ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1)=f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Β. **α.** Λ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Σ

Γ. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$, οπότε $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2^x\ln2+m^x\ln m-4^x\ln4-5^x\ln5$ και το $x_0=0$ είναι εσωτερικό του $A_f=\mathbb{R}$, από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln2+\ln m-\ln4-\ln5=0 \Leftrightarrow \ln2+\ln m=\ln4+\ln5 \Leftrightarrow \ln(2m)=\ln(4\cdot5) \Leftrightarrow 2m=20 \Leftrightarrow m=10$$

β. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\ge0$ για κάθε $x\in[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(2^x+10^x-4^x-5^x\right)dx=\left[\frac{2^x}{\ln2}+\frac{10^x}{\ln10}-\frac{4^x}{\ln4}-\frac{5^x}{\ln5}\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$E=\frac{2}{\ln2}+\frac{10}{\ln10}-\frac{4}{\ln4}-\frac{5}{\ln5}-\frac{1}{\ln2}-\frac{1}{\ln10}+\frac{1}{\ln4}+\frac{1}{\ln5}=\frac{1}{\ln2}+\frac{9}{\ln10}-\frac{3}{\ln4}-\frac{4}{\ln5}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Εστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

$$z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x + yi} = x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)i$$

Επειδή $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ είναι $\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ άτοπο ή

$1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

β. $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow z^2 + 2\cancel{z}\frac{1}{\cancel{z}} + \frac{1}{z^2} = f^2(\alpha) \Leftrightarrow f^2(\beta) + 2 = f^2(\alpha) \Leftrightarrow$

$f^2(\beta) = f^2(\alpha) - 2 < f^2(\alpha)$

γ. Εστω $g(x) = x^3 f(\alpha) + f(\beta),\ x \in [-1, 1]$

Είναι $g(-1) = -f(\alpha) + f(\beta),\ g(1) = f(\alpha) + f(\beta)$ και

$g(-1)g(1) = (-f(\alpha) + f(\beta))(f(\alpha) + f(\beta)) = f^2(\beta) - f^2(\alpha) < 0$ (από β ερώτημα). Επειδή επιπλέον η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θέτουμε $2xt = u$ τότε $2xdt = du$. Για $t = 0$ είναι $u = 0$ και για $t = \frac{1}{2}$ είναι $u = x$. Τότε

$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x f(u)du$ (1). Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, άρα η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = x + f(x)$.

β. $f'(x) = x + f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = xe^{-x} \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)' = xe^{-x} \Leftrightarrow$

$$e^{-x}f(x) = \int xe^{-x}dx = \int x\left(-e^{-x}\right)'dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c,\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$f(x) = -x - 1 + ce^x$. (Από τη σχέση (1) για $x = 0$ προκύπτει $f(0) = 0$, άρα $c = 1$ και $f(x) = -x - 1 + e^x,\ x \in \mathbb{R}$.)

γ. $f'(x) = e^x - 1$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $f \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$ και επειδή $f(0) = 0$, η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $[0, +\infty)$.

δ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - x - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)\right] = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x - x - 1\right) = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-1\right) = +\infty$

(Το δεύτερο όριο ουσιαστικά δεν υπάρχει γιατί η f ορίζεται στο $[0,+\infty)$,οπότε δεν υπάρχει περιοχή κοντά στο $-\infty$