<u>Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

Θέματα τύπου προαγωγικών εξετάσεων περιόδου Μαΐου - Ιουνίου στην Άλγεβρα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$.

μονάδες 7

Α2. Τι ονομάζουμε λογάριθμο του θετικού αριθμού θ ως προς βάση $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$;

μονάδες 4

Α3. α) Ποια είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Delta(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$;

β) Πότε το πολυώνυμο $\delta(x)$ διαιρεί ή είναι παράγοντας του $\Delta(x)$;

μονάδες 2+2

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν δύο πολυώνυμα έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε είναι ίσα.

β) Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ ως προς τον άξονα $y'y$.

δ) Αν $0 < \alpha \neq 1$, ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha^x = \alpha$.

ε) $\sigma\upsilon\nu(x - \pi) = \sigma\upsilon\nu x,\ \ x \in \mathbb{R}$

μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι -18.

Β1. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+1)$. μονάδες 6

Έστω $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$.

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

μονάδες 7

Β3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{P(x)}$. μονάδες 5

Β4. Να λύσετε την ανίσωση $P^2(x) > -2P(x)$. μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) + 3\eta\mu(2014\pi + 2x) - \eta\mu(\pi + 2x) + \eta\mu(\pi - 2x)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4\eta\mu 2x$. μονάδες 6

Γ2. Να γράψετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, να βρείτε τη περίοδό της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, 2\pi]$. μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 2$. μονάδες 6

Γ4. Να λύσετε στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ την εξίσωση $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln 4+\ln\left(2e^{x}-1\right)$ και $g(x)=\ln\left(e^{2x}+8\right)$

Δ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g. μονάδες 6

Δ2. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(e)$ και $f(\pi)$. μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.]
μονάδες 7

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(2\ln x)}>e^{f(\ln x)}-\frac{7}{8}$ μονάδες 6

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω ότι είναι: $\log_\alpha\theta_1 = x_1$ και $\log_\alpha\theta_2 = x_2$ (1). Τότε έχουμε
$\alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\alpha^{x_2} = \theta_2$ οπότε: $\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2} = \theta_1\theta_2$, δηλαδή $\alpha^{x_1+x_2} = \theta_1\theta_2$
Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = x_1 + x_2$ από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

Α2. Ο $\log_\alpha\theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ.

Α3. α) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με δ(x) ≠ 0 υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε: Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x), όπου το υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).
β) Γενικά, αν σε μια διαίρεση είναι υ(x) = 0, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται Δ(x) = δ(x)·π(x). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το δ(x) **διαιρεί** το Δ(x) ή ότι το δ(x) είναι **παράγοντας** του Δ(x).

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ ισχύει ότι $P(2)=0$.
Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x+1$ είναι -18 ισχύει ότι $P(-1)=-18$.
Επειδή το $(x-2)(x+1)$ είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)(x+1)$ θα είναι το πολύ 1ου βαθμού. Έστω $\upsilon(x)=\alpha x+\beta$, τότε
$P(x)=(x-2)(x+1)\pi(x)+\alpha x+\beta$.
$P(2)=0 \Leftrightarrow (2-2)(2+1)\pi(2)+2\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=0$ (1)
$P(-1)=-18 \Leftrightarrow (-1-2)(-1+1)\pi(-1)-\alpha+\beta=-18 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-18$ (2)
Από το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\alpha=6$ και $\beta=-12$ άρα $\upsilon(x)=6x-12$

Β2. Με βάση το σχήμα Horner το $P(x)$ γράφεται
$P(x)=(x-2)(2x^2-3x+1)=(x-2)(x-1)(2x-1)$

2	-7	7	-2	ρ = 2
	4	-6	2	
2	-3	1	0	

x	−∞	1/2		1		2	+∞
x-2	−		−		−	0	+
x - 1	−		−	0	+		+
2x-1	−	0	+		+		+
$P(x)$	−	0	+	0	−	0	+

$P(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,2)$

B3. Πρέπει $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (2,+\infty)$, άρα $A_f = \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (2,+\infty)$

B4. $P^2(x) > -2P(x) \Leftrightarrow P^2(x) + 2P(x) > 0 \Leftrightarrow P(x)\big(P(x)+2\big) > 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x-1)(2x-1)\left(2x^3 - 7x^2 + 7x\right) > 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x-1)(2x-1)x\left(2x^2 - 7x + 7\right) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (2,+\infty)$

x	$-\infty$ 0	1/2	1	2	$+\infty$
x	− 0	+	+	+	+
x-2	−	−	−	− 0	+
x - 1	−	−	− 0	+	+
2x-1	−	− 0	+	+	+
$2x^2 - 7x + 7$	+	+	+	+	+
$P(x)$	+ 0	− 0	+ 0	− 0	+

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right) = \eta\mu(-2x) = -\eta\mu 2x$

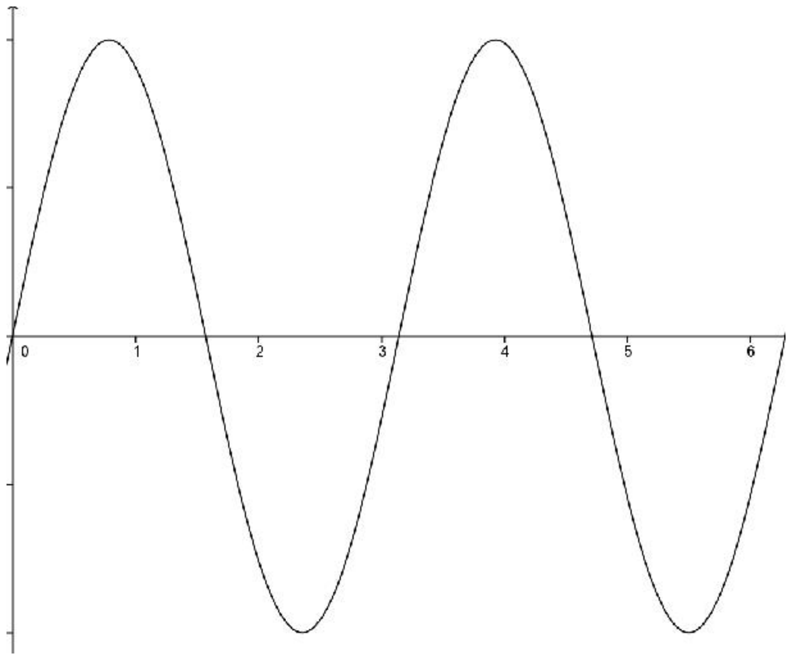
$\eta\mu(2014\pi + 2x) = \eta\mu 2x$

$\eta\mu(\pi + 2x) = -\eta\mu 2x$ και

$\eta\mu(\pi - 2x) = \eta\mu 2x$

$f(x) = -\eta\mu 2x + 3\eta\mu 2x + \eta\mu 2x + \eta\mu 2x = 4\eta\mu 2x$

Γ2. $f_{max} = 4$, $f_{min} = -4$ και $T_f = \frac{2\pi}{2} = \pi$



Γ3. $f(x) = 2 \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}$ ή

$$2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12},\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Γ4. $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = f\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cancel{4}\eta\mu\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right] = \cancel{4}\eta\mu\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right] \Leftrightarrow$

$\cancel{2x} + \frac{2\pi}{3} = 2\kappa\pi + \cancel{2x} - \frac{\pi}{3}$ αδύνατο ή

$2x + \frac{2\pi}{3} = 2\kappa\pi + \pi - 2x + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{6},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να ορίζεται η f πρέπει $2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2$, άρα $A_f = (-\ln 2, +\infty)$

Για να ορίζεται η g πρέπει: $e^{2x} + 8 > 0$ που ισχύει, άρα $A_g = \mathbb{R}$.

Δ2. Έστω $x_1, x_2 \in (-\ln 2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε

$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x_1}-1\right) < \ln\left(e^{x_2}-1\right) \Leftrightarrow \ln 4 + \ln\left(e^{x_1}-1\right) < \ln 4 + \ln\left(e^{x_2}-1\right) \Leftrightarrow$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (-\ln 2, +\infty)$

Είναι $e < \pi \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(e) < f(\pi)$

Δ3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln 4 + \ln\left(2e^x - 1\right) = \ln\left(e^{2x}+8\right) \Leftrightarrow \ln\left[4\left(2e^x-1\right)\right] = \ln\left(e^{2x}+8\right) \Leftrightarrow$

$4\left(2e^x - 1\right) = e^{2x} + 8 \Leftrightarrow 8e^x - 4 = e^{2x} + 8 \Leftrightarrow e^{2x} - 8e^x + 12 = 0$ (1)

Θέτουμε $e^x = k > 0$, τότε η (1) γίνεται: $k^2 - 8k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ ή $k = 6$

Άρα $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ δεκτή ή $e^x = 6 \Leftrightarrow x = \ln 6$ δεκτή