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{x-3}{x^2-2x}+2\log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\log\dfrac{(x-3)(x-2)}{x}$.

γ) Να βρείτε το $k\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $2kf(6)=\log 2^{k-2}$.

66.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log(x-1)-\log(x^2-2x)$ και

$g(x)=1-\log(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.

β) Να βρείτε τη τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $f(x)=0$ και **ii.** $g(x)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(4)-3g(1)+4=\log 30$.

67.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\log(x+1)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να γράψετε την f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

68.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\dfrac{e^x-3}{e^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

69.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x),x>0,\alpha\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(10,25)$.

β) Αν α = 1, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή: $f(x)=\left(\log^2 x+4\log x\right)^2$

ii. να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

70. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x+2)$ με την ευθεία $y=2\log 4$.

71. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\log(3x-14)}{\log(x-4)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=1$.

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\ln(x-2)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να απαλλάξετε τον τύπο της f από την απόλυτη τιμή.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^2(x-2)-f(x)-2=0$.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left|\log(x-4)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$.

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(\log(x-1)\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+7)-f(x+1)>\log 2$.

δ) Να αποδείξετε ότι $3f(101)+2f(1001)=f(10001)+\log 18$

75.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-x$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)+1+2x=0$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ

76.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ln(e^x-1)$ και $g(x)=lnx^2$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.
β) Να λύσετε τις ανισώσεις f (x)> 0 και g (x) < 0.
γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(ln3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x) = g\left(\sqrt{e-1}\right)$.

(τράπεζα θεμάτων)

77.Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(2^x-5)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

78.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\ln\frac{4^x-2^x}{2^{x+1}+4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2\ln2$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.
δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=(x-1)\ln2+\ln\frac{2^x-1}{2^x+2}$

79.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^x-1)$ και $g(x)=\ln(2e^{1-x}-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.
β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(-2x)>g(x+1)$.
δ) Να αποδείξετε ότι $g(1-x)=f(x)+\ln2$.

80.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(2x^2-4x+4)-2\log x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $10^{(2x+1)f(1)}-5\cdot10^{xf(1)}+10^{f(1)} = f(2)$
δ) Να αποδείξετε ότι $x^{f(1)}=2^{\log x}$ και να λύσετε την εξίσωση $x^{2f(1)}=2+2^{\log x}$

81. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2e^{x}+3\right)$ και $g(x)=\ln3+\ln\left(e^{x}-1\right)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>2g(x)$.
δ) Να αποδείξετε ότι η g είναι $1-1$.
ε) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)-g(1)=f(0)$

82. Δίνεται η $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\ln\left(e^{x}-1\right)$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>x+2\ln2$.
ε) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση.

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=36^{x}-225^{x}-3\cdot4^{x}+3\cdot25^{x}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της με τον άξονα x΄x.
β) Να αποδείξετε ότι

$$2\log\frac{f(0)+5}{f(0)+2}+\log\frac{f(0)+3}{f(0)+11}-\log\frac{f(0)+40}{f(0)+77}-\log\frac{f(0)+105}{f(0)+32}=0$$

84.α) Να λύσετε την εξίσωση: $3\cdot4^{x}+2\cdot5^{x}=4\cdot3^{x}+5\cdot2^{x}$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3\cdot4^{x}+2\cdot5^{x}$ και $g(x)=4\cdot3^{x}+5\cdot2^{x}$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της .

85. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left(\log(x-1)\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x+7)-f(x+1)>\log2$.
δ) Να αποδείξετε ότι $3f(101)+2f(1001)=f(10001)+\log18$

86. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\log(x-1)-\log\left(x^{2}-2x\right)$ και $g(x)=1-\log(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο των συναρτήσεων f,g.
β) Να βρείτε τη τετμημένη του σημείου τομής των γραφικών τους παραστάσεων.
γ) Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $f(x)=0$ και **ii.** $g(x)=0$.
δ) Να αποδείξετε ότι: $f(4)-3g(1)+4=\log30$.

87.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)-x$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

γ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+f(x+1)+1+2x=0$.

88.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x), x>0, \alpha\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(10,25)$.

β) Αν α = 1, τότε:

i. να αποδείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή: $f(x)=\left(\log^2 x+4\log x\right)^2$

ii. να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

89.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\ln 2$.

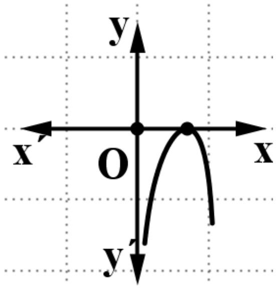
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$.

δ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\left(e^x+5\right)e^{f(x)}$.

i. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $g(\eta\mu x+x)=g(x)$

90.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(-e^{2x}+4e^x-3\right)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να δικαιολογήσετε (αλγεβρικά) γιατί δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f που να βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

91.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-6e^{x}+8\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της .
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq \ln 3$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x+\ln 3$

92.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ και $g(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή συνάρτηση.
β) Να αποδείξετε ότι $f^{2}(x)-g^{2}(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
γ) Να αποδείξετε ότι $g(\alpha-\beta)=g(\alpha)f(\beta)-g(\beta)f(\alpha)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+2g(x)=1$.

93.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x^{2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
γ) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x+2)$ με την ευθεία $y=2\log 4$.

94.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x+4)-3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
γ) Τη τιμή του $k\in\mathbb{R}$ για την οποία το σημείο $(k,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(3^{x+3}-2^{x}\right)=f\left(23\cdot 3^{x}+2^{x+3}\right)$

95.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\log(3x-14)}{\log(x-4)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2$.
γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=1$.

96.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\ln(x-2)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να απαλλάξετε τον τύπο της f από την απόλυτη τιμή.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^{2}(x-2)-f(x)-2=0$.

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\left|\log(x-4)\right|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα χ΄χ.
γ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες $f(x)<0$.

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να βρείτε το λ ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(1,9)$.
γ) Αν $\lambda\in(2,3)$, να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)>f(5x-6)$.
δ) Αν $\lambda=4$, να λύσετε την ανίσωση $2f(x)+3\cdot 9^x-5\cdot 6^x\leq 0$.

99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.
γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},e\right)\cup(e,+\infty)$.

Επανάληψη

1. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x+y=2\mu \\ (\mu+1)x+(\mu-1)y=2(\mu^2-1) \end{cases}$,όπου $\mu\in\mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση .

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0).

γ) Να προσδιορίσετε το $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε η παράσταση $\Pi=2x_0+{y_0}^2$ να γίνει ελάχιστη.

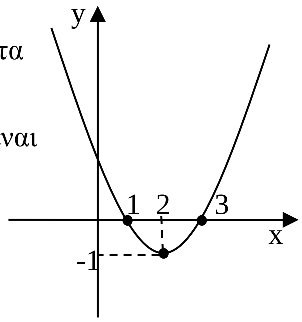
2. **α)** Να αποδείξετε ότι η παραβολή του διπλανού σχήματος είναι η $f(x)=x^2-4x+3$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+2x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)+4x$ είναι άρτια.

δ) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $h^2(x)-3h(-x)=4$ **ii.** $\sqrt{h(x)}=x+1$



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta x}{2}\right)$ όπου $\beta<0$ και $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,\beta+5)$, και B $\left(\frac{4\pi}{\beta},4\beta^2\right)$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι α = 4 και β = - 1.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=4$.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς και την περίοδό της.

δ) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $A=f(4\pi)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και

$$B=3f(0)\frac{f(0)^{2010}-1}{f(0)-1}+4.$$

4. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \etaμ(\pi-\theta)\cdot x-\etaμ\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\cdot y=1 \\ -3\etaμ(\pi+\theta)\cdot x+2\sigmaυν(-\omega)\cdot y=8 \end{cases}$, $\theta,\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση, την οποία και να βρείτε.

β) Να βρείτε τα θ,ω για τα οποία το ζεύγος $\left(4,\sqrt{2}\right)$ είναι λύση του συστήματος.

5. **α)** Δείξτε ότι $A(x)=\dfrac{2}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\varepsilon\varphi(\pi+x)}=\etaμ2x$

β) Δείξτε ότι η $B(x)=\dfrac{(\etaμx+\sigmaυνx)^2-\etaμ2x}{2}=\dfrac{1}{2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=B(x)$

δ) Έστω η συνάρτηση $f(x)=A(x)-B(x)$. Βρείτε τη μέγιστη τιμή Μ, την ελάχιστη τιμή ε και την περίοδο της συνάρτησης $f(x)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\etaμ\left(\frac{3\pi}{2}+\beta x\right)$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $0<\beta\le 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(0,-2), Β(π,-1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Αν $f(x)=-2\sigmaυν\left(\frac{x}{3}\right)$

β) **i.** Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της f και την περίοδό της.

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0,6π] και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο ίδιο διάστημα.

γ) Δίνεται το γραμμικό σύστημα: (Σ) $\begin{cases} \lambda f(0)x+f(2014\pi)y=4\lambda \\ \lambda f(-\pi)x+\lambda f(2\pi)y=0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ $(\lambda\in\mathbb{R})$ ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις καθώς και τη μορφή των απείρων λύσεων.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sigmaυν2x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή, η ελάχιστη τιμή και η περίοδος της συνάρτησης f(x).

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x στο [0, 2π].

γ) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $K=\dfrac{f\left(\frac{\pi}{12}\right)f\left(\frac{5\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, για την οποία ισχύουν:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης της f(x) δια x +2 είναι 24.
- Η C_f διέρχεται από το σημείο Α(0,8).
- Η f (x) έχει παράγοντα το x - 1.

α) Να δείξετε ότι: α = 1, β = -10 και γ = 8.
β) i. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0.
ii. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τον άξονα x'x.
γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x+4}{f(x)}\le\dfrac{2}{f(x)+f(-x)-18}$.

9. Έστω $P(x)=x^3+2\alpha x^2-\alpha^2x+2$ πολυώνυμο, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρεθεί με το x -1, δίνει υπόλοιπο 3α +1.
α) Να βρείτε τις τιμές του αριθμού α.
β) Για α = 1 και πολυώνυμο Q(x) = x^2 + x +1:
i) Να αποδείξετε ότι το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της Ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το Q(x) είναι x + 1 και -3x +1 αντίστοιχα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)+x-2}{Q(x)}\ge 1$
iii) Να λύσετε την εξίσωση $\pi(x)=\sqrt{Q(x)}$

10. Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=4x^3-3\eta\mu\omega\cdot x^2-\sigma\upsilon\nu^2\omega\cdot x+2$.
α) Να βρείτε το ω για το οποίο το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathrm{P}(x)$ με το $x-\eta\mu\omega$ να είναι ίσο με 2.
β) Αν $\omega=\dfrac{\pi}{4}$, να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{P}(x)=(2\eta\mu\omega)^2$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $6\eta\mu\omega+2\mathrm{P}(1)-11=0$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=2x^3-5x^2+\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.
α) Χωρίς να υπολογίσετε τα α,β, να αποδείξετε ότι $|\alpha|+|\beta|\ge 3$.
β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$.
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3x-5\eta\mu^2x+4\eta\mu x=1$.

ε) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}\lambda x-f(0)y=\sqrt{2}\\ x+\lambda y=\sqrt{2}+f(1)\end{cases}$.
i. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση

(x_0, y_0).

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει: $\eta\mu\theta = x_0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = y_0$.

12. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να λύσετε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις $\eta\mu x = \alpha$, $\sigma\upsilon\nu x = \beta$ όπου α η διπλή ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και β η άλλη ρίζα της ίδιας εξίσωσης.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της f, να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $f(-x):(x^2+1)$.

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x - \alpha - 1$ που έχει παράγοντα το $x+1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x-1$ είναι 8.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 7$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

γ) Αν $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3\omega + 7\eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\omega - 3 = 0$.

14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (1+\eta\mu\varphi)x^2 - (1+\eta\mu^2\varphi)x - (1-\eta\mu\varphi)\eta\mu\varphi$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\varphi \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο είναι 1ου βαθμού.

β) Αν το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού και x_1, x_2 είναι ρίζες του, να αποδείξετε ότι: $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1$.

γ) Αν $Q(x) = \eta\mu\varphi \cdot x^3 + \alpha x^2 + \beta x$, να βρείτε τα α, β, φ για τα οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

15. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (k+1)x - 2y = k+1 \\ kx - ky = 1 \end{cases}$,όπου k πραγματικός αριθμός

α) Να βρείτε το k ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση.

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0) για τις παραπάνω τιμές του k.

γ) Αν $k = 1$,

i. να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^2\theta + y_0\eta\mu\theta - x_0 = 0$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $21 \cdot 3^{-x_0 t} + x_0 \cdot 5^{t+3} = 3^{t+4} + 5^{t+y_0}$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-7x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x+1$ είναι -18.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=7$ και $\beta=-2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^3 2x-7\eta\mu^2 2x+7\eta\mu 2x-2=0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $2\cdot 8^x-7\cdot 4^x+7\cdot 2^x-2>0$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4+5^{2\lambda-1}x^3-2\cdot 3^{\lambda+\frac{1}{2}}x^2+25^{\lambda}x-1$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Αν το (x – 1) είναι παράγοντας του $f(x)$, να βρείτε το λ.

β) Για $\lambda=\dfrac{1}{2}$

i. να δείξετε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$.

ii. να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2\eta\mu\omega)^x$, $\omega\in(0,2\pi)$. Να βρείτε τις τιμές του ω για τις οποίες η f είναι:

α) σταθερή στο $\mathbb{R}$

β) γνησίως αύξουσα

γ) γνησίως φθίνουσα

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2)+f(1)=6$.

19. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \eta\mu(\pi+\theta)x+\sigma\upsilon\nu(-\theta)y=1 \\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)x+\sigma\upsilon\nu(\theta-\pi)y=1 \end{cases}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta,\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(10^{\alpha}-3)\sigma\upsilon\nu x-4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 3.

ii) Για α = 1, να βρείτε τις τιμές του $\theta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $xy=f(\theta)$ όπου (x, y) είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9^x+3^x-12}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=f(1)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^3-7x+6>f(1)$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-x-\ln x$, $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A(1,0)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^x\right) > 1 - e^{2x-5} - x$.

γ) Αν $0 < x < 1$ να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$.

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\theta < \ln\left(\frac{e}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Αν $f\left(\frac{\pi}{6}\right) - \ln\pi = \ln\frac{e}{2}$, να βρείτε το k.

γ) Αν $k = 1$, τότε:

i. να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\ln(\eta\mu x) + f(\pi) - 2\ln 2 = f\left(\frac{\pi}{6}\right) - \ln 3 .$$

ii. να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\left(e^{f(x)-1}\right) = \eta\mu\left(e^{f(x+\pi)-1}\right)$.

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2 + (\log k - 4)x - \log k$, $k > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

γ) Για $k = 1000$ να λύσετε:

i. την ανίσωση $P\left(e^x\right) < 0$ **ii.** την εξίσωση $P(\eta\mu x) = -\sigma\upsilon\nu^2 x$

24. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - x - 4\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\left(x^2 - x\right)$ είναι $2x + 4$ τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -1$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P\left(10^{-x}\right) > 10^{-2x} + 5$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\log\left(x - \frac{1}{2}P(1)\right) - \log x = \log\frac{3}{P(0)}$.

25. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x + 2\alpha - 4\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, να βρείτε τα α και β.

Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 1$, τότε:

β) να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$

γ) να λύσετε την εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$

δ) να αποδείξετε ότι $10^{2-\frac{1}{2}\log\left(3P(2)+2P(0)\right)}=25$

26.Έστω D, D_x, D_y οι ορίζουσες ενός συστήματος 2x2 που έχει μοναδική λύση. Αν $D_x - D_y = 4D$ και $D_x + D_y = 2D$, να αποδείξετε ότι :

α) το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x_0, y_0)=(3,-1)$.

β) υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει: $\eta\mu\theta=\dfrac{x_0-y_0}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{x_0}{5}$.

γ) $\log 32-\log(x_0-y_0)-x_0\log 2=0$.

27.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(\log x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<1$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\left[f(\lambda)\right]^x$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του λ.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $g(x^3+4x)>g(x-4)$

28.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β)** Να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

29.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+2x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=\log P(x)$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(2\sigma\upsilon\nu x)=0$.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(7)-f(2)=f(3)+\log 9$.

30.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(e^x-3\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1821)$ και $f(2015)$.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y=\ln 10$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^2 x+\ln\left(e^{\eta\mu^2 x+3}-3\right)=1+\ln\left(e^4-3\right)$

31.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\ln\alpha-\ln3}{\ln\beta-\ln\alpha}\right)^x$ με $3<\alpha<\beta$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln\alpha$ και $\ln\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2<3\beta$.

γ) Αν $\alpha=6$ και $\beta=24$ τότε:

i.Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

ii.Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα:

$2\cdot f\left(\dfrac{\kappa+\lambda}{2}\right)\le f(\kappa)+f(\lambda)$

iii.Να λυθεί η εξίσωση $f(-\eta\mu^2x)+f(-\sigma\upsilon\nu^2x)=3$.

32.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$,$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x +1 και η αριθμητική τιμή του για x = 2 να είναι ίση με 12.

β) Για α=-2 και β=3

i.Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x - 2 .

ii.Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\le -x+14$.

iii.Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x)\le -\ln x+14$.

33.Έστω x, y θετικοί αριθμοί, με $x\neq1$.

α) Δείξτε ότι ισχύει: $\ln y\cdot\log x=\log y\cdot\ln x$

β) Αν ισχύει η ισότητα $\left(\dfrac{\ln y}{\ln x}\right)^2-4\dfrac{\log y}{\log x}+4=0$ βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x, y.

γ) Αν είναι $y = x^2$ και το y είναι λύση της εξίσωσης $e^{2y^2-3y+1}=(2004)^0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y.

δ) Αν για το πολυώνυμο $P(x)=x^2-4x+4$ ισχύει $P(\ln x)\le1$, να δείξετε ότι $y\in\left[e^2,e^6\right]$.

34.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\alpha-\beta)$,όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Α. Αν $\ln6+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\ln5=\ln\pi$,τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$.**β)** Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu\left(e^{f(x)}\right)\sigma\upsilon\nu\left(e^{f(x)}\right)=\frac{1}{2}.$$

Β. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξοναx'x στοσημείοΑ(1,0), τότε:
α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha-\beta=0$.
β) Να λύσετε την ανίσωση $16\cdot 2^{f(x)}<2^{\ln\left(2e^4\right)}$

35.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{2\ln x-1}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x'x.

β) Να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x>0$ και $x\neq e^{\frac{1}{2}}, x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3$ για κάθε $x>0$ και $x\neq e^{\frac{1}{2}}, x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$\mathrm{A}=\ln\mathrm{f}\left(\mathrm{e}^{1000}\right)+\ln\mathrm{f}\left(\mathrm{e}^{1001}\right)+\ln\mathrm{f}\left(\mathrm{e}^{1002}\right)+\ln\mathrm{f}\left(\mathrm{e}^{1003}\right)+\ln\mathrm{f}\left(\mathrm{e}^{1004}\right)$.

36.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x}{4+x}\right)$.

α) Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης
$A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)-f(-x)<-2\ln 3$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)}+3=4e^{f(x)}$.

37.Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 2}$ και $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(2^x-3\right)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να συγκρίνετε τους αριθμούς $g(3)$, 2.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Αν κ > 4 να λύσετε την ανίσωση $f\left(\log_2\kappa\right)<\dfrac{1}{2}$.

δ) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $\left(-x^3-7x^2+6\right):(x+1)$ είναι το πολυώνυμο

$\upsilon(x)=\left(f(\beta)-1\right)x+g(\alpha)+g\left(\alpha^2\right)+g\left(\alpha^3\right)+\ldots+g\left(\alpha^{20}\right)-\dfrac{210}{\ln 2}$ να δείξετε ότι

$\alpha+3=e^{\beta\ln 2}$ όπου α ανήκει στο πεδίο ορισμού της g και β ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

38.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\left[\ln\left(e^x-e^2\right)\right]^2-3}{\ln\left(e^x-e^2\right)-2}$.

α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln\left(2e^2\right),\ \ln\left(e^3+e^2\right),\ 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{y^2-3}{y-2}\geq 6$

γ) Έστω $x_0=\ln\left(e^3+e^2\right)$:

i) Να αποδείξετε ότι $f\left(x_0\right)=6$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq f\left(x_0\right)$ για κάθε $x\in\left(\ln\left(2e^2\right),+\infty\right)$.Είναι το ελάχιστο της συνάρτησης;

39.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-2^x}{4\cdot 2^x-1}\right)$.

α) Να αποδείξετε ορισμού της f είναι το διάστημα A = (-2,2).
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
γ) Να βρείτε (αν υπάρχει) την τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=x\ln 2-\ln 3$.
δ) Να λύσετε την ανίσωση $-\ln^2\left(e^2\right)\cdot f(x)>4f(-x)+\ln^2|x|-\ln x^2-3$.

40.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη περίοδο την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα μιας περιόδου.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\log 2+\log\left(f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)+3\log\left(f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)=\log 128$.

ε) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $P(x)=x^3-6x^2+\alpha x+\beta$ έχει παράγοντες τα $\left(x-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ και $\left(x-f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

41.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^2 2x-1}{2\eta\mu^2 x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\log\left(x-f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+\log\left(x+f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\log 3$.

42. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f\left(x\right)=2^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ με $x\in\mathbb{R}$ και

$h\left(x\right)=\ln\frac{3}{x}+\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ με x > 0.

α) Δίνεται η συνάρτηση $g\left(x\right)=\ln\left(f\left(\ln x\right)\right)$.

i. Να υπολογίσετε το $f\left(\ln x\right)$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g\left(x\right)=\ln\left(f\left(\ln x\right)\right)$.

β) Να δείξετε ότι $h\left(x\right)=\ln\frac{3}{2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση g(x) = h(x) με x >1.

δ) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ και να ισχύει

$$\eta\mu\theta=\frac{f\left(1\right)\ln^{2}x-2f\left(2\right)\ln x}{6f\left(1\right)}$$

43. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\log x-\left(\log\sqrt{x}\right)^{2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\eta\mu x\right)=0$.

δ) Αν για τους θετικούς αριθμούς α,β με $\alpha\neq\beta$ ισχύει ότι $f\left(\alpha\right)=f\left(\beta\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=10.000$.

44. Έστω οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}-\left(e+1\right)e^{x}+e}{e^{x+1}-e}\right)$ και $g\left(x\right)=e^{2x-1}-4e^{x-1}+3$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

β) Να λυθεί η εξίσωση $g\left(x\right)=e^{\ln\frac{5+3e}{e}}$

γ) Βρείτε τις τιμές του x ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right)$ να μην είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)}\geq g\left(x\right)+\frac{6-4e}{e}$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\frac{x^{2}+68}{100-x^{2}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)}=\log 50-\log 5$

γ) Να λύσετε την ανίσωση f(x) ≥ 0 .

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2\ln a\cdot x+4\ln a-1 \quad , \quad a>0.$

α) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η εξίσωση f(x)=0 να έχει διπλή ρίζα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(0)=\ln^2 a-2\ln a+4$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $a+\frac{f(-2)}{8}>\ln(e^{2a}\cdot a-2a)$.

47. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{e^{2x}\cdot\ln x-\ln x-e^{2x}+1}{e^x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να δείξετε ότι :

$f(x)=\frac{(\ln x-1)(e^{2x}-1)}{e^x}$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ.

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x}$.

γ) Να βρείτε διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2 x+5\eta\mu x-3) = g(x)\cdot(\ln x-1)$

48. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\ln\frac{e^{2x}-e^2}{e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e=0$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\frac{e^x-e}{e^x-1}$.

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

49. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\sqrt{(e^x-1)\cdot\ln x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}\left(e,\sqrt{e^e-1}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της $g(x)=\sqrt{e^x-1}\cdot\ln x$.

δ) Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\sqrt{\ln x}\cdot(e^x-1)$.


14ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ