

**Κριτήριο αξιολόγησης στο γινόμενο αριθμού με διάνυσμα**

Οκτώβριος 2016

Όν/νυμο .....

Ομάδα Α

**ΘΕΜΑ 1**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

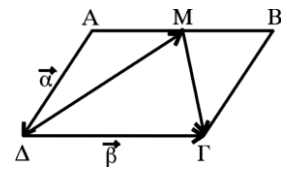
- i. Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ , τότε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
- ii. Αν  $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ , τότε  $\kappa = \lambda$  για κάθε διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ .
- iii. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
- iv. Αν  $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ .


μονάδες 4x3

**ΘΕΜΑ 2**

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν  $\vec{AD} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{DG} = \vec{\beta}$ , τότε το διάνυσμα  $\vec{M\Delta}$  ισούται με

- Α.  $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$
- Β.  $\frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$
- Γ.  $-\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- Δ.  $\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- Ε.  $\frac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}$



μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3**

Αν ισχύει ότι  $\vec{AG} - 3\vec{GB} + 2\vec{AB} = \vec{BD} - 3\vec{MA}$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

μονάδες 30

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  τέτοια, ώστε:  $\overline{A\Delta} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{\Gamma E} = \frac{1}{2}\overline{B\Gamma}$  και  $\overline{AZ} = \frac{3}{5}\overline{A\Gamma}$ .

α) Αν  $\overline{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overline{A\Gamma} = \vec{\beta}$  να εκφράσετε τα  $\overline{\Delta E}$  και  $\overline{\Delta Z}$  συναρτήσει των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

μονάδες 20

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  είναι συνευθειακά.

μονάδες 30

**Κριτήριο αξιολόγησης στο γινόμενο αριθμού με διάνυσμα**

Οκτώβριος 2016

Όν/νυμο.....

**Ομάδα Β**

**ΘΕΜΑ 1**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

- i.  $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$
- ii.  $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\kappa + \lambda)$
- iii. Αν  $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$  τότε  $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ .
- iv. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.

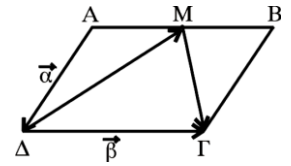


μονάδες 4x3

**ΘΕΜΑ 2**

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν  $\vec{A\Delta} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$ , τότε το διάνυσμα  $\vec{M\Gamma}$  ισούται με

- A.  $\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- B.  $\frac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- Γ.  $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
- Δ.  $\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- Ε.  $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$



μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3**

Αν  $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

μονάδες 30

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  τέτοια ώστε:

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{\Gamma E} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

**α)** Αν  $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$  να εκφράσετε τα  $\overrightarrow{\Delta E}$  και  $\overrightarrow{\Delta Z}$  συναρτήσει των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

μονάδες 20

**β)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  είναι συνευθειακά.

μονάδες 30

**Κριτήριο αξιολόγησης στο γινόμενο αριθμού με διάνυσμα**

Οκτώβριος 2016

Όν/νυμο .....

Ομάδα Γ

**ΘΕΜΑ 1**

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

- i. Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ , τότε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
- ii. Αν  $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ , τότε  $\kappa = \lambda$  για κάθε διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ .
- iii. Αν  $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$  τότε  $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ .
- iv. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.

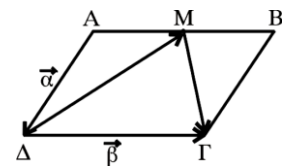

μονάδες 4x3

**ΘΕΜΑ 2**

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν  $\vec{AD} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{DG} = \vec{\beta}$ , τότε:

Το διάνυσμα  $\vec{MG}$  ισούται με

- Α.  $\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- Β.  $\frac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- Γ.  $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
- Δ.  $\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- Ε.  $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$



μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3**

Αν  $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

μονάδες 30

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  τέτοια, ώστε:  $\overline{A\Delta} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{\Gamma E} = \frac{1}{2}\overline{B\Gamma}$  και  $\overline{AZ} = \frac{3}{5}\overline{A\Gamma}$ .

α) Αν  $\overline{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overline{A\Gamma} = \vec{\beta}$  να εκφράσετε τα  $\overline{\Delta E}$  και  $\overline{\Delta Z}$  συναρτήσει των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

μονάδες 20

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  είναι συνευθειακά.

μονάδες 30

**Κριτήριο αξιολόγησης στο γινόμενο αριθμού με διάνυσμα**

Οκτώβριος 2016

Ον/νυμο.....

Ομάδα Δ

**ΘΕΜΑ 1**

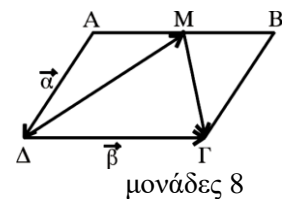
Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

- i.  $\lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$
- ii.  $\kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\alpha} = \vec{\alpha} (\kappa + \lambda)$
- iii. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
- iv. Αν  $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ .


**ΘΕΜΑ 2**

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν  $\vec{AD} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{DG} = \vec{\beta}$ , τότε το διάνυσμα  $\vec{DM}$  ισούται με

- Α.  $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$
- Β.  $\frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{2}$
- Γ.  $-\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- Δ.  $\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- Ε.  $\frac{1}{2}\vec{\alpha} + \vec{\beta}$



**ΘΕΜΑ 3**

Αν ισχύει ότι  $\vec{AG} - 3\vec{GB} + 2\vec{AB} = \vec{BD} - 3\vec{MA}$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

μονάδες 30

### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  τέτοια, ώστε:  $\overline{A\Delta} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{\Gamma E} = \frac{1}{2}\overline{B\Gamma}$  και  $\overline{AZ} = \frac{3}{5}\overline{A\Gamma}$ .

α) Αν  $\overline{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overline{A\Gamma} = \vec{\beta}$  να εκφράσετε τα  $\overline{\Delta E}$  και  $\overline{\Delta Z}$  συναρτήσει των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

μονάδες 20

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  είναι συνευθειακά.

μονάδες 30



## Λύσεις

### Ομάδα Α

#### ΘΕΜΑ 1

i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Λ

#### ΘΕΜΑ 2

Δ

#### ΘΕΜΑ 3

$$\vec{A\Gamma} - 3\vec{B\Gamma} + 2\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta} - 3\vec{M\Delta} \Leftrightarrow -\vec{A\Gamma} - 3\vec{B\Gamma} + 2(\vec{B\Gamma} - \vec{A\Gamma}) = \vec{B\Delta} - \vec{B\Gamma} - 3(\vec{A\Gamma} - \vec{M\Gamma}) \Leftrightarrow$$

~~$-\vec{A\Gamma} - 3\vec{B\Gamma} + 2\vec{B\Gamma} - 2\vec{A\Gamma} = \vec{B\Delta} - \vec{B\Gamma} - 3\vec{A\Gamma} + 3\vec{M\Gamma} \Leftrightarrow \vec{B\Delta} = -3\vec{M\Gamma} \Rightarrow \vec{B\Delta} // \vec{M\Gamma}$~~  άρα τα σημεία Γ,Μ,Δ είναι συνευθειακά

#### ΘΕΜΑ 4

α)  $\vec{\Delta\Gamma} = \vec{B\Gamma} - \vec{B\Delta} = \vec{B\Gamma} + \vec{D\Gamma} + \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\vec{\Delta\Gamma} = \vec{B\Gamma} + \frac{1}{2}\vec{B\Gamma} + \vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}\vec{B\Gamma} + \vec{A\Gamma} - \frac{1}{3}\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

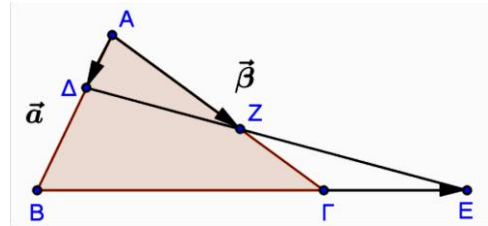
$$\vec{\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}(\vec{A\Gamma} - \vec{A\Gamma}) + \frac{2}{3}\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\vec{\Delta\Gamma} = \frac{9(\vec{A\Gamma} - \vec{A\Gamma}) + 4\vec{A\Gamma}}{6} = \frac{9\vec{A\Gamma} - 9\vec{A\Gamma} + 4\vec{A\Gamma}}{6} = \frac{9\vec{A\Gamma} - 5\vec{A\Gamma}}{6}$$

$$\vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta} = \frac{3}{5}\vec{A\Gamma} - \frac{1}{3}\vec{A\Gamma} = \frac{9\vec{A\Gamma} - 5\vec{A\Gamma}}{15}$$

Είναι  $6\vec{\Delta\Gamma} = 9\vec{A\Gamma} - 5\vec{A\Gamma}$  και  $15\vec{\Delta\Gamma} = 9\vec{A\Gamma} - 5\vec{A\Gamma}$ , άρα

$$6\vec{\Delta\Gamma} = 15\vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}\vec{\Delta\Gamma} \Rightarrow \vec{\Delta\Gamma} // \vec{\Delta\Gamma} \Rightarrow \Delta, \Gamma, \Gamma \text{ συνευθειακά.}$$



### Ομάδα Β

#### ΘΕΜΑ 1

i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Σ

#### ΘΕΜΑ 2

Δ

#### ΘΕΜΑ 3

$$\vec{A\Gamma} + 3\vec{B\Gamma} - 2\vec{B\Delta} = \vec{B\Delta} + 3\vec{M\Delta} \Leftrightarrow -\vec{A\Gamma} - 3\vec{B\Gamma} - 2(\vec{A\Gamma} - \vec{B\Gamma}) = \vec{B\Delta} - \vec{B\Gamma} + 3(\vec{M\Delta} - \vec{A\Delta}) \Leftrightarrow$$

$$-\vec{A\Gamma} - 3\vec{B\Gamma} - 2\vec{A\Gamma} + 2\vec{B\Gamma} = \vec{B\Delta} - \vec{B\Gamma} + 3\vec{M\Delta} - 3\vec{A\Delta} \Leftrightarrow \vec{B\Delta} = -3\vec{M\Delta} \Rightarrow \vec{B\Delta} // \vec{M\Delta} \Rightarrow \Delta, \Gamma, \Gamma \text{ συνευθειακά}$$

#### ΘΕΜΑ 4

Ίδιο με την ομάδα Α

## Ομάδα Γ

### ΘΕΜΑ 1

i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Σ

### ΘΕΜΑ 2

Δ

### ΘΕΜΑ 3

$$\overline{AK} + 3\overline{BK} - 2\overline{BA} = \overline{BL} + 3\overline{AM} \Leftrightarrow -\overline{KA} - 3\overline{KB} - 2(\overline{KA} - \overline{KB}) = \overline{KL} - \overline{KB} + 3(\overline{KM} - \overline{KA}) \Leftrightarrow$$

$$-\overline{KA} - 3\overline{KB} - 2\overline{KA} + 2\overline{KB} = \overline{KL} - \overline{KB} + 3\overline{KM} - 3\overline{KA} \Leftrightarrow \overline{KL} = -3\overline{KM} \Rightarrow \overline{KL} // \overline{KM} \Rightarrow K, L, M$$

συνευθειακά

### ΘΕΜΑ 4

Ίδιο με την ομάδα Α

## Ομάδα Δ

### ΘΕΜΑ 1

i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Λ

### ΘΕΜΑ 2

Γ

### ΘΕΜΑ 3

$$\overline{AG} - 3\overline{GB} + 2\overline{AB} = \overline{BL} - 3\overline{MA} \Leftrightarrow -\overline{GA} - 3\overline{GB} + 2(\overline{GB} - \overline{GA}) = \overline{GL} - \overline{GB} - 3(\overline{GA} - \overline{GM}) \Leftrightarrow$$

$$-\overline{GA} - 3\overline{GB} + 2\overline{GB} - 2\overline{GA} = \overline{GL} - \overline{GB} - 3\overline{GA} + 3\overline{GM} \Leftrightarrow \overline{GL} = -3\overline{GM} \Rightarrow \overline{GL} // \overline{GM} \text{ άρα τα σημεία } \Gamma, M, \Delta \text{ είναι συνευθειακά}$$

### ΘΕΜΑ 4

Ίδιο με την ομάδα Α