# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016

**Α΄ ΦΑΣΗ**

[redacted]

**ΤΑΞΗ:** **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΜΑΘΗΜΑ:** **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016**

**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

---

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2 y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1$ και $\lambda_2$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι $\vec{a}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$.

*(15 μονάδες)*

**Α2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ με $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$.

**β)** Αν $\vec{a}\vec{\beta}+|\vec{a}||\vec{\beta}|=0$ τότε $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

**γ)** Ισχύει $\vec{a}\cdot\vec{\beta}=\vec{a}\cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{a}$, $\vec{\beta}\neq\vec{0}$.

**δ)** Αν η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι $90^o$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι 0.

**ε)** Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, που σχηματίζουν γωνία θ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{a}||\vec{\beta}|}$.

*(10 μονάδες)*

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Κ(-1,4) και το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=(4,3)$.

**Β1.** Βρείτε το συμμετρικό Β, του σημείου Α ως προς το Κ.

**Β2.** Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ και του $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$, που είναι η $\text{προβ}_{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$.

**Β3.** Υπολογίστε το μέτρο $|\overrightarrow{\mathrm{AK}}-2\overrightarrow{\mathrm{K}\Gamma}|$.

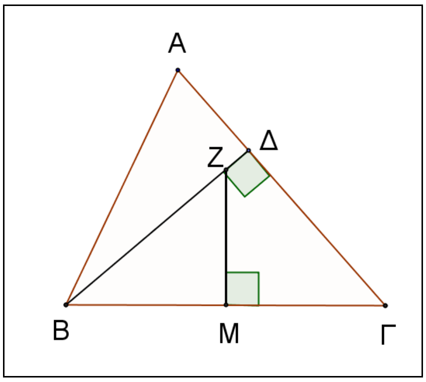
*(7-10-8 μονάδες)*

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Γ(5, 4).
Η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $2x - y + 4 = 0$, ενώ το ύψος ΒΔ έχει εξίσωση $y = 11 - 5x$.

**Γ1.** Βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Β.
**Γ2.** Βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ.
**Γ3.** Αν Β(1, 6) τότε βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΒΓ και το σημείο τομής Ζ, της μεσοκαθέτου με το ύψος ΒΔ.

*(7,8,10 μονάδες)*




## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Δίνονται τα σημεία Α(κ, 5) και Β(4, κ+4), $\kappa \in \mathbb{R}$.
Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΑΒ.

**Δ2.** Αν η ευθεία (ε), που διέρχεται από τα Α(κ,5) και Β(4, κ+4) είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1 : y - 2x + 5 = 0$, τότε να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η ευθεία (ε) έχει εξίσωση: $2x - y - 1 = 0$.

**Δ3.** Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$ , όπου $\vec{a}, \vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

**α)** Βρείτε το γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$ και το μέτρο $|\vec{v}|$.

**β)** Βρείτε το σημείο Γ της ευθείας (ε) του ερωτήματος Δ2 και τον $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$(\vec{u}\vec{v})\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + \left(\left|\vec{v}\right|^2 - 2\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, \mu + 1).$$

*(6,7,6,6 μονάδες)*

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
**Α ΦΑΣΗ**

[redacted]

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016**
**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

---

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 38.

**Α2.** **α)** Λάθος (γιατί $\lambda=-\frac{A}{B}$)

**β)** Σωστό

**γ)** Λάθος ($\vec{a}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{a}$)

**δ)** Λάθος (γιατί δεν ορίζεται ο λ)

**ε)** Σωστό

### ΘΕΜΑ Β

**Β1.** **α΄ τρόπος**

Έστω Β(x,y) τότε θα είναι:

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{KB}} \Leftrightarrow (-1-1,4-2)=(x+1,y-4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2=x+1 \\ 2=y-4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=-3 \\ y=6 \end{pmatrix}$ δηλαδή Β(-3,6).

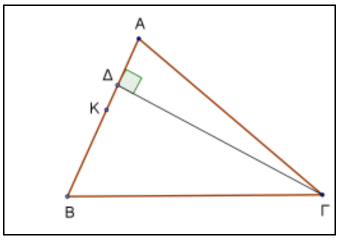
**β΄ τρόπος**

$x_\kappa=\frac{x_A+x_B}{2} \Leftrightarrow -1=\frac{1+x_B}{2} \Leftrightarrow x_B=-2-1=-3$

και $y_\kappa=\frac{y_A+y_B}{2} \Leftrightarrow 4=\frac{2+y_B}{2} \Leftrightarrow y_B=8-2=6$ δηλαδή Β(-3,6).

**B2.** $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(4,3)\Leftrightarrow(x_\Gamma-1,\ y_\Gamma-2)=(4,3)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_\Gamma-1=4\\ y_\Gamma-2=3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_\Gamma=5\\ y_\Gamma=5\end{pmatrix}$

Δηλαδή $\Gamma(5,5)$ οπότε $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=(5+3,\ 5-6)=(8,-1)$.




Η προβολή του $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ πάνω στο $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ είναι το $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$ και αφού

$\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}//\overrightarrow{\mathrm{BA}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\lambda(1+3,2-6)=\lambda(4,-4)=(4\lambda,-4\lambda)$

Θα είναι

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}\Leftrightarrow(8,-1)(4,-4)=(4,-4)(4\lambda,-4\lambda)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 32+4=16\lambda+16\lambda\Leftrightarrow 36=32\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{36}{32}=\frac{9}{8}$$

οπότε $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=\left(\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right)$.

**B3.** $\overrightarrow{\mathrm{AK}}-2\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}=(-1-1,4-2)-2(5+1,5-4)=(-2,2)+(-12,-2)=(-14,0)$

Οπότε $\left|\overrightarrow{\mathrm{AK}}-2\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right|=\sqrt{(-14)^2+0^2}=\sqrt{196}=14$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Το Β είναι το σημείο τομής των ΑΒ και ΒΔ.
Λύνω το (Σ) των εξισώσεων τους.

$$\begin{pmatrix}2x-y+4=0\\ y=11-5x\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2x-11+5x+4=0\\ y=11-5x\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7x=7\\ y=11-5x\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x=1\\ y=6\end{pmatrix}$$

δηλαδή $\mathrm{B}(1,6)$.

**Γ2.** Η πλευρά ΑΓ είναι κάθετη στο ύψος ΒΔ, οπότε

$$\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\lambda_{\mathrm{B\Delta}}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}\cdot(-5)=-1\Leftrightarrow\lambda_{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{5}.$$

Άρα $\mathrm{A\Gamma}:\ y-4=\frac{1}{5}(x-5)\Leftrightarrow 5y-20=x-5\Leftrightarrow x-5y+15=0$.

**Γ3.** Το μέσο Μ της ΒΓ είναι $\mathrm{M}\left(\frac{1+5}{2},\frac{4+6}{2}\right)=(3,5)$.

Ο συντελεστής της ΒΓ είναι $\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{4-6}{5-1}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$.

Αφού η μεσοκάθετη $\varepsilon \perp \text{ΒΓ}$ θα έχει $\lambda_\varepsilon=2$ και η εξίσωσή της θα είναι:

$$y-5=2(x-3) \Leftrightarrow y-5=2x-6 \Leftrightarrow 2x-y-1=0.$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΒΔ και (ε):

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΒΔ}: y=11-5x \\ \varepsilon:\ 2x-y-1=0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y=11-5x \\ 2x-11+5x-1=0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y=11-5x \\ 7x=12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y=11-\dfrac{60}{7}=\dfrac{17}{7} \\ x=\dfrac{12}{7} \end{array}\right)$$

δηλαδή τέμνονται στο $Z\left(\dfrac{12}{7},\dfrac{17}{7}\right)$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{\kappa+4}{2}$

και $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{5+\kappa+4}{2}=\dfrac{\kappa+9}{2}$.

Άρα $\kappa=2x_M-4$ και $\kappa=2y_M-9$ οπότε $2x_M-4=2y_M-9 \Leftrightarrow 2x_M-2y_M+5=0$

δηλαδή το Μ κινείται στην ευθεία $2x-2y+5=0$.

**Δ2.** Είναι $\overrightarrow{AB}=(4-\kappa,\kappa+4-5)=(4-\kappa,\kappa-1)$ και $\varepsilon_1 // \vec{\delta_1}=(1,2)$.

Αν $\overrightarrow{AB}//\varepsilon_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}//\vec{\delta_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\kappa & \kappa-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 8-2\kappa-\kappa+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9=3\kappa \Leftrightarrow \kappa=3$ οπότε Α(3, 5) και Β(4, 7).

Άρα $\varepsilon: y-5=2(x-3) \Leftrightarrow y-5=2x-6 \Leftrightarrow 2x-y-1=0$.

**Δ3.** **α)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(2\vec{a}+3\vec{\beta}\right)\left(\vec{a}-2\vec{\beta}\right)=2\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{\beta}+3\vec{a}\vec{\beta}-6\vec{\beta}^2=$

$=2|\vec{a}|^2-\vec{a}\vec{\beta}-6|\vec{\beta}|^2=2\cdot2^2-|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}-6.1^2=$

$=2\cdot4-2\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-6=8+1-6=3$

και $|\vec{v}|^2=\vec{v}^2=\left(\vec{a}-2\vec{\beta}\right)^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=$

$|\vec{a}|^2-4\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}+4|\vec{\beta}|^2=4-4\cdot2\cdot1\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4\cdot1=12 \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

**β)** Αφού $\Gamma \in (\varepsilon): y = 2x - 1$ θα είναι $\Gamma(x_\Gamma, 2x_\Gamma - 1)$

Έχουμε:

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})\ \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + \left(\left|\vec{v}\right|^2 - 2\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, \mu+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} + (12-2)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, \mu+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x_\Gamma - 4,\ \ 2x_\Gamma - 1 - 7\right) + 10(4-3, 7-5) = (4, \mu+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3x_\Gamma - 12,\ 6x_\Gamma - 24\right) + (10, 20) = (4, \mu+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3x_\Gamma - 12,\ 6x_\Gamma - 24\right) = (4, \mu+1) - (10, 20) = (-6, \mu - 19)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_\Gamma - 12 = -6 \\ 6x_\Gamma - 24 = \mu - 19 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \chi_\Gamma = \dfrac{12-6}{3} \\ \mu = 6x_\Gamma - 24 + 19 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \chi_\Gamma = 2 \\ \mu = 7 \end{pmatrix}.$$ Άρα $\Gamma(2,3)$