7η Άσκηση

2019-2020

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)-2f(x)=x^2-2x$ και $f(x)<e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τους άξονες.

β) Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x^2)+2f(x)>f^2(x)+2f(x^2)$.

δ) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την $y=-x$ ακριβώς σε ένα σημείο.

ε) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(\ln x)+1=2f(\ln x)$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x, αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$

Έστω $\rho\in\mathbb{R}$ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Για $x=\rho$ η σχέση $f^2(x)-2f(x)=x^2-2x$ (1) γίνεται:

$f^2(\rho)-2f(\rho)=\rho^2-2\rho \Leftrightarrow 0=\rho^2-2\rho \Leftrightarrow \rho(\rho-2)=0 \Leftrightarrow \rho=0$ ή $\rho=2$.

Επομένως η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,0)$.

2ος τρόπος

Για $x=0$ είναι $f^2(0)-2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)(f(0)-2)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)=2$

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)<e^x$, για $x=0$ προκύπτει ότι $f(0)<1$, οπότε $f(0)=0$

β) Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε: $0<2 \Leftrightarrow f(0)<f(2) \Leftrightarrow 0<0$ άτοπο. Όμοια αν f γνησίως φθίνουσα.

γ) $f^2(x^2)+2f(x)>f^2(x)+2f(x^2) \Leftrightarrow f^2(x^2)-2f(x^2)>f^2(x)-2f(x) \Leftrightarrow (x^2)^2-2x^2>x^2-2x \Leftrightarrow$

$x^4-3x^2+2x>0 \Leftrightarrow x(x^3-3x+2)>0 \Leftrightarrow$

$x(x-1)^2(x+2)>0 \Leftrightarrow$ $x<-2$ ή $x>0$

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
x		−		−	0	+		+	
$x+2$		−	0	+		+		+	
$(x-1)^2$		+		+		+	0	+	
Γινόμενο		+	0	−	0	+	0	+	

δ) Η C_f τέμνει την $y=-x$ στο $(0,0)$.Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=-x$ λύση μόνο το 0.

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}^*$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=-x_0$, τότε η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται:

$f^2(x_0)-2f(x_0)=x_0^2-2x_0 \Leftrightarrow \cancel{x_0^2}+2x_0=\cancel{x_0^2}-2x_0 \Leftrightarrow 4x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0$ άτοπο.

ε) Αν η f ήταν άρτια η περιττή τότε θα ήταν $f(-x)=f(x)$ ή $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε όμως $f(-2)=f(2)=0$ ή $f(-2)=-f(2)=0$ το οποίο σε κάθε περίπτωση είναι άτοπο αφού το -2 δεν είναι ρίζα της f.

στ) Για $x>0$ είναι:

$f^2(\ln x)+1=2f(\ln x) \Leftrightarrow f^2(\ln x)-2f(\ln x)+1=0 \Leftrightarrow (f(\ln x)-1)^2=0 \Leftrightarrow f(\ln x)=1$

Αντικαθιστώντας στη (1) όπου x το lnx προκύπτει :

$f^2(\ln x)-2f(\ln x)=\ln^2 x-2\ln x \Leftrightarrow 1-2=\ln^2 x-2\ln x \Leftrightarrow \ln^2 x-2\ln x+1=0 \Leftrightarrow$

$(\ln x-1)^2=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$