

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$

Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$, λέγεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους.

Αν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ η γραμμική εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή. Ειδικά όταν:

- $b \neq 0$, η γραμμική εξίσωση γράφεται $y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$ και είναι ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{b}$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $\frac{\gamma}{b}$.
- $b = 0$ και $a \neq 0$, η γραμμική εξίσωση γράφεται: $x = \frac{\gamma}{a}$ και είναι ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$.

Λύση της γραμμικής εξίσωσης λέγεται κάθε διατεταγμένο ζευγάρι (x_0, y_0) που επαληθεύει την εξίσωση.

Κάθε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους έχει **άπειρες λύσεις** (όταν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$) ή είναι **αδύνατη** (όταν $a = b = 0$)

Γραμμικό σύστημα 2×2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $ax + by = \gamma$ και $a'x + b'y = \gamma'$ και θέλουμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 2×2** και γράφουμε

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

Λύση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 , λέγεται κάθε διατεταγμένο ζευγάρι (x_0, y_0) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

Επαλήθευση της λύσης του συστήματος λέγεται η διαδικασία με την οποία αντικαθιστούμε τις τιμές των αγνώστων που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν.

Ισοδύναμα λέγονται δύο συστήματα όταν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις.

Γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων (ϵ) και (ϵ') λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $\lambda \cdot (\epsilon) + \lambda' \cdot (\epsilon')$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.

Μέθοδοι επίλυσης γραμμικού συστήματος 2×2

Γραφική επίλυση

Σχεδιάζουμε τις ευθείες που αντιπροσωπεύουν οι εξισώσεις του συστήματος. Αν:

- οι δύο ευθείες τέμνονται, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** (x_0, y_0) , που είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών.
- οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι **αδύνατο**, αφού δεν υπάρχει κοινό σημείο του οποίου οι συντεταγμένες να είναι λύση του συστήματος.
- οι ευθείες ταυτίζονται, τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**, αφού υπάρχουν άπειρα κοινά σημεία στις δύο ευθείες.

Παραδείγματα

i. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$.

Λύση

Το σύστημα γράφεται: $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ y=\frac{3}{2}x-2 \end{cases}$.

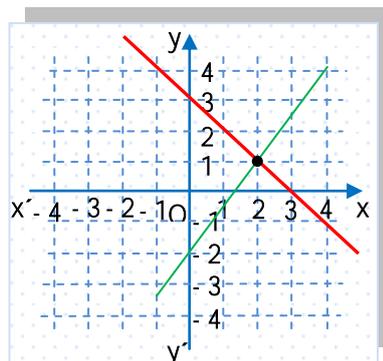
Οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος, έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -1$ και

$\lambda_2 = \frac{3}{2}$ και επειδή $\lambda_1 \neq \lambda_2$ οι ευθείες τέμνονται οπότε το

σύστημα έχει μοναδική λύση.

Σχεδιάζοντας τις ευθείες του συστήματος, παρατηρούμε

ότι τέμνονται στο σημείο $(2,1)$, άρα το διατεταγμένο ζευγάρι $(2,1)$ είναι η λύση του συστήματος.



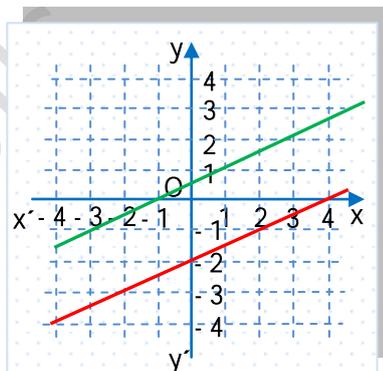
ii. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+4y=2 \end{cases}$.

Λύση

Το σύστημα γράφεται: $\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-2 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$.

Οι δύο ευθείες έχουν συντελεστές διεύθυνσης

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, οπότε είναι παράλληλες.



iii. Να λύσετε γραφικά το σύστημα $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 6x+2y=6 \end{cases}$.

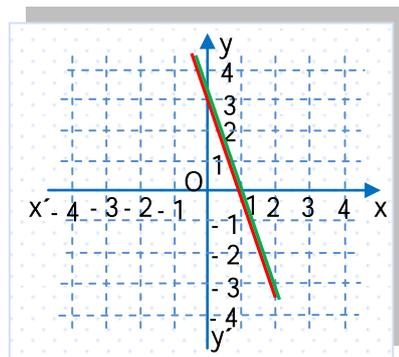
Λύση

Το σύστημα γράφεται: $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 6x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x+3 \\ y=-3x+3 \end{cases}$.

Επειδή οι δύο ευθείες ταυτίζονται το σύστημα έχει

άπειρες λύσεις που είναι της

μορφής $(x, -3x+3)$, $x \in \mathbb{R}$.



Μέθοδος αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο, για παράδειγμα ως προς y .

Αντικαθιστούμε το y στην άλλη εξίσωση και έτσι προκύπτει εξίσωση μόνο με έναν άγνωστο, το x . Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε το x και την τιμή του την αντικαθιστούμε στη πρώτη εξίσωση απ' όπου υπολογίζουμε το y .

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$.

Λύση

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ 3x-2(3-x)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ 3x-6+2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ 5x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2=1 \\ x=\frac{10}{5}=2 \end{cases}$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (2,1).

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι. Στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε.

Τέλος αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου αγνώστου.

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$.

Λύση

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases} \cdot \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=12 \end{cases} \xrightarrow{+} 4x+6y+9x-6y=14+12 \Leftrightarrow 13x=26 \Leftrightarrow x=\frac{26}{13}=2$$

$$2 \cdot 2 + 3y = 7 \Leftrightarrow 4 + 3y = 7 \Leftrightarrow 3y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{3} = 1$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (2,1).

Λύση – Διερεύνηση Γραμμικού Συστήματος 2x2

Εστω το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} ax+\beta y=\gamma \\ a'x+\beta'y=\gamma' \end{cases}$.

Βρίσκουμε την παράσταση $D = \begin{vmatrix} a & \beta \\ a' & \beta' \end{vmatrix} = a \cdot \beta' - a' \cdot \beta$ που ονομάζεται **ορίζουσα του συστήματος**.

Βρίσκουμε τις ορίζουσες $D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma \cdot \beta' - \gamma' \cdot \beta$ και $D_y = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ a' & \gamma' \end{vmatrix} = a \cdot \gamma' - a' \cdot \gamma$.

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση (x,y) , όπου $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$, το σύστημα θα είναι αδύνατο ή θα έχει άπειρες λύσεις.

Γραμμικό σύστημα 3x3

Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους x,y,z

$$\begin{cases} a_1x+\beta_1y+\gamma_1z=\delta_1 \\ a_2x+\beta_2y+\gamma_2z=\delta_2 \\ a_3x+\beta_3y+\gamma_3z=\delta_3 \end{cases}$$

θέλουμε να βρούμε τις κοινές τους λύσεις τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 3x3**.

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος επίλυσης ενός τέτοιου συστήματος είναι η μέθοδος αντικατάστασης.

Λύνουμε τη μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς τον έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στις δύο άλλες εξισώσεις. Έτσι οι δύο τελευταίες εξισώσεις μετατρέπονται σε γραμμικό σύστημα 2×2 , το οποίο το λύνουμε με έναν από τους προηγούμενους τρόπους. Αφού προσδιορίσουμε τους δύο αγνώστους αντικαθιστούμε τις τιμές τους στην πρώτη εξίσωση απ' όπου υπολογίζουμε την τιμή και του τρίτου αγνώστου.

Μεθοδολογία ασκήσεων

Λύση γραμμικού συστήματος 2×2 με τη μέθοδο οριζουσών

Αρχικά θα βρούμε την ορίζουσα D του συστήματος.

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , όπου $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$.

- Αν $D = 0$, το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Στη περίπτωση αυτή θα προσπαθούμε, με κατάλληλες απλοποιήσεις, οι συντελεστές των αγνώστων και στις δύο εξισώσεις να είναι αντίστοιχα ίδιοι. Τότε αν:

- $\gamma \neq \gamma'$ το σύστημα είναι αδύνατο
- $\gamma = \gamma'$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και βρίσκουμε λύνοντας τη μία πλέον εξίσωση (οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται στη περίπτωση αυτή) ως προς τον έναν άγνωστο.

1. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, χωρίς να τα λύσετε.

i. $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ -4x + 12y = -20 \end{cases}$

Λύση

i. Η ορίζουσα του συστήματος είναι: $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-5) = 8 + 5 = 13$

Επειδή $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.

ii. Η ορίζουσα του συστήματος είναι: $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = 6 - 6 = 0$, οπότε το σύστημα

είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Αν διαιρέσουμε τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος με το 2, προκύπτει:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \text{ που είναι προφανώς αδύνατο.}$$

iii. Η ορίζουσα του συστήματος είναι: $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot 12 - (-4) \cdot (-3) = 12 - 12 = 0$,

οπότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Αν διαιρέσουμε τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος με το -4 , προκύπτει:

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y + 5.$$

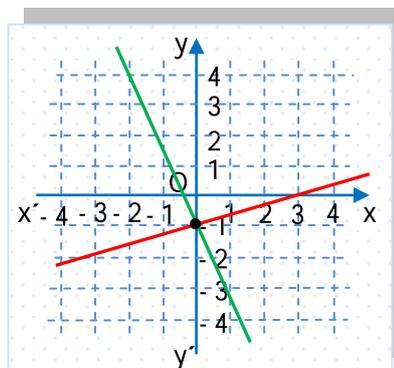
Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής $(3y + 5, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

2. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ με όλες τις μεθόδους επίλυσης συστήματος.

Λύση

Γραφικά

Σχεδιάζοντας τις ευθείες του συστήματος, παρατηρούμε ότι τέμνονται στο σημείο $(0, -1)$, άρα $x=0$ και $y=-1$.



Μέθοδος αντικατάστασης

$$\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+3 \\ 2(3y+3)+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+3 \\ 6y+6+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=3y+3 \\ 7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3(-1)+3=0 \\ y=-\frac{7}{7}=-1 \end{cases} \text{ . Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος } (0, -1) \text{ .}$$

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

$$\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6y=-6 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} -2x+6y+2x+y=-6-1 \Leftrightarrow 7y=-7 \Leftrightarrow y=-1$$

$$x-3 \cdot (-1)=3 \Leftrightarrow x+3=3 \Leftrightarrow x=0 \text{ . Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος } (0, -1) \text{ .}$$

Μέθοδος οριζουσών

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 1 + 6 = 7, \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 3 - 3 = 0,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -1 - 6 = -7.$$

$$\text{Είναι } x = \frac{D_x}{D} = \frac{0}{7} = 0 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7}{7} = -1.$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(0, -1)$.

3. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{3} \\ x+2y=-11 \end{cases}$.

Λύση

1ος τρόπος

Αρχικά θα μετατρέψουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος σε ισοδύναμη της μορφής

$$ax+by=\gamma \text{ . Είναι } \frac{x}{5} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow 3x=5y \Leftrightarrow 3x-5y=0 \text{ .}$$

Στη συνέχεια διαλέγουμε μία από τις προηγούμενες μεθόδους για να λύσουμε το σύστημα. Επειδή οι τρεις πρώτοι μέθοδοι έχουν χρησιμοποιηθεί αρκετά σε προηγούμενες

τάξεις, εμείς στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιούμε κυρίως τη μέθοδο οριζουσών.

$$\text{Είναι } \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{3} \\ x+2y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=0 \\ x+2y=-11 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-5) = 11, D_x = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 55 = -55, D_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} = -33 - 0 = -33.$$

$$\text{Είναι } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-55}{11} = -5 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-33}{11} = -3.$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(-5, -3)$.

2ος τρόπος

Όταν η μία εξίσωση του συστήματος είναι αναλογία τότε χρήσιμη είναι και η παρακάτω μέθοδος:

$$\text{Εστω } \frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \lambda, \text{ τότε: } \begin{cases} \frac{x}{5} = \lambda \\ \frac{y}{3} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$$

$$\text{Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται: } 5\lambda + 2 \cdot 3\lambda = -11 \Leftrightarrow 11\lambda = -11 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{11}{11} = -1.$$

$$\text{Τότε: } x = 5 \cdot (-1) = -5 \text{ και } y = 3 \cdot (-1) = -3.$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(-5, -3)$.

4. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{x-2}{4} = \frac{1-y}{3} \\ 2x+5y=2 \end{cases}$.

Λύση

$$\text{Εστω } \frac{x-2}{4} = \frac{1-y}{3} = \lambda, \text{ τότε: } \begin{cases} \frac{x-2}{4} = \lambda \\ \frac{1-y}{3} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 4\lambda \\ 1-y = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda + 2 \\ 1 - 3\lambda = y \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$$2(4\lambda + 2) + 5(1 - 3\lambda) = 2 \Leftrightarrow 8\lambda + 4 + 5 - 15\lambda = 2 \Leftrightarrow -7\lambda = -7 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

$$\text{Τότε } x = 4 \cdot 1 + 2 = 6 \text{ και } y = 1 - 3 \cdot 1 = -2.$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(6, -2)$.

5. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{x+3}{5} + \frac{2y-6}{3} = -1 \\ \frac{5x-1}{3} + \frac{y+4}{2} = 5 \end{cases}$.

Λύση

$$\begin{cases} \frac{x+3}{5} + \frac{2y-6}{3} = -1 \\ \frac{5x-1}{3} + \frac{y+4}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{5} \cdot \frac{x+3}{\cancel{\beta}} + \sqrt[5]{5} \cdot \frac{2y-6}{\cancel{\beta}} = -1 \cdot 15 \\ \sqrt[2]{\beta} \cdot \frac{5x-1}{\cancel{\beta}} + \sqrt[3]{\beta} \cdot \frac{y+4}{\cancel{\beta}} = 6 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+3) + 5(2y-6) = -15 \\ 2(5x-1) + 3(y+4) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+9+10y-30 = -15 \\ 10x-2+3y+12 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+10y = 6 \\ 10x+3y = 20 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 100 = -91, D_x = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 20 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 200 = -182, D_y = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 60 - 60 = 0.$$

$$\text{Είναι } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-182}{-91} = 2 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-91} = 0.$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (2,0).

6. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} (2+\sqrt{2})x + 2y = 2 - \sqrt{2} \\ x + (2-\sqrt{2})y = 7 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} 2x - 2(3-\sqrt{5})y = 14 - 6\sqrt{5} \\ (3+\sqrt{5})x - 4y = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Λύση

$$\text{i. } D = \begin{vmatrix} (2+\sqrt{2}) & 2 \\ 1 & (2-\sqrt{2}) \end{vmatrix} = (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) - 2 = 2^2 - (\sqrt{2})^2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

Το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Για να βρούμε ακριβώς τι συμβαίνει διαιρούμε την πρώτη εξίσωση με $(2+\sqrt{2})$ ή πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση με $(2+\sqrt{2})$, έτσι ώστε και οι δύο εξισώσεις να έχουν το ίδιο πρώτο μέλος. Είναι:

$$(2+\sqrt{2})x + 2y = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{2}{2+\sqrt{2}}y = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}y = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{2(2-\sqrt{2})}{2^2 - (\sqrt{2})^2}y = \frac{2^2 - 4\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{2^2 - (\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{\cancel{2}(2-\sqrt{2})}{\cancel{2}}y = \frac{6-4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x + (2-\sqrt{2})y = \frac{\cancel{2}(3-2\sqrt{2})}{\cancel{2}} \Leftrightarrow x + (2-\sqrt{2})y = 3 - 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Το σύστημα γίνεται: } \begin{cases} (2+\sqrt{2})x + 2y = 2 - \sqrt{2} \\ x + (2-\sqrt{2})y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (2-\sqrt{2})y = 3 - 2\sqrt{2} \\ x + (2-\sqrt{2})y = 7 \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

$$\text{ii. } D = \begin{vmatrix} 2 & -2(3-\sqrt{5}) \\ (3+\sqrt{5}) & -4 \end{vmatrix} = -8 + 2(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = -8 + 2[3^2 - (\sqrt{5})^2] \Leftrightarrow$$

$$D = -8 + 2(9-5) = -8 + 8 = 0.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται: $(3+\sqrt{5})x - 4y = 6 - 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$$x - \frac{4}{3+\sqrt{5}}y = \frac{6-2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}y = \frac{(6-2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{4(3-\sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2}y = \frac{18 - 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 2(\sqrt{5})^2}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{4(3-\sqrt{5})}{4}y = \frac{28 - 12\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow$$

$$x - (3-\sqrt{5})y = 7 - 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 2x - (3-\sqrt{5})y = 14 - 6\sqrt{5}$$

Το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 2x - 2(3-\sqrt{5})y = 14 - 6\sqrt{5} \\ (3+\sqrt{5})x - 4y = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2(3-\sqrt{5})y = 14 - 6\sqrt{5} \\ 2x - 2(3-\sqrt{5})y = 14 - 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$2x - 2(3-\sqrt{5})y = 14 - 6\sqrt{5} \Leftrightarrow 2x = 14 - 6\sqrt{5} + 2(3-\sqrt{5})y \Leftrightarrow x = 7 - 3\sqrt{5} + (3-\sqrt{5})y$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής $(7 - 3\sqrt{5} + (3-\sqrt{5})y, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

7. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda + 2 \\ 2x + \lambda y = 4 \end{cases}$.

Λύση

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda + 4), \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda + 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\lambda - 2\lambda - 4 = 2\lambda - 4 = 2(\lambda - 2)$$

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y), \text{ όπου: } x = \frac{D_x}{D} = \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 4)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{\lambda + 4}{\lambda + 2} \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\lambda - 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{2}{\lambda + 2}$$

- Αν $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$, τότε:

- Για $\lambda = 2$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = 2 - y$.

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής $(2 - y, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

- Για $\lambda = -2$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -2x+2y=0 \\ 2x-2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$ και είναι αδύνατο.

8. Αν το σύστημα $\begin{cases} (\lambda-1)x+y=2 \\ 3x+(\lambda+1)y=4\lambda-2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda x+(2\lambda+1)y=3 \\ 2x-(1-3\lambda)y=\lambda \end{cases}$ είναι αδύνατο.

Λύση

Επειδή το πρώτο σύστημα έχει άπειρες λύσεις, για την ορίζουσά του ισχύει:

$$D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

- Αν $\lambda = -2$, το πρώτο σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 3x-y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=-2 \\ 3x-y=-6 \end{cases}$ και είναι αδύνατο.

- Αν $\lambda = 2$, το πρώτο σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ και έχει άπειρες λύσεις.

- Για $\lambda = 2$, το δεύτερο σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 2x+5y=2 \end{cases}$ και είναι αδύνατο.

9. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, τα κοινά σημεία των ευθειών:
 $\varepsilon_1: (\lambda-4)x+3y=\lambda$ και $\varepsilon_2: 3x+(\lambda+4)y=15$.

Λύση

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των δύο ευθειών, θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda-4)x+3y=\lambda \\ 3x+(\lambda+4)y=15 \end{cases} \text{ των δύο εξισώσεων τους.}$$

$$\text{Είναι } D = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 3 \\ 3 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16 - 9 = \lambda^2 - 25 = (\lambda-5)(\lambda+5),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 15 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 45 = (\lambda-5)(\lambda+9),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 15\lambda - 60 - 3\lambda = 12\lambda - 60 = 12(\lambda-5)$$

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-5)(\lambda+5) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 5$ και $\lambda \neq -5$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y), \text{ όπου: } x = \frac{D_x}{D} = \frac{(\lambda-5)(\lambda+9)}{(\lambda-5)(\lambda+5)} = \frac{\lambda+9}{\lambda+5} \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{12(\lambda-5)}{(\lambda-5)(\lambda+5)} = \frac{12}{\lambda+5},$$

οπότε οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $\left(\frac{\lambda+9}{\lambda+5}, \frac{12}{\lambda+5}\right)$

- Αν $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda-5)(\lambda+5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$ ή $\lambda = -5$, τότε:

- Για $\lambda = 5$, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x+9y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=5 \\ x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow x+3y=5 \Leftrightarrow x=5-3y.$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που είναι της μορφής $(2-y, y)$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε οι δύο ευθείες ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία που είναι της μορφής $(2-y, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

- Για $\lambda = -5$, το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} -9x+3y=-5 \\ 3x-y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=\frac{5}{3} \\ 3x-y=15 \end{cases}$ και είναι αδύνατο,

οπότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

10. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y , για τις ορίζουσες του D, D_x, D_y

ισχύουν οι σχέσεις: $\begin{cases} 2D_x + D_y = -2D \\ D_x - 3D_y = -15D \end{cases}$. Να βρείτε τη λύση του συστήματος, αν

γνωρίζετε ότι είναι μοναδική.

Λύση

Επειδή το σύστημα έχει μοναδική λύση, είναι $D \neq 0$. Επειδή $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$, έχουμε:

$$\begin{cases} 2D_x + D_y = -2D \\ D_x - 3D_y = -15D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D} = -2 \\ \frac{D_x}{D} - 3\frac{D_y}{D} = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ x - 3y = -15 \end{cases} \cdot 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = -6 \quad (+) \\ x - 3y = -15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$6x + x + 3y - 3y = -6 - 15 \Leftrightarrow 7x = -21 \Leftrightarrow x = -3$$

$$\text{Τότε } 2 \cdot (-3) + y = -2 \Leftrightarrow -6 + y = -2 \Leftrightarrow y = -2 + 6 = 4$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(-3, 4)$.

11. Να λύσετε γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y και ορίζουσες D, D_x, D_y για τις

οποίες ισχύει: $D_x^2 + D_y^2 + D^2 - 12D_x + 8D_y - 4D + 56 = 0$.

Λύση

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 - 12D_x + 8D_y - 4D + 56 = 0 \Leftrightarrow D_x^2 - 12D_x + D_y^2 + 8D_y + D^2 - 4D + 56 = 0 \Leftrightarrow$$

$$D_x^2 - 2 \cdot 6 \cdot D_x + 6^2 + D_y^2 + 2 \cdot 4 \cdot D_y + 4^2 + D^2 - 2 \cdot 2 \cdot D + 2^2 + 56 - 6^2 - 4^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(D_x - 6)^2 + (D_y + 4)^2 + (D - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} D_x - 6 = 0 \\ D_y + 4 = 0 \\ D - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_x = 6 \\ D_y = -4 \\ D = 2 \end{cases}$$

Επειδή, $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , όπου:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{2} = 3 \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{2} = -2$$

12. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y , για τις ορίζουσες του D, D_x, D_y ισχύει η σχέση: $2D_x^2 - 2D_x D_y + D_y^2 = 0$. Να βρείτε τη λύση του συστήματος, αν γνωρίζετε ότι είναι μοναδική.

Λύση

Επειδή το σύστημα έχει μοναδική λύση, είναι $D \neq 0$.

$$\text{Είναι: } 2D_x^2 - 2D_x D_y + D_y^2 = 0 \Leftrightarrow D_x^2 - 2D_x D_y + D_y^2 + D_x^2 = 0 \Leftrightarrow (D_x - D_y)^2 + D_x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} D_x - D_y = 0 \\ D_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow D_x = D_y = 0$$

Αν (x, y) η μοναδική λύση του συστήματος, τότε $x = \frac{D_x}{D} = 0$ και $y = \frac{D_y}{D} = 0$.

13. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 48 cm. Αν αυξήσουμε συγχρόνως τη μία πλευρά κατά 5 cm και την άλλη κατά 1 cm, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 65 cm^2 . Ποιες είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

Λύση

Εστω x, y οι διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου.

Επειδή η περίμετρος του είναι 48 cm, ισχύει:

$$2x + 2y = 48 \Leftrightarrow x + y = 24 \quad (1)$$

Το νέο ορθογώνιο έχει διαστάσεις $x + 5, y + 1$.

Το αρχικό ορθογώνιο έχει εμβαδόν $E_1 = x \cdot y$ και το νέο ορθογώνιο έχει εμβαδόν $E_2 = (x + 5)(y + 1) = xy + x + 5y + 5$.

Επειδή το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου είναι αυξημένο κατά 65 cm^2 , σε σχέση με το αρχικό, ισχύει:

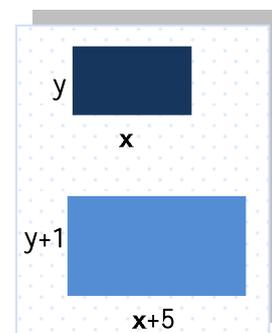
$$E_2 = E_1 + 65 \Leftrightarrow xy + x + 5y + 5 = xy + 65 \Leftrightarrow x + 5y = 60 \quad (2)$$

Για να βρούμε τις διαστάσεις x, y , αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (1),(2).

$$\begin{cases} x + y = 24 & (-) \\ x + 5y = 60 \end{cases} \Rightarrow x + y - x - 5y = 24 - 60 \Leftrightarrow -4y = -36 \Leftrightarrow y = \frac{-36}{-4} = 9.$$

Τότε $x + 9 = 24 \Leftrightarrow x = 15$

Άρα το ορθογώνιο έχει διαστάσεις 9 cm και 15 cm.



14. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του παίρνουμε αριθμό κατά 18 μικρότερο. Να βρείτε τον αριθμό.

Λύση

Εστω ότι ο αριθμός είναι ο xy (**προσοχή** δεν είναι πολλαπλασιασμός), όπου x, y τα ψηφία του. Τότε ο αριθμός θα έχει x δεκάδες και y μονάδες, δηλαδή: $xy = 10x + y$.

Επειδή το άθροισμα των ψηφίων του είναι 14, ισχύει ότι: $x + y = 14 \quad (1)$.

Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, τότε θα προκύψει ο αριθμός yx , για τον οποίο ισχύει: $yx = 10y + x$.

Επειδή ο νέος αριθμός είναι κατά 18 μικρότερος από τον αρχικό, ισχύει ότι:

$$yx = xy - 18 \Leftrightarrow 10y + x = 10x + y - 18 \Leftrightarrow -9x + 9y = -18 \Leftrightarrow x - y = 2 \quad (2).$$

Για να βρούμε τα ψηφία του αριθμού, θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (1),(2).

$\begin{cases} x+y=14 & (+) \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow x+y+x-y=14+2 \Leftrightarrow 2x=16 \Leftrightarrow x=8$. Τότε $8+y=14 \Leftrightarrow y=6$, οπότε ο αριθμός είναι ο 86.

15. Ένας χημικός θέλει να κατασκευάσει 100ml από ένα αλκοολούχο ποτό με περιεκτικότητα 40% σε οινόπνευμα. Για το λόγο αυτό θα ανακατέψει 2 άλλα ποτά που το ένα είναι περιεκτικότητας 60% και το άλλο 35% σε οινόπνευμα. Να βρείτε την ποσότητα που πρέπει να χρησιμοποιήσει από κάθε ποτό.

Λύση

Εστω ότι από το πρώτο ποτό θα χρησιμοποιήσει x ml και y ml από το δεύτερο ποτό. Τότε $x+y=100$ (1).

Το πρώτο ποτό περιέχει $\frac{60}{100}x$ οινόπνευμα και το δεύτερο περιέχει $\frac{35}{100}y$ οινόπνευμα.

Τότε $\frac{60}{100}x + \frac{35}{100}y = \frac{40}{100} \cdot 100$ (2).

Για να βρούμε τις ποσότητες x, y , θα λύσουμε το σύστημα των (1),(2).

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{60}{100}x + \frac{35}{100}y = \frac{40}{100} \cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=100-y \\ 60x+35y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=100-y \\ 60(100-y)+35y=40 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=100-y \\ 6000-60y+35y=4000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=100-y \\ -25y=-2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=100-y \\ y=\frac{-2000}{-25}=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=100-80=20 \\ y=80 \end{cases}$$

Άρα από το πρώτο ποτό θα χρησιμοποιήσει 80 ml και από το δεύτερο ποτό 20 ml.

Λύση γραμμικού συστήματος 3x3

Λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο (1) και τον αντικαθιστάμε στις άλλες δύο εξισώσεις. Λύνουμε το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων απ' όπου υπολογίζουμε τους 2 αγνώστους και αντικαθιστώντας τις τιμές τους στην (1) υπολογίζουμε και τον τρίτο άγνωστο.

16. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x-2y+3\omega=14 \\ 4x+y-5\omega=1 \\ 3x+2y-\omega=5 \end{cases}$

Λύση

Αρχικά θα λύσουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς y . Είναι:

$$4x+y-5\omega=1 \Leftrightarrow y=1-4x+5\omega \quad (1).$$

Η πρώτη και η τρίτη εξίσωση του συστήματος γίνονται:

$$\begin{cases} 2x-2(1-4x+5\omega)+3\omega=14 \\ 3x+2(1-4x+5\omega)-\omega=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2+8x-10\omega+3\omega=14 \\ 3x+2-8x+10\omega-\omega=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-7\omega=16 \\ -5x+9\omega=3 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 10x - 7\omega = 16 & (+) \\ -10x + 18\omega = 6 \end{cases} \Rightarrow 11\omega = 22 \Leftrightarrow \omega = 2.$$

Τότε $10x - 7 \cdot 2 = 16 \Leftrightarrow 10x - 14 = 16 \Leftrightarrow 10x = 30 \Leftrightarrow x = 3$

Από την (1), έχουμε: $y = 1 - 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = -1$.

Άρα η λύση του αρχικού συστήματος είναι η τριάδα: $(3, -1, 2)$.

17. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y + \omega = 4 \\ \omega + x = -2 \end{cases}$$

Λύση

1ος τρόπος

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y και το αντικαθιστούμε στις άλλες εξισώσεις.

$$x + y = 8 \Leftrightarrow y = 8 - x \quad (1)$$

$$\begin{cases} 8 - x + \omega = 4 \\ \omega + x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \omega = -4 & (+) \\ x + \omega = -2 \end{cases} \Rightarrow -x + x + \omega + \omega = -4 - 2 \Leftrightarrow 2\omega = -6 \Leftrightarrow \omega = -3.$$

Τότε $x + (-3) = -2 \Leftrightarrow x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = -2 + 3 = 1$ και από την (1), έχουμε: $y = 8 - 1 = 7$

Άρα η λύση του αρχικού συστήματος είναι η τριάδα: $(1, 7, -3)$.

2ος τρόπος

Όταν στις εξισώσεις του συστήματος παρατηρείτε κυκλική εναλλαγή των αγνώστων, τότε μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη και τις τρεις εξισώσεις και από την καινούργια εξίσωση που θα σχηματιστεί, να αφαιρέσουμε ξεχωριστά κάθε μια από τις αρχικές. Είναι:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y + \omega = 4 \\ \omega + x = -2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x + y = 8 \\ y + \omega = 4 \\ \omega + x = -2 \end{cases} \Rightarrow x + y + y + \omega + \omega + x = 8 + 4 - 2 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2\omega = 10 \Leftrightarrow x + y + \omega = 5$$

$$\begin{array}{r} x + y + \omega = 5 \\ -x + y = 8 \\ \hline \omega = 5 - 8 = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y + \omega = 5 \\ -x + y + \omega = 4 \\ \hline x = 5 - 4 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y + \omega = 5 \\ -x + \omega = -2 \\ \hline y = 5 + 2 = 7 \end{array}$$

Άρα η λύση του αρχικού συστήματος είναι η τριάδα: $(1, 7, -3)$.

18. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} = -1 \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = -2 \end{cases}$$

Λύση

Θέτουμε $\frac{1}{x} = \alpha$, $\frac{1}{y} = \beta$ και $\frac{1}{\omega} = \gamma$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \beta + \gamma = -1 \\ \gamma + \alpha = -2 \end{cases} \quad (+) \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = -1 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} -\alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2} \\ \alpha + \beta = 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2} \\ \beta + \gamma = -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2} \\ \alpha + \gamma = -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

Άρα $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$, $\frac{1}{y} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$ και $\frac{1}{\omega} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \omega = -\frac{2}{5}$

Άρα η λύση του αρχικού συστήματος είναι η τριάδα: $\left(2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{5}\right)$.

19. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $y = ax^2 + bx + \gamma$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,8)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,5)$.

Λύση

Επειδή η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ , οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή:

$$\begin{cases} 8 = a \cdot (-1)^2 + \beta \cdot (-1) + \gamma \\ 2 = a \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma \\ 5 = a \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 8 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 8 - \alpha + \beta \\ \alpha + \beta + 8 - \alpha + \beta = 2 \\ 4\alpha + 2\beta + 8 - \alpha + \beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 8 - \alpha + \beta \\ 2\beta = -6 \\ 3\alpha + 3\beta = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 8 - \alpha + \beta \\ \beta = -3 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 8 - \alpha - 3 \\ \beta = -3 \\ \alpha - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 5 - \alpha \\ \beta = -3 \\ \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 5 - 2 = 3 \\ \beta = -3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Άρα η παραβολή έχει εξίσωση: $y = 2x^2 - 3x + 3$.

20. Ένας πατέρας είναι κατά 21 χρόνια μεγαλύτερος από το άθροισμα των ηλικιών των δύο του παιδιών. Πριν από 5 χρόνια η ηλικία του πατέρα ήταν οκταπλάσια από την ηλικία του δεύτερου παιδιού του, ενώ μετά από 4 χρόνια ο πατέρας θα είναι 5 χρόνια μικρότερος από το τριπλάσιο της ηλικίας του πρώτου του παιδιού. Να βρείτε τις ηλικίες τους.

Λύση

Εστω ότι ο πατέρας είναι x ετών, το πρώτο παιδί y ετών και το δεύτερο παιδί ω ετών. Επειδή ο πατέρας είναι κατά 21 χρόνια μεγαλύτερος από το άθροισμα των ηλικιών των δύο του παιδιών, ισχύει ότι $x = y + \omega + 21$ (1)

Πριν από 5 χρόνια, ο πατέρας ήταν $x - 5$ ετών και το δεύτερό του παιδί $\omega - 5$ ετών. Επειδή τότε ο πατέρας θα έχει οκταπλάσια ηλικία από το δεύτερο του παιδί, ισχύει ότι: $x - 5 = 8(\omega - 5)$ (2).

Μετά από 4 χρόνια ο πατέρας θα είναι $x + 4$ και το πρώτο του παιδί $y + 4$ ετών. Επειδή

τότε ο πατέρας θα είναι 5 χρόνια μικρότερος από το τριπλάσιο της ηλικίας του πρώτου του παιδιού, ισχύει ότι: $x+4=3(y+4)-5$ (3).

Για να βρούμε τις ηλικίες τους, αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (1),(2),(3).

$$\begin{cases} x=y+\omega+21 \\ x-5=8(\omega-5) \\ x+4=3(y+4)-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ x-5=8\omega-40 \\ x+4=3y+12-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ x-8\omega=-35 \\ x-3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ y+\omega+21-8\omega=-35 \\ y+\omega+21-3y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+\omega+21 \\ y-7\omega=-56 \\ -2y+\omega=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ y=7\omega-56 \\ -2y+\omega=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ y=7\omega-56 \\ -2(7\omega-56)+\omega=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ y=7\omega-56 \\ -14\omega+112+\omega=-18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ y=7\omega-56 \\ -13\omega=-130 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ y=7\omega-56 \\ \omega=\frac{-130}{-13}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+\omega+21 \\ y=7 \cdot 10-56=14 \\ \omega=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14+10+21=45 \\ y=19 \\ \omega=10 \end{cases}$$

Οπότε ο πατέρας είναι 45 ετών και τα δύο παιδιά 14 και 10 ετών αντίστοιχα.

askisopolis

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

Ερωτήσεις κατανόησης

21. Να τοποθετήσετε μέσα σε κάθε ορθογώνιο το γράμμα Σ αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις τις θεωρείτε σωστές ή το Λ αν τις θεωρείτε λανθασμένες.
- i. Αν ένα γραμμικό 2×2 σύστημα έχει $D = 0$, τότε είναι αδύνατο.
 - ii. Αν ένα γραμμικό 2×2 σύστημα έχει 2 διαφορετικές λύσεις, τότε έχει άπειρες λύσεις.
 - iii. Αν ένα γραμμικό 2×2 σύστημα έχει $D \neq 0$, τότε οι ευθείες που αντιπροσωπεύουν τις εξισώσεις του είναι παράλληλες.
 - iv. Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα, όταν κάποιες από τις λύσεις τους είναι κοινές.
 - v. Αν δύο ευθείες τέμνονται, τότε το σύστημα των εξισώσεών τους έχει μοναδική λύση.
 - vi. Το σύστημα $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.
 - vii. Το σύστημα $\begin{cases} 3x - \beta y = \alpha \\ \beta x + 3y = \gamma \end{cases}$ έχει πάντα λύση.
 - viii. Αν $(D - 1)^2 + (2D - 2)^2 = 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
 - ix. Αν $\alpha', \beta' \neq 0$ και η ορίζουσα D του συστήματος $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ είναι μηδέν, τότε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$
22. Ένα γραμμικό 2×2 σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Αν η μία του εξίσωση είναι η $2x - 5y = -3$, τότε η άλλη του εξίσωση είναι η:
- A. $x - 5y = -3$ B. $2x - y = -3$ Γ. $3x + 4y = 4$
 Δ. $4x - 10y = 9$ E. $10y - 4x = 6$
23. Το σύστημα $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ έχει:
- A. μοναδική λύση B. καμία λύση Γ. άπειρες λύσεις.
24. Αν το σύστημα $\begin{cases} -3x + 2y = \alpha \\ 6x - 4y = \kappa \alpha \end{cases}$, $\kappa, \alpha \in \mathbb{R}^*$, έχει άπειρες λύσεις, το κ είναι ίσο με:
- A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. -2 E. -1
25. Αν για ένα γραμμικό 2×2 σύστημα ισχύει $D_x + D_y = 2D$, $D \neq 0$ και $x = y$, τότε η λύση του συστήματος είναι:
- A. (0,0) B. (2,0) Γ. (1,1) Δ. (2,2) E. $(x, x), x \in \mathbb{R}$

26. Αν το σύστημα $\begin{cases} 3x + ay = 6 \\ x + y = \beta \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, τότε οι τιμές των a και β είναι:
- A. (-1, 0) B. (2, 4) Γ. (3, 2) Δ. (1, 3) E. (0, 1)

A ΟΜΑΔΑ

27. Δίνεται η ευθεία ϵ με εξίσωση: $3x - 4y = 5$.
- Να γραφεί η εξίσωση ευθείας ϵ_2 που ταυτίζεται με την ϵ .
 - Να γραφεί η εξίσωση ευθείας ϵ_1 παράλληλης προς την ϵ .
28. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, χωρίς να τα λύσετε.
- $\begin{cases} 3x - 4y = -3 \\ 6x + 3y = 1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 6x - 30y = 24 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 5x - 6y = 2 \\ -15x + 18y = 30 \end{cases}$
29. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:
- $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{cases}$
 - $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 5y = 12 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 2x + 7y = -3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 5x - 12y = -9 \\ 6x + y = 20 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 7x - y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases}$
30. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:
- $\begin{cases} 2x + 9y = 4 \\ 6x + 27y = 16 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3y - 12x = -15 \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 14x + 7y = 7 \end{cases}$
31. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:
- $\begin{cases} \frac{x-y-1}{4} = \frac{3x-4y+1}{2} - \frac{4x-2y}{3} \\ -5(x+1) = 6(y+1) + 3 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{x+1}{3} - x = \frac{y-2}{4} + \frac{y+6}{2} \\ \frac{2x-3}{2} + \frac{y+5}{3} = y + \frac{x+y}{6} \end{cases}$
32. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:
- $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ 2x - y = 4 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{7} \\ 3x + y = 24 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x-3}{5} + \frac{2y+4}{7} = 5 \end{cases}$
33. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:
- $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 5 \\ 5\sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = 1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} \sqrt{14}x + 2y = 28 \\ 7x + \sqrt{14}y = 14\sqrt{14} \end{cases}$
 - $\begin{cases} \sqrt{3}x - 9y = 3\sqrt{3} \\ x - 3\sqrt{3}y = \sqrt{3} \end{cases}$
 - $\begin{cases} (\sqrt{5}-1)x + 4y = 4(\sqrt{5}+1) \\ x + (\sqrt{5}+1)y = 6 + 2\sqrt{5} \end{cases}$
 - $\begin{cases} (2+\sqrt{3})x + (2-\sqrt{3})y = 1 \\ \sqrt{3}x + (7\sqrt{3}-12)y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

34. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β , αν γνωρίζετε ότι τα ζεύγη $(1, 1)$ και

$(-1, 5)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $ax + by - 9 = 0$.

35. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$i. \begin{cases} 2|x| - 3|y| = 2 \\ |x| + 2|y| = 8 \end{cases} \quad ii. \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7 \end{cases}$$

36. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$i. \begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ 2x + y - \omega = 6 \\ x - y + 2\omega = -5 \end{cases} \quad ii. \begin{cases} x - y - \omega = -1 \\ x + 2y - \omega = 8 \\ 3x - y + 2\omega = 3 \end{cases} \quad iii. \begin{cases} 2x + y + \omega = 1 \\ 4x - y + \omega = -5 \\ -x + y + 2\omega = 5 \end{cases}$$

$$iv. \begin{cases} x - 3y + 6\omega = 2 \\ x - 5y + 3\omega = 3 \\ x - 3y + 6\omega = 1 \end{cases} \quad v. \begin{cases} 3x - 4y + \omega = 0 \\ -x + 3y - 2\omega = 5 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad vi. \begin{cases} 2x - y - 3\omega = 0 \\ x + 2y - 4\omega = 0 \\ 8x - 4y - 12\omega = 0 \end{cases}$$

37. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$i. \begin{cases} x - 3y = -8 \\ 2y - \omega = 10 \\ 4\omega + 3x = -13 \end{cases} \quad ii. \begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{3}{y} - \frac{4}{\omega} = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{\omega} = 4 \\ \frac{3}{y} + \frac{1}{\omega} = -2 \end{cases} \quad iii. \begin{cases} 2|x-1| + 3|y| - \sqrt{\omega} = 4 \\ |x-1| - 2|y| + 2\sqrt{\omega} = 6 \\ 3|x-1| + |y| - 2\sqrt{\omega} = 1 \end{cases}$$

38. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$i. \begin{cases} x + y - \omega = 3\alpha \\ 2x - y + \omega = 3 \\ x + \omega = 1 \end{cases} \quad ii. \begin{cases} \alpha x + \beta y = 2\omega \\ \frac{x-y}{\alpha-\beta} + \frac{\omega}{\alpha\beta} = 0 \\ \alpha(\omega+x) = \alpha+1 \end{cases} \quad iii. \begin{cases} x + y = \omega \\ \frac{x}{\beta+1} = \frac{y}{\beta-1} \\ 2x - \omega = 2 \end{cases}$$

39. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$i. \begin{cases} x + y = 6 \\ y + \omega = -4 \\ \omega + x = 18 \end{cases} \quad ii. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} = 0 \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

B ΟΜΑΔΑ

40. Να λύσετε τα συστήματα:

$$i. \begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 10x - 2y = \lambda - 1 \end{cases} \quad ii. \begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + y = 2\lambda - 1 \end{cases} \quad iii. \begin{cases} \alpha x + 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

41. Να λύσετε τα συστήματα:

$$i. \begin{cases} x+y=2 \\ x+\lambda^2 y=1-\lambda \end{cases} \quad ii. \begin{cases} x+(5\lambda-4)y=\lambda \\ (2\lambda+1)x+(\lambda-4)y=2\lambda \end{cases}$$

42. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ , να βρείτε τα κοινά σημεία των ευθειών:

i. $\varepsilon_1: \lambda x+2y=\lambda+2$ και $\varepsilon_2: (2\lambda-1)x+(\lambda+1)y=2(\lambda+1)$

ii. $\varepsilon_1: (\lambda+2)x+4y=8-3\lambda$ και $\varepsilon_2: 2x+(\lambda+4)y=8$

43. Να λύσετε τα συστήματα:

$$i. \begin{cases} x-\mu y=\frac{5}{\mu^2-1} \\ x+(\mu-4)y=\frac{3}{\mu^2-1} \end{cases} \quad ii. \begin{cases} (a-1)x-3y=\beta \\ (\beta-5)x+y=\alpha \end{cases} \quad iii. \begin{cases} 2x+\beta y=\alpha+1 \\ \beta x+8y=\alpha+1 \end{cases}$$

44. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους τα συστήματα

$$\Sigma_1: \begin{cases} (a-6)x-\beta y=2 \\ ax+y=0 \end{cases} \text{ και } \Sigma_2: \begin{cases} x+3y=1 \\ -x+ay=2 \end{cases} \text{ είναι συγχρόνως αδύνατα.}$$

45. Δίνονται τα συστήματα: $\Sigma_1: \begin{cases} (a+1)x-\beta y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$ και $\Sigma_2: \begin{cases} x+(\beta+2)y=\alpha^2+1 \\ x-(a-1)y=\beta^3 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι αν το πρώτο έχει άπειρες λύσεις, τότε το δεύτερο είναι αδύνατο.

46. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τα συστήματα:

$$\begin{cases} ax+2y=\beta \\ 8x+ay=\alpha+\beta+1 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} 2x+(a+\beta)y=5 \\ 3x+9y=\beta-2 \end{cases} \text{ είναι συγχρόνως αδύνατα;}$$

47. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x-3y=11-\lambda \\ x+5y-\lambda=7 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

i. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ .

ii. Να βρείτε τη μοναδική λύση.

iii. Για ποια τιμή του λ η λύση (x, y) που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη σχέση: $x+y=\frac{59}{13}$

48. Δίνονται τα συστήματα: $\Sigma_1: \begin{cases} x+2y=1+\mu \\ 3x+7y=2 \end{cases}$ και $\Sigma_2: \begin{cases} x+2y=\kappa+1 \\ 4x+9y=\mu+2\kappa \end{cases}$

για ποιες τιμές των μ και κ τα συστήματα είναι ισοδύναμα;

49. Για ποιες τιμές των κ, λ το σύστημα $\begin{cases} \kappa x-y=3\kappa \\ \lambda^2 x-\lambda y=\lambda^2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις μία από τις οποίες είναι η $(x, y)=(2, 1)$;

50. Για ποια τιμή του λ , το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \lambda x + 3y = 5 \end{cases}$ έχει λύση η οποία επαληθεύει την εξίσωση $x + 5y = 17$;
51. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:
- $$\begin{cases} D_x + D_y = D \\ D_x - D_y = 3D \end{cases}$$
- Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.
52. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:
- $$D_x^2 + D_y^2 = 2D_x D_y \text{ και } D \neq 0.$$
- Αν $x + y = 6$, να βρεθούν τα x, y .
53. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:
- $$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$$
- i. Να αποδείξετε ότι: $(D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$.
- ii. Να βρείτε τη λύση του συστήματος.
54. Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;
55. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλεψε.
56. Σε μια κάλπη βρίσκονται 100 ψηφοδέλτια δύο συνδικαλιστικών φορέων Α και Β. Αν προστεθούν στην κάλπη 3 ψηφοδέλτια του Α συνδικαλιστικού φορέα και 2 του Β συνδικαλιστικού φορέα τότε τα ψηφοδέλτια του Α θα είναι διπλάσια των ψηφοδελτίων του Β. Πόσα ψηφοδέλτια κάθε συνδικαλιστικού φορέα υπήρχαν αρχικά στην κάλπη;
57. Κάποιος μοιράζει με διαθήκη ένα ποσό σε τρεις ανιψιούς του Α, Β, Γ άνισα, ανάλογα προς τους αριθμούς 7, 6 και 5. Στη συνέχεια, με μια δεύτερη διαθήκη, αλλάζει τα μερίδια και διανέμει το ποσό ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5 και 4.
- α) Ποιος από τους κληρονόμους κερδίζει με τη νέα μοιρασιά; Ποιος χάνει;
- β) Ένας από τους κληρονόμους κερδίζει με τη δεύτερη μοιρασιά 6.000€ περισσότερο απ' ότι κερδίζει με την πρώτη. Πόση ήταν η κληρονομιά και πόσο κάθε μερίδιο με τη δεύτερη μοιρασιά;

58. Να βρεθεί τριψήφιος φυσικός αριθμός αν:
- το άθροισμα των ψηφίων του είναι 24.
 - ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του
 - ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του.
59. Να βρεθεί κλάσμα τέτοιο ώστε αν στους δύο όρους του προσθέσουμε το 2 προκύπτει ο αριθμός 2 ενώ αν από τους όρους του αφαιρέσουμε 3 προκύπτει ο αριθμός 3.
60. Να βρείτε τρεις αριθμούς που έχουν άθροισμα 45, ο δεύτερος είναι ο μέσος όρος των δύο άλλων και ο τρίτος είναι κατά 14 μεγαλύτερος από τον πρώτο.

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	
21. i. Λ, ii. Σ, iii. Λ, iv. Λ, v. Σ, vi. Λ, vii. Σ, viii. Σ, ix. Σ 22. Ε 23. Α 24. Δ 25. Γ 26. Γ 27. i. $3λx - 4λy = 5λ$, ii. $3x - 4y \neq 5$ 28. i. 1 λύση ii. άπειρες iii. αδ. 29. i. (7,1), ii. (3,3), iii. (1,1), iv. (2,-1), v. (3,2) vi. (0,0) 30. i. αδ., ii. $(x, 4x - 5)$, iii. $(x, 1 - 2x)$ 31. i. (-4,1), ii. $(-\frac{139}{85}, -\frac{122}{85})$ 32. i. (6,8), ii. (5,9), iii. (8,12) 33. i. $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$, ii. $(\frac{\sqrt{14}(14-y)}{7}, y)$, iii. αδ. iv. $(6 + 2\sqrt{5} - (\sqrt{5} + 1)y, y)$, v. αδ. 34. (6,3) 35. i. $(\pm 4, \pm 2)$, ii. (16,1) 36. i. (1, 2, -2), ii. (2, 3, 0), iii. (-1, 2, 1) iv. $(\frac{1-21\omega}{2}, \frac{-1-3\omega}{2}, \omega)$ v. αδ. vi. $(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{2})$	37. i. (1,3,-4) ii. $(-\frac{7}{16}, \frac{21}{8}, -\frac{7}{22})$, iii. $(3 \acute{\eta} -1, \pm 1, 9)$ 38. i. $(a+1, a-1, -a)$, ii. $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, 1)$, iii. $(\beta+1, \beta-1, 2\beta)$ 39. i. (14,-8,4), ii. (4,2,-2) 44. (-3,-3), 46. (4,2), (-4,10) 47. ii. $(\frac{66-2\lambda}{13}, \frac{3\lambda+3}{13})$, iii. -10 48. $(\kappa, \mu) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 49. $(\kappa, \lambda) = (-1, 0 \acute{\eta} 1)$, 50. -2 51. (2,-1), 52. (2,3), 53. ii. (1/2,0) 54. 32 αυτ., 18 ποδηλ., 55. 33 ετών, 12 χρόνια 56. $(A, B) = (67, 33)$, 57. α) κερδίζει ο Α και χάνει ο Γ, β) 540.000€, $(A, B, \Gamma) = (216.000, 180.000, 144.000)$ 58. 987 59. 18/8 60. (8,15,22)

22. Μη γραμμικά συστήματα

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος επίλυσης ενός μη γραμμικού 2×2 συστήματος, είναι η μέθοδος αντικατάστασης. Λύνουμε τη μία εξίσωση ως προς τον άγνωστο που έχει πρώτο βαθμό και αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση.

1. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x(7-2x) = 10 \\ y = 7-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x - 2x^2 = 10 \\ y = 7-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 7x = 10 \\ y = 7-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ y = 7-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9, x = 2 \text{ ή } x = 5 \\ y = 7-2x \end{cases}$$

Αν $x = 2$, τότε $y = 7 - 2 \cdot 2 = 3$ και αν $x = 5$ είναι $y = 7 - 2 \cdot 5 = -3$

Άρα λύσεις είναι τα ζεύγη $(2, 3)$ και $(5, -3)$.

2. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 2x^2 + 2x = 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 25, x = 2 \text{ ή } x = -3$$

Αν $x = 2$, τότε η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$2^2 + y^2 + 2 + y = 8 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 9, y = 1 \text{ ή } y = -2$$

Αν $x = -3$, τότε η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$(-3)^2 + y^2 + (-3) + y = 8 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 9, y = 1 \text{ ή } y = -2.$$

Άρα λύσεις είναι τα ζεύγη $(2, 1)$, $(2, -2)$, $(-3, 1)$ και $(-3, -2)$

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

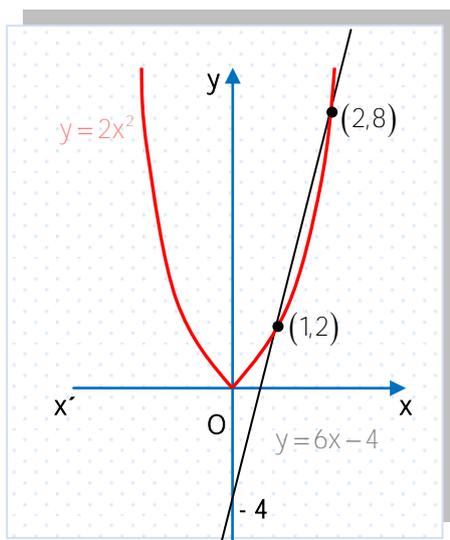
i.
$$\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ 6x - y = 4 \end{cases}$$
 ii.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$
 iii.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Λύση

i.
$$\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ 6x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 6x - 2x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 1 \text{ ή } x = 2 \end{cases}$$

Αν $x = 1$, τότε: $y = 2 \cdot 1^2 = 2$ και αν $x = 2$, τότε $y = 2 \cdot 2^2 = 8$.

Άρα λύσεις είναι τα ζεύγη $(1, 2)$ και $(2, 8)$.



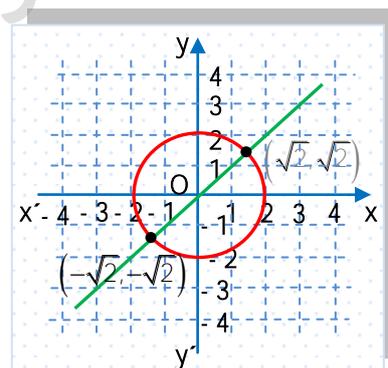
Η πρώτη εξίσωση του συστήματος παριστάνει την παραβολή $y = 2x^2$ και η δεύτερη την ευθεία $y = 6x - 4$. Άρα η παραβολή και η ευθεία τέμνονται στα σημεία $(1, 2)$ και $(2, 8)$.

$$\text{ii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 = 4 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 4 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = x \end{cases}$$

Αν $x = \sqrt{2}$, τότε $y = \sqrt{2}$, ενώ αν $x = -\sqrt{2}$, τότε $y = -\sqrt{2}$.

Άρα λύσεις είναι τα ζεύγη $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Η πρώτη εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα 2, ενώ η δεύτερη εξίσωση είναι η διχοτόμος του 1^{ου}-3^{ου} τεταρτημορίου. Οπότε τα σημεία τομής της ευθείας και του κύκλου είναι τα $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



$$\text{iii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

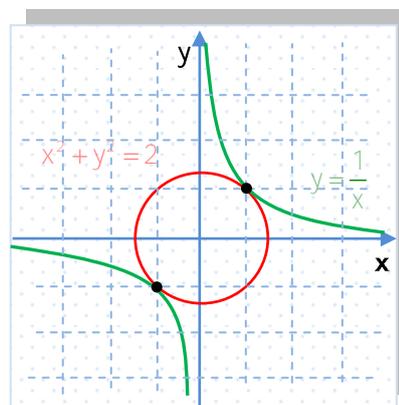
$$\begin{cases} x^4 + 1 = 2x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Αν $x = 1$, τότε $y = \frac{1}{1} = 1$ και αν $x = -1$, τότε $y = \frac{1}{-1} = -1$

Άρα λύσεις είναι τα ζεύγη $(1, 1)$ και $(-1, -1)$.

Η πρώτη εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$, ενώ η δεύτερη εξίσωση παριστάνει



την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$.

Τα κοινά σημεία του κύκλου και της υπερβολής είναι τα $(1,1)$ και $(-1,-1)$.

4. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} y^2 - xy + 2y = 0 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} y^2 - xy + 2y = 0 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y - x + 2) = 0 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \text{ ή } y - x + 2 = 0 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

Αν $y = 0$, τότε η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 1, x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Αν $y - x + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$, τότε η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$$x - 2 = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2. \text{ Τότε } y = 2 - 2 = 0.$$

Άρα λύσεις είναι τα ζεύγη $(1,0)$ και $(2,0)$.

5. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η ευθεία $y = 4x - \lambda$ τέμνει την παραβολή $y = x^2$.

Λύση

Για τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας, έχουμε:

$$\begin{cases} y = 4x - \lambda \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + \lambda = 0 \quad (1) \\ y = x^2 \end{cases}$$

Για να τέμνει η ευθεία την παραβολή πρέπει το σύστημά τους να έχει 2 λύσεις, άρα η (1) έχει 2 λύσεις, οπότε $\Delta > 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda > 0 \Leftrightarrow 16 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow 16 > 4\lambda \Leftrightarrow \lambda < 4$.

6. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y + xy = 4 \\ y + z + yz = 7 \\ z + x + zx = 9 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} x + y + xy = 4 \\ y + z + yz = 7 \\ z + x + zx = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy + 1 = 5 \\ y + z + yz + 1 = 8 \\ z + x + zx + 1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + y(x + 1) = 5 \\ y + 1 + z(y + 1) = 8 \\ z + 1 + x(z + 1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 5 \quad (1) \\ (y + 1)(z + 1) = 8 \quad (2) \\ (z + 1)(x + 1) = 10 \quad (3) \end{cases}$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, έχουμε:

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 400 \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1)(z + 1) = \pm 20$$

$$\text{Αν } (x + 1)(y + 1)(z + 1) = 20 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 5(z + 1) = 20 \Leftrightarrow z + 1 = 4 \Leftrightarrow z = 3$$

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 20 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 8(x + 1) = 20 \Leftrightarrow x + 1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 20 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 10(y + 1) = 20 \Leftrightarrow y + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\text{Av } (x+1)(y+1)(z+1) = -20 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 5(z+1) = -20 \Leftrightarrow z+1 = -4 \Leftrightarrow z = -5$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = -20 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 8(x+1) = -20 \Leftrightarrow x+1 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = -20 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 10(y+1) = -20 \Leftrightarrow y+1 = -2 \Leftrightarrow y = -3$$

askisopolis

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3x + y = 11 \\ 5x - y = 2 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} y^2 + xy = 10 \\ 5x + y = 17 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\text{i. } (1,3), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}\right) \quad \text{ii. } (3,2), \left(\frac{93}{20}, -\frac{25}{4}\right) \quad \text{iii. } (1,2), \left(6, -\frac{11}{2}\right)$$

8. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

$$\text{i. } \begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \text{iv. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\text{i. } (-1,2), (2,8) \quad \text{ii. } (3,4), (-4,-3) \quad \text{iii. } (1,4), (4,1), (-1,-4), (-4,-1) \quad \text{iv. } (5,3), (3,5)$$

9. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 42 \\ x^2 - y^2 + x - y = 18 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ (x + y)xy = 6 \end{cases}$$

$$\text{i. } (-6,-4), (-6,3), (5,-4), (5,3) \quad \text{ii. } (1,2), (2,1)$$

10. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x + y = 6 \\ x + y + xy = 11 \end{cases} \quad \text{iii. } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75 \\ x^2 - xy + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{i. } (2,3), (3,2) \quad \text{ii. } (1,5), (5,1) \quad \text{iii. } (5,5), (-5,-5)$$

11. Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x - 2$ και η παραβολή $y = 2x^2$. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία να έχει με την παραβολή:

- i. ένα κοινό σημείο
- ii. δύο κοινά σημεία.
- iii. κανένα κοινό σημείο.

12. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η ευθεία $y = \lambda x + 3$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$;

13. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{i. } \begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = -2 \end{cases} \quad \text{ii. } \begin{cases} x + y = 6(x - y) \\ x^2 - y^2 = 24 \end{cases}$$

$$\text{i. } (3,-2), (-3,2) \quad \text{ii. } (7,5), (-7,-5)$$

Στέλιος Μικαήλογλου