9ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$. (Μ.10)

Α2. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ; (Μ.2)

Α3. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ; (Μ.3)

Α4. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεων σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό*** *, αν η πρόταση είναι σωστή ,* ***ή Λάθος*** *, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Οι γραφικές παραστάσεις C και C’ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες x O y και x’ O y’

β.Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συνx} - 1}{x}=1$.

γ. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

δ. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό της ελάχιστο.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x\ln x$, x>0 και $\alpha\in R$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρειτε τα σημεία καμπής (μον 8)

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτόνια , τα ακρότατα και να βρειτε το συνολο τιμων της (μον 8)

Β3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2\ln x = x-\dfrac{\lambda}{\chi}$ για τις διάφορες τιμες του $\lambda\in R$ (μον 9)

ΘΕΜΑ Γ

Εστω συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τετοια ώστε

f(e)=1 και $\chi^2\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}+4\dfrac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}=4x$ για κάθε x>1

Γ1. Να αποδειξετε ότι $f(x)=\ln^2 x\,,\quad x>1.$

Γ2. Να βρείτε την εξισωση της εφαπτομενης (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχη των αξονων

Γ3. Να υπολογισετε το εμβαδον του χωριου που οριζεται από την C_f , την εφαπτομενη της (ε) και τις ευθειες x=e και x= e^2

Γ4. Ένα σημειο M(x,f(x)) κινειται πανω στην γραφικη παρασταση της f . Εστω N η προβολη του M στον αξονα xx' Αν το N απομακρινεται από την αρχή των αξονων με ταχυτητα 3m/sec να υπολογισεται τον ρυθμο μεταβολης της γωνιας NOM την χρονικη στιγμη που το M διερχεται από το σημειο ($e^2, f(e^2)$) .

(μον 7+5+6+7)

ΘΕΜΑ Δ

Εστω συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τετοια ώστε

$f(1)<f'(x)<f(2)$ για κάθε $x\in R$. Εστω επίσης η συνάρτηση $g:R\to R$ με τυπο

$g(x)=F(x)-\dfrac{1}{2}\cdot f(1)\cdot x^2,\ x\in R$ οπου F μια παραγουσα της f στο R τετοια ώστε F(0)=0.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. f(1)>0

Δ2. Η εξίσωση f(x)=0 εχει μοναδική πραγματική ρίζα στο διαστημα (0,1)

Δ3. $2\int_1^2 f(x)dx>\int_1^2 xf(x)dx$

Δ4. Η συνάρτηση g είναι κυρτη και ισχυει η σχεση F(2)>2f(0)+2f(1)

(μον 6+6+6+7)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!!!

ΘΕΜΑ 3ο

Γ1. $\frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{f(x)}} + 4\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)} = 4x$ τότε $(x^2 f'(x))^2 + 4f(x) = 4x f'(x)\sqrt{f(x)}$

$(x f'(x) - 2\sqrt{f(x)})^2 = 0$ $\quad x f'(x) - 2\sqrt{f(x)} = 0$ $\quad \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{x}$

$(\sqrt{f(x)})' = (\ln|x|)'$ $\quad \sqrt{f(x)} = \ln x + c$ για $x = e$ $\sqrt{f(e)} = \ln e + c$ τότε

$1 = 1 + c$ άρα $c = 0$. $\quad \sqrt{f(x)} = \ln x$ και $f(x) = \ln^2 x$

Γ2: Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής του η εφαπτομένη της C_f έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (f παραγωγίσιμη)

$y - \ln^2 x_0 = \frac{2\ln x_0}{x_0}(x - x_0)$ επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το $O(0,0)$ για $x = y = 0$ προκύπτει $-\ln^2 x_0 = -2\ln x_0 \Leftrightarrow \ln^2 x_0 - 2\ln x_0 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x_0(\ln x_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_0 = 0 \\ ή \\ \ln x_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \text{ απορρίπτεται } (x>1) \\ x_0 = e^2 \end{cases}$

Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y - (\ln e^2)^2 = \frac{2\ln e^2}{e^2}(x - e^2)$

$y - 4 = \frac{4}{e^2}(x - e^2)$ $\quad y = \frac{4}{e^2}x$

Γ3: $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ και $f''(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$. όμοια $f''(x) < 0$ αν $x > e$.

x	1	e	$+\infty$
$f''(x)$	+		−
f	∪		∩

στο $[e, e^2]$ η f είναι κοίλη άρα η C_f είναι κάτω από την εφαπτομένη

ώστε $f(x) \le \frac{4}{e^2}x$. $\quad E = \int_e^{e^2}\left(\frac{4}{e^2}x - \ln^2 x\right)dx$

$E = \frac{4}{e^2}\int_e^{e^2} x\,dx - \int_e^{e^2}(x)'\ln^2 x\,dx \Leftrightarrow E = \frac{4}{e^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^{e^2} - [x\ln^2 x]_e^{e^2}$

$+ \int_e^{e^2} \cancel{x}\frac{2\ln x}{\cancel{x}}\,dx \Leftrightarrow E = \frac{4}{e^2}\left(\frac{e^4 - e^2}{2}\right) - (e^2\ln^2 e^2 - e\ln^2 e)$

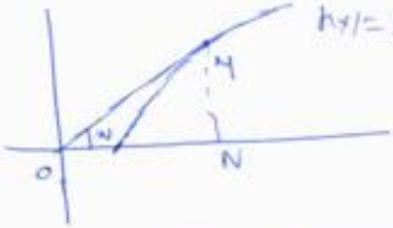
$+ 2\int_e^{e^2}(x)'\ln x\,dx \Leftrightarrow E = 2(e^2 - 1) - (4e^2 - e) + 2[x\ln x]_e^{e^2}$

$-2\int_e^{e^2}dx \Leftrightarrow E = 2e^2 - 2 - 4e^2 + e + 2e^2 2 - 2e - 2[x]_e^{e^2}$

$\Leftrightarrow E = \cancel{2e^2} - 2 - \cancel{4e^2} + e + \cancel{4e^2} - \cancel{2e} - \cancel{2e^2} + \cancel{2e}$ ~~⇔ E = −e² + e − 4~~

$E = e - 2$.

Γ4.



Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της C_f

$$εφω = λ_{OM} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln^2 x}{x}$$

$$εφω(t) = \frac{\ln^2 x(t)}{x(t)} \quad \text{τότε} \quad \left(εφω(t)\right)' = \left(\frac{\ln^2 x(t)}{x(t)}\right)'$$

$$\frac{1}{συν^2 ω(t)} \cdot ω'(t) = \frac{2\ln x(t)\, x'(t) - \ln^2 x(t) \cdot x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + εφ^2 ω(t)\right) ω'(t) = \frac{2\ln x(t) \cdot x'(t) - \ln^2 x(t) \cdot x'(t)}{x^2(t)} \quad (1)$$

$x(t) = e$ (2) και $x'(t) = 3$ μ/sec (3) $\quad εφω(t) = \frac{\ln^2 e}{e} = \frac{1}{e}$ (4)

Από (2),(3),(4) η (1) γίνεται $\left(1 + \frac{1}{e^2}\right) ω'(t) = \frac{2\ln e \cdot 3 - \ln^2 e \cdot 3}{e^2}$

$$\left(\frac{e^2+1}{e^2}\right) ω'(t) = \frac{3}{\cancel{e^2}} \Leftrightarrow ω'(t) = \frac{3}{e^2+1} \text{ ~~rad~~}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. f συνεχής στο $[1,2]$.
f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$. Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $x_0 \in (1,2)$:

$f'(x_0) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \Leftrightarrow \boxed{f'(x_0) = f(2) - f(1)}$ (1) στην δοθείσα σχέση αν θέσω $x = x_0$ έχω $f(1) < f'(x_0) < f(2)$ (2) (ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$)

$f(1) < f(2) - f(1) < f(2)$ τότε $f(2) - f(1) < f(2)$ τότε $-f(1) < 0$ τότε $f(1) > 0$.

Δ2. f συνεχής στο $[0,1]$
f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Από Θ.Μ.Τ $f'(x_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1) - f(0)$ (3)

Από (1) (3) έχω $f(1) < f(1) - f(0) < f(2)$ τότε $f(1) < f(1) - f(0) \Rightarrow$ τότε $f(0) < 0$.

f συνεχής στο $[0,1]$. $f(0)f(1) < 0$ από Θ. Bolzano υπάρχει $ξ \in (0,1)$: $f(ξ) = 0$. $\quad f'(x) > f(1) > 0$ άρα $f'(x) > 0$ $f \nearrow$ και το $ξ$ μοναδική ρίζα.

Δ3: $1 \le x \le 2$ άρα $2 - x \ge 0$, $f(x) > 0$ στο $[1,2]$ | τότε $(2-x)f(x) \ge 0$ τότε

$$\int_1^2 (2-x) f(x)\,dx > 0 \quad \text{τότε} \quad \int_1^2 2f(x)\,dx > \int_1^2 x f(x)\,dx$$

Δ4. $g'(x) = f(x) - f(1)x$ και $g''(x) = f'(x) - f(1) > 0$ (από αρχική σχέση)

άρα η g κυρτή στο $\mathbb{R}$. (ε) είναι εφαπτομένη C_g στο $x_0 = 0$.

$y - g(0) = g'(0)(x - 0)$ τότε $y - 0 = f(0)x \Leftrightarrow \boxed{y = f(0)x}$ (ε)

g κυρτή άρα C_g πάνω από (ε) τότε $g(2) > f(0) \cdot 2$ τότε

$F(2) - 2f(1) > 2f(0) \Leftrightarrow \boxed{F(2) > 2f(1) + 2f(0)}$