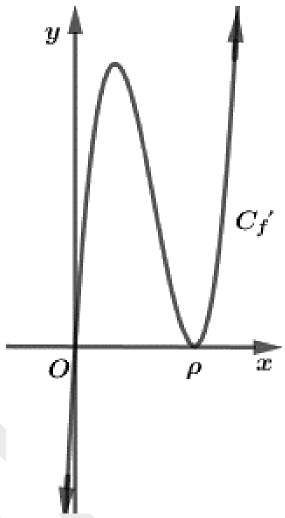
40η Άσκηση



Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x^3+\alpha x^2+16x+\beta$ και $f(0)=-\dfrac{11}{3}$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f' η οποία διέρχεται από τα σημεία (0,0) και (ρ,0).

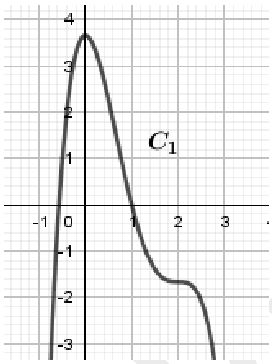
α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=4x(x-2)^2$.

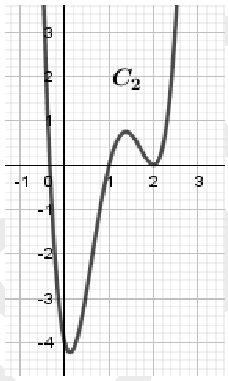
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^4-\dfrac{16}{3}x^3+8x^2-\dfrac{11}{3}$.

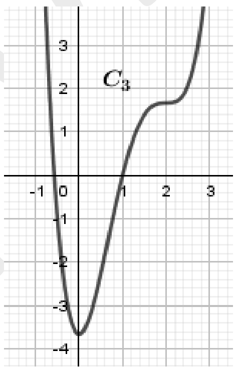
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-3,1)$.

δ) Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τετμημένη στο διάστημα (0,2) στο οποίο η εφαπτομένη έχει την μεγαλύτερη κλίση.

ε) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι της f;







Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$, οπότε β = 0. Τότε $f'(x)=4x^3+\alpha x^2+16x=x\left(4x^2+\alpha x+16\right)$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\left(4x^2+\alpha x+16\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $4x^2+\alpha x+16=0$ (1)

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f' έχει ρίζες το 0 και το ρ, άρα το ρ είναι η μοναδική ρίζα της (2), οπότε η εξίσωση $4\rho^2+\alpha\rho+16=0$ έχει μοναδική ρίζα. Η εξίσωση όμως αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού, οπότε έχει $\Delta=0 \Leftrightarrow \alpha^2-4\cdot 4\cdot 16=0 \Leftrightarrow \alpha^2=16^2 \Leftrightarrow \alpha=\pm 16$.

Αν $\alpha=16$ τότε $4\rho^2+16\rho+16=0 \Leftrightarrow \rho^2+4\rho+4=0 \Leftrightarrow (\rho+2)^2=0 \Leftrightarrow \rho=-2$ αδύνατο γιατί $\rho>0$.

Αν $\alpha=-16$ τότε $4\rho^2-16\rho+16=0 \Leftrightarrow \rho^2-4\rho+4=0 \Leftrightarrow (\rho-2)^2=0 \Leftrightarrow \rho=2$ δεκτό.

Επομένως $f'(x)=4x^3-16x^2+16x=4x\left(x^2-4x+4\right)=4x(x-2)^2$

β) Είναι $f'(x)=4x^3-16x^2+16x \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^4-\frac{16}{3}x^3+8x^2\right)' \Leftrightarrow f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+8x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=-\frac{11}{3} \Leftrightarrow c=-\frac{11}{3}$, οπότε $f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+8x^2-\frac{11}{3}$.

γ) Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$, οπότε κάνοντας σχήμα Horner προκύπτει ότι

$f(x)=(x-1)\left(x^3-\frac{13}{3}x^2+\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}\right)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=x^3-\frac{13}{3}x^2+\frac{11}{3}x+\frac{11}{3},\ x\in[-3,1]$.

Είναι $\varphi(-3)=-27-\frac{13}{3}\cdot 9+\frac{11}{3}\cdot(-3)+\frac{11}{3}=-77+\frac{11}{3}<0$, $\varphi(1)=1-\frac{13}{3}+\frac{11}{3}+\frac{11}{3}=4>0$, δηλαδή $\varphi(1)\varphi(-3)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(-3,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$. Τότε $f(x_0)=(x_0-1)\varphi(x_0)=0$.

δ) Αρκεί να βρούμε το σημείο της C_f στο οποίο η f' γίνεται μέγιστη.

Είναι $f''(x)=4(x-2)^2+4x\cdot 2(x-2)=4(x-2)(x-2+2x)=4(x-2)(3x-2)$

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 4(x-2)(3x-2)\ge 0 \Leftrightarrow 3x-2\le 0 \Leftrightarrow x\le\frac{2}{3}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$ είναι $f''(x)>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{2}{3}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(\frac{2}{3},2\right)$ είναι $f''(x)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{2}{3},2\right)$.

Η f' γίνεται μέγιστη για $x=\frac{2}{3}$. Είναι $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^4-\frac{16}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+8\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{11}{3}=-\frac{121}{81}$, οπότε το ζητούμενο σημείο της f είναι το $\left(\frac{2}{3},-\frac{121}{81}\right)$.

ε) Αν η C_1 ήταν η γραφική παράσταση της f, τότε $f(0)>0$ που είναι άτοπο.

Αν η C_2 ήταν η γραφική παράσταση της f, τότε θα παρουσίαζε τοπικό μέγιστο σε κάποιο $x_1\in(1,2)$. Τότε όμως από το θεώρημα Fermat θα ήταν $f'(x_1)=0$, δηλαδή η f' θα είχε ρίζα $x_1\in(1,2)$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η f' έχει ως ρίζες μόνο το 0 και το 2. Άρα η C_3 ήταν η γραφική παράσταση της f.

ή

$f(0) = -\frac{11}{3}$ οπότε απορρίπτονται οι C_1, C_2 ($f(0) > 0, f(0) < -4$ αντίστοιχα) άρα η C_3 ήταν η γραφική παράσταση της f.