Μαθηματικά Α΄ Λυκείου

14ο Λύκειο Περιστερίου

2022-2023

Το βιβλίο αυτό δημιουργήθηκε για να χρησιμοποιηθεί
συμπληρωματικά στο σχολικό βιβλίο.

Χ. Δεστούνης
Σ. Μιχαήλογλου
Α. Μπλιάς
Δ. Πατσιμάς

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητές τους

Δυνάμεις

Ορισμός: $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, \ \nu > 1, \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Ακόμη ορίζουμε ότι: $\alpha^1 = \alpha$ και με $\alpha \neq 0$: $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$.

Ιδιότητες

1. $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$ **2.** $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$

3. $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$ **4.** $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$ **5.** $\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda} = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

1. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\left(x^2\right)^3 \cdot 5x^4$ **β)** $x^{-2} \cdot x^4$ **γ)** $\left[\left(x^{-3}\right)^{-2}\right]^{-5}$ **δ)** $\left(2x^2\right)^3 : \left(x^{-2}\right)^{-2}$

ε) $\left(xy^3\right)^2 \cdot x^3 y$ **στ)** $(-2x)^2 \cdot \left(-2x^2\right)$ **ζ)** $(-x)^3 \cdot (-x)^4 \cdot x^5$

η) $\dfrac{6x^3 \cdot y^6}{2x^4 \cdot y^2}$ **θ)** $\dfrac{x^{-2} \cdot x^4}{\left(x^3\right)^3 \cdot x^7}$ **ι)** $\dfrac{4\alpha^2 \cdot \beta^8}{x^{-3} \cdot y^5} : \dfrac{2\alpha^4 \cdot \beta^6}{x^{-5} \cdot y^2}$

κ) $2\alpha^2 \cdot \beta^4 \left(\dfrac{\alpha^{-2} \cdot \beta^{-1}}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{\alpha^3 \cdot \beta^2}{2}\right)^2$ **λ)** $\dfrac{3^{100} \cdot \alpha^8 \cdot \beta^4}{9^{49} \cdot \left(\alpha^3 \beta\right)^2} : \dfrac{81^{20} \cdot \left(\alpha^{-2}\right)^4 \cdot \left(\beta^{-2}\right)^8}{\left(3^{-2}\right)^{-39} \cdot \alpha^{-6} \cdot \beta^{-14}}$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:

$A = 3^{77} + 3^{77} + 3^{77}$ $B = 2^{102} - 2^{101} - 2^{100}$ $\Gamma = 2^{59} - 4^{29}$ $\Delta = 2^{17} \cdot 3^{18} - 2^{18} \cdot 3^{17}$

3. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι:

$$\left[\left(\alpha^{-7}\beta^3\right) : (\alpha\beta)^4\right] \cdot \frac{(\alpha\beta)^{-2}}{\left(\alpha^{18}\right)^0 \left(\beta^{-2}\alpha\right)^{-1} \beta^7} = 1$$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \dfrac{\alpha^{-12}\beta^4 \left(\alpha^2\beta^{-5}\right)^3}{\alpha^{-5}\left(\alpha^{-3}\beta^5\right)^{-2}} \cdot \left[\dfrac{(\alpha\beta)^2}{\alpha^2\beta^4}\right]^{-3}$ για

$\alpha = 1821$ και $\beta = \dfrac{1}{1821}$.

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$A = \dfrac{25^5 \cdot 15^{10} \cdot 12^{15} \cdot 14^{20}}{6^{25} \cdot 32^5 \cdot 35^{20}}$ $B = \dfrac{18^{10} \cdot 10^5 \cdot 22^{16} \cdot 25^5}{55^5 \cdot 33^{11} \cdot 15^{10} \cdot 4^{20}}$

Ταυτότητες

1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ **2.** $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

3. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ **4.** $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

5. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ **6.** $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

7. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

8. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

9. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(2\alpha+5)^2$ **β)** $(x^6-2x^3)^2$ **γ)** $(-3x+y)^2$ **δ)** $(-5\alpha-6\beta)^2$

ε) $(2\alpha-3\beta)(2\alpha+3\beta)$ **στ)** $(x+5)(5-x)$ **ζ)** $(-x+2y)(x+2y)$

η) $(2x+5y)^3$ **θ)** $(x^2-2)^3$ **ι)** $(x+1)(x^2-x+1)$

κ) $(2\alpha-1)(4\alpha^2+2\alpha+1)$ **λ)** $4(x-3)^2-(2x-3)^2$

μ) $(\alpha-2)^3-2(3\alpha+1)^3-\alpha(\alpha+3)(3-\alpha)$

7. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha+4)^2+(2\alpha+3)^2=\alpha^2+(2\alpha+5)^2$ **β)** $(\alpha-3\beta)^2-(\beta-3\alpha)^2+8(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=0$

γ) $(\alpha-\beta+\gamma)^2+(\beta-\alpha+\gamma)^2=2\left[(\alpha-\beta)^2+\gamma^2\right]$

δ) $\alpha(\alpha-3\beta)^2+\beta(\beta-3\alpha)^2=(\alpha+\beta)^3$

ε) $(x+2)^3-4(x+1)^3+6x^3+(x-2)^3=4(x-1)^3$

8. Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων να βρείτε τις παρακάτω τιμές:

α) 504^2-502^2 **β)** 10^6-999^2 **γ)** $997\cdot1003$ **δ)** $88^2+2\cdot88\cdot12+12^2$

ε) $999^2+2\cdot999+1$ **στ)** 101^2 **ζ)** 99^2

9. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(3x-1)^2+(4x-3)^2-(5x-3)^2$ είναι σταθερό.

10.α) Να αποδείξετε ότι $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=4$

β) Να υπολογίσετε τη παράσταση $\Pi=\left(1821+\dfrac{1}{1821}\right)^2-\left(1821-\dfrac{1}{1821}\right)^2$.

11.α) Να αποδείξετε ότι $(x-3)^2+(3x+1)^2-10(x-1)(x+1)=20$.

β) Χωρίς να κάνετε τις πράξεις να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$997^2 + 3.001^2 - 10 \cdot 999 \cdot 1.001$.

12. Αν $x + \frac{1}{x} = 6$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ **β)** $x^3 + \frac{1}{x^3}$

13. Αν $\alpha + \beta = 6$ και $\alpha \cdot \beta = 7$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 22$ **β)** $\alpha^3 + \beta^3 = 90$

Παραγοντοποίηση

Η διαδικασία με την οποία μία παράσταση, που είναι άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

π.χ.: $\alpha x - \alpha y + \alpha z = \alpha(x - y + z)$

β) Ομαδοποίηση

Στην παράσταση $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y$ δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους. Όμως αν από τους δύο πρώτους όρους βγάλουμε κοινό παράγοντα το α και από τους δύο τελευταίους το β η παράσταση γίνεται:

$\alpha(x + y) + \beta(x + y)$ και έτσι σχηματίζονται δύο καινούργιοι όροι με κοινό παράγοντα το $x + y$. Οπότε:

$$\boldsymbol{\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y = \alpha(x + y) + \beta(x + y) = (x + y)(\alpha + \beta)}$$

γ) Διαφορά τετραγώνων: $\boldsymbol{\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}$

π.χ.: $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

δ) Διαφορά - Άθροισμα κύβων

$\boldsymbol{\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}$ και $\boldsymbol{\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}$

π.χ.: $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

$$\boldsymbol{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2} \textbf{ και } \boldsymbol{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2}$$

π.χ.: $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2$, $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x - 2)^2$

στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου

$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \beta x + \alpha x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

π.χ.: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ με $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha \cdot \beta = 6$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2\alpha\beta - 2\alpha\gamma$ **β)** $9x^2 - 3x$ **γ)** $x(x + 3) + 7(x + 3)$

δ) $\alpha^2(x - 1) + \beta(1 - x)$ **ε)** $\alpha(x - y) - (y - x)$ **στ)** $(2x - 3)(x - 5) - (x + 2)(x - 5)$

ζ) $9-x^2$ **η)** $36\beta^2-9\gamma^2$ **θ)** x^6-y^4

ι) $\alpha^4-\beta^4$ **κ)** $3x^3-3x$ **λ)** $(\alpha-2\beta)^2-4\beta^2$

μ) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$ **ν)** x^5-16x **ξ)** x^3-8 **ο)** $8x^3+27$

15.Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις

α) $\alpha x+\alpha y+\beta x+\beta y$ **β)** $x^2-y+xy-x$ **γ)** $\alpha^2-2\alpha+1$ **δ)** $4x^2-4x+1$

ε) $9y^2+12y+4$ **στ)** x^3-6x^2+9x **ζ)** x^2-7x+6 **η)** x^2-6x+5

21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $x^{\nu+1}+x^{\nu}-x-1$ **β)** $x^{\nu+1}-(\nu+1)x+\nu$

22. Να απλοποιείστε τα κλάσματα :

α) $\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha+\beta}$ **β)** $\dfrac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta}$ **γ)** $\dfrac{x^{101}-101x+100}{x-1}$

16. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha^3-8\alpha^2+16\alpha}{\alpha^3-16\alpha}$ **β)** $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

γ) $\dfrac{\alpha^2+3\alpha}{2\alpha^2+3\alpha}\cdot\dfrac{4\alpha^2-9}{4\alpha^2-12\alpha+9}$ **δ)** $\dfrac{\alpha^2-4}{\alpha^3+8}:\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2-2\alpha+4}$

17.Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha^4-8\alpha^2+16}{\alpha^3-4\alpha^2+4\alpha}$ **β)** $\dfrac{\alpha^2-25}{\alpha^3-125}\cdot\dfrac{\alpha^2+5\alpha+25}{\alpha^2+10\alpha+25}$

γ) $\dfrac{4x^2+4x+1}{6x^2-3x}:\dfrac{12x^2-3}{2x}$ **δ)** $(x+y)^2\cdot\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-2}$

18.Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ για τους οποίους ισχύει ότι:

$\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{\gamma}{4}$ και $\alpha+\beta+\gamma=45$.

19.Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2}{\beta^2\delta+\beta\delta^2}=\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^3$.

Τράπεζα θεμάτων

20.(1251) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta\neq 0$ και $\delta\neq\gamma$ ώστε να ισχύουν: $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\dfrac{\gamma}{\delta-\gamma}=\dfrac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

21.(12685). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι: $(\alpha + \beta)\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}\right) = 4$,

τότε να αποδείξετε ότι: **α)** $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = 2$ **β)** α=β

22.(13088)Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε
$A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$.

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

23.(13323)**α)** Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:
$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$.

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

24.(13053)Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι **i.** $\beta + \gamma = -\alpha$. **ii.** $\dfrac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \dfrac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \dfrac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \dfrac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0$.

25.(13472)Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$. **ii.** $\alpha + \beta = 1$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

26.(14555)Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x-2y)^2 - 2(3-2xy) = 5y^2 - 1 \text{ τότε:}$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x+y)^3(x-y)^3$.

27.(14458)Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:
$(x+4y)(x+y) = 9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι **i)** $(2y-x)^2=0$ **ii)** $y=\frac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

28.(14473)Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

29.(14489)Αν οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha\neq1$ και $\beta\neq1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha+\beta=2\alpha\beta$ **β)** Οι αριθμοί $x=\alpha-\beta$ και $y=\alpha(1-2\beta)+2\beta$ είναι αντίθετοι.

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ορισμός: Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, και γράφουμε $\alpha>\beta$, όταν η διαφορά $\alpha-\beta$ είναι θετικός αριθμός.
Δηλαδή $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta>0$.

Ιδιότητες

- $\alpha^2\geq0$ **για κάθε** $\alpha\in\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha=0$)
  - $\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=0$ **και** $\beta=0$
  - $\alpha^2+\beta^2>0\Leftrightarrow\alpha\neq0$ **ή** $\beta\neq0$
- $(\alpha>0 \text{ και } \beta>0)\Rightarrow\alpha+\beta>0$ — Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός
- $(\alpha<0 \text{ και } \beta<0)\Rightarrow\alpha+\beta<0$ — Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός
- **α,β ομόσημοι** $\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta>0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}>0$
- **α,β ετερόσημοι** $\Leftrightarrow\alpha\cdot\beta<0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}<0$
- $(\alpha>\beta \text{ και } \beta>\gamma)\Rightarrow\alpha>\gamma$
- $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha+\gamma>\beta+\gamma$
- **Αν** $\gamma>0$, **τότε:** $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$
- **Αν** $\gamma<0$, **τότε:** $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$
- $(\alpha>\beta \text{ και } \gamma>\delta)\Leftrightarrow\alpha+\gamma>\beta+\delta$
- **Αν** $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$, **τότε:** $(\alpha>\beta \text{ και } \gamma>\delta)\Leftrightarrow\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$
- **Αν α, β θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε:** $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu>\beta^\nu$.
- **Αν α, β θετικοί αριθμοί και ν θετικός ακέραιος, τότε:** $\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu=\beta^\nu$.

30. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$ **β)** $x^2 + 16 \geq 8x$ **γ)** $(\alpha+\beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$

δ) $\alpha^2 + 2\alpha + 3 > 0$ **ε)** $3x^2 + 4x + 4 > 0$ **στ)** $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 2\beta + 5 \geq 0$

ζ) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$ **η)** $2\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0$ **θ)** $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta + 2 \geq 0$

31. Να αποδείξετε ότι:

α) $2x^2 - 4x + 5 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ **β)** $x^2 + y^2 \geq 12x + 4y - 40$, $x, y \in \mathbb{R}$

γ) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq \frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **δ)** $\alpha^2 + \beta^2 + 25 \geq 6\alpha + 8\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

32. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$.

33.α) Αν $x > 2$, να αποδείξετε ότι: $3x + 2 > x + 6$.

β) Αν $x > 1$, να αποδείξετε ότι: $5x + 2 > 2x + 5$.

34.α) Αν $\alpha < 2 < \beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4 < 0$.

β) Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{3\alpha + 5\beta}{8} < \beta$.

γ) Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha < \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} < \beta$.

δ) Αν $\alpha \geq 1$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 1 \geq \alpha - \alpha^2$.

ε) Αν $\alpha > 1$ και $\beta > 1$ να δείξετε ότι $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} < 1$.

35.α) Αν $\alpha + \beta > 0$ τότε $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$.

β) Αν $\alpha \geq \beta$ να δείξετε ότι $\alpha^3 - \beta^3 \geq \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2$.

36. Αν $0 < \alpha < \beta$,τότε:

α) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς 1, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών ο $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο $\frac{\beta}{\alpha}$.

37. Αν $6 < x < 8$ και $2 < y < 3$, να αποδείξετε ότι:

α) $8 < x + y < 11$ **β)** $3 < x - y < 6$ **γ)** $18 < 2x + 3y < 25$ **δ)** $1 < \dfrac{x-2}{y+1} < 2$

38. Αν $x \in [2,3]$ και $y \in [1,2]$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις: **α)** $x + y$ **β)** $2x - 3y$ **γ)** $\dfrac{x}{y}$

39. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

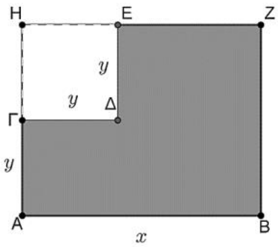
α) $6^{14} \cdot 9^{21}$ και $6^{21} \cdot 9^{14}$ **β)** $10^9 \cdot 5^7$ και 5^{25}

γ) $(x-1)^2$ και $2(x-5)$ **δ)** $(x+3)^2$ και $2(2x+3)$

ε) $A = \alpha^2 + \beta^2 + 13$ και $B = 4\alpha + 6\beta$ **στ)** $A = \alpha^2 + \beta^2 + 20$ και $B = 8\alpha + 4\beta$.

Τράπεζα θεμάτων

40. (1261) Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

41. (1287) Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

42. (1317) Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

43. (1324) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων: **α)** $y - x$ **β)** $x^2 + y^2$

44. (1353) **α)** Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

45.(1373) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ **β)** $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

46.(12673)Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. **β)** Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

47.(12922)Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες Α = 0.

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

48.(13266)Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

49.(14475) Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$ **β)** $\alpha - \beta$

50.(14492) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

51.(14704)Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ **β)** $2x - 3y$ **γ)** $\frac{x}{y}$

52.(4.14820)**α)** Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ **ii.** $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}{x^2-1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Α.

ii. Με τη βοήθεια του β)ι με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση Α μπορεί να πάρει την τιμή $\dfrac{9}{16}$.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο: $|\alpha|=\begin{cases}\alpha & \alpha\geq 0\\ -\alpha & \alpha<0\end{cases}$.

Συνέπειες του ορισμού

1. $|-x|=|x|$
2. $|x|=0\Leftrightarrow x=0$
3. $|x|+|y|=0\Leftrightarrow x=y=0$
4. $|x|^{2\nu}=x^{2\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.
5. $|x|=|y|\Leftrightarrow x=y$ ή $x=-y$
6. $|x|\geq x$ **και** $|x|\geq -x$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
7. $-|x|\leq x\leq |x|$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$

Απόσταση δύο αριθμών

Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α, β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών α και β και ισχύει: $\mathbf{d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|}$

Είναι προφανές ότι d(α, β) = d(β, α).

53. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A=\dfrac{|2x-1|}{|1-2x|}-3\dfrac{|3y+2|}{|-2-3y|}+2\dfrac{|x-y-z|}{|y-x+z|}$

54. Να απαλλαγούν από τις απόλυτες τιμές οι παραστάσεις:

$A=|x^2-2x+1|$ $\quad B=|4x^2+4x+1|$ $\quad \Gamma=|-x^2+8x-16|$

55. Να απαλλαγούν από τις απόλυτες τιμές οι παραστάσεις:

$A=|x-1|-3$, αν $x<-2$ $\quad B=x-3|x+1|-2$, αν $x>0$

$\Gamma=|x-3|-2|x+2|$, αν $-1\leq x<2$ $\quad \Delta=|x+3|-2|-x+4|+2|x+1|$, αν $1\leq x\leq 3$

56. Αν $x\in[1,2)$, να αποδείξετε ότι: $3<|x|-|x-1|+2|3-x|\leq 5$.

57. Αν $\alpha<\beta<\gamma<0$, να αποδείξετε ότι:

α) $|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|-|\gamma-\alpha|=0$ $\quad$ **β)** $|\alpha+\beta|-|\beta+\gamma|-|\alpha+\gamma|=2\gamma$

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτη τιμή

$A=|x-2|+3x-5$ $\quad B=|x-3|+2x-1$ $\quad \Gamma=2|x-1|-3+x$

$\Delta=|x-3|-2|x+1|+x$ $\quad E=|2x+2|-3|-x+3|+3x$ $\quad Z=|x-3|+3|x+1|-1$

58.Να αποδείξετε ότι: **α)** $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\le\dfrac{1}{2}$ **β)** $x^2+y^2\ge 2|xy|$

59.Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

α) $|x-2|+|5-x|\ge 3$ **β)** $|7-x|+|x+6|\ge 1$ **β)** $|3-x|+|x+2|\ge 5$

Τράπεζα θεμάτων

60.(1239) Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x\ge 2$ είναι $A=3x-4$ **ii)** για κάθε $x<2$ είναι $A=8-3x$

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\ge 2$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$

61.(1252) **α)** Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

62.(1258) Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{|x-10|}{x-10}$

63.(1260) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$.

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

64.(1268) Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\le 2$ και $|y-6|\le 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\le x\le 5$ και $2\le y\le 10$.

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y

65.(1320)Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \le \dfrac{3}{2}$.

β) Αν $x \le \dfrac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

66.(1322) Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$

67.(1323) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$

68.(1366) **α)** Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \le -2$.

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\dfrac{1}{\alpha}\right| \ge 2$.

69.(1371) **α)** Αν $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \ge 2$ (1)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

70.(1383) Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$, τότε:

α) να δείξετε ότι $x \in (-3,1)$.

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

71.(1384)Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x-y+2$ **β)** $0<A<4$.

72.(13177)Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α β, για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha-3| = 3-\alpha$ και $|\beta+2| = \beta+2$

β) Να δείξετε ότι: $0 \le \alpha+\beta \le 2$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha+\beta| + |\alpha-3| - |\beta+2|$ είναι ίση με 1.

73.(14412)Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$ **β)** Να δείξετε $\alpha+\beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

74.(14491)**α)** Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

75.(14572)Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$. Να δείξετε ότι: **α)** $-3<x<-1$ **β)** $|2x+4|<2$.

76.(14599)Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει $x^2<1$.

77.(14617)Δίνεται η ανίσωση $|x-7|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6,8)$.

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3,4)$.

4ο Θέμα

78.(1427)Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$.

79.(1428) Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: **i)** $|x+2|$ **ii)** $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

80.(1429) Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$ τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

81.(1515)Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση $(\alpha-1)(1-\beta)>0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β.

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

82.(1525)Για τους πραγματικούς αριθμούς α, $\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$.

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

83.(13179)Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$,

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\le 1\le\frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Ορισμός

Αν $\boldsymbol{\alpha\ge 0}$, τότε **τετραγωνική ρίζα** $(\sqrt{\alpha})$, ονομάζουμε τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $\mathbf{x^2=\alpha}$.

Δηλαδή τετραγωνική ρίζα του αριθμού $\boldsymbol{\alpha\ge 0}$ λέγεται ο αριθμός $\mathbf{x\ge 0}$ που αν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α.

Ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας

1. $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

2. $(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$, $\alpha\ge 0$

3. $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta\ge 0$

4. $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha\ge 0,\ \beta>0$

Ορισμός

Αν $\alpha \ge 0$, τότε **ν-οστή ρίζα** $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)$, ονομάζουμε τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$. Δηλαδή ν-οστή ρίζα του αριθμού $\alpha \ge 0$ λέγεται ο αριθμός $x \ge 0$ που αν υψωθεί στη ν-οστή μας δίνει τον α.

Ιδιότητες ν-οστής ρίζας

1. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$

2. Αν $\alpha \ge 0$ τότε $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$, ενώ αν $\alpha \le 0$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha| = -\alpha$

3. $\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \ge 0$

4. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \ge 0,\ \beta > 0$

5. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa}$, $\alpha \ge 0$

6. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, $\alpha, \beta \ge 0$

7. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$, $\alpha \ge 0$

8. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

84. Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις σε μορφή κλάσματος με ρητό παρονομαστή:

α) $3^{\frac{2}{3}}$ **β)** $5^{\frac{2}{7}}$ **γ)** $2^{\frac{-4}{3}}$ **δ)** $3^{\frac{-1}{2}}$ **ε)** $5^{\frac{-3}{2}}$

85. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ **β)** $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ **γ)** $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}$ **δ)** $\sqrt[5]{\alpha^2} \cdot \sqrt[5]{\alpha^3}$ **ε)** $\dfrac{\sqrt[5]{4^7} \cdot \sqrt[5]{4^6}}{\sqrt[5]{4^3}}$

στ) $\dfrac{\sqrt[3]{5^8} \cdot \sqrt[3]{5^4}}{\sqrt[3]{5^3}}$ ζ) $\dfrac{\sqrt[6]{2^{13}} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{16}}$ **η)** $\sqrt[3]{4^5} \cdot \sqrt[3]{4^2} \cdot \sqrt[3]{4^2}$ **θ)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$ **ι)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2}$

κ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}$ λ) $\dfrac{\sqrt[3]{5^5} \cdot \sqrt[12]{5}}{\sqrt[4]{5^3}}$ **μ)** $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3^5}$

86. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt[3]{\sqrt{3^4}} \cdot \sqrt[6]{9}$ **β)** $\sqrt{\sqrt[5]{2^7}} \cdot \sqrt[10]{2^3}$ **γ)** $\sqrt{\sqrt{7^3}} \cdot \sqrt[8]{7^2}$ **δ)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{17}}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{2^7}}$

87. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{7} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + 2} = 3$ **β)** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13} - 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{13} + 3} = 2$

γ) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \dfrac{5}{2}$ **δ)** $\dfrac{1}{\left(5 - \sqrt{23}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(5 + \sqrt{23}\right)^2} = 5\sqrt{23}$

88. Να αποδείξετε ότι: **α)** $\dfrac{\sqrt{75} + \sqrt{147}}{\sqrt{192} - \sqrt{108}} = 6$ **β)** $\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = 6\sqrt[3]{2}$

89. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[6]{3^5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{9}$ **β)** $\sqrt[4]{2^5} \cdot \sqrt[12]{2^9} = 4$ γ) $\dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[6]{x^5}} = \sqrt[4]{x^3}$

δ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}=2\sqrt[12]{2^{11}}$ **ε)** $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{3}=3\sqrt[12]{3}$ **στ)** $\sqrt[6]{3\sqrt[3]{9\sqrt{3^5}}}=\sqrt[12]{3^5}$

90.Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **β)** $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ **γ)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$ **δ)** $\dfrac{4}{\sqrt[4]{8}}$ **ε)** $\dfrac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$ **στ)** $\dfrac{1}{\sqrt[7]{10^3}}$

91.Να τραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ **β)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1}$ **γ)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **δ)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ **ε)** $\dfrac{26}{\sqrt[3]{3}-1}$

92.Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$\mathrm{A}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ $\mathrm{B}=\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ $\Gamma=\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ $\Delta=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

93.Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt{x-1}$ **β)** $\sqrt[3]{3-x}$ **γ)** $\sqrt{x-3}-\sqrt{x-7}$ **δ)** $\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$ **ε)** $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

94.Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[5]{5}<\sqrt[3]{3}$ **β)** $\sqrt{7}+\sqrt{3}<\sqrt{21}+1$ **γ)** $\sqrt{8-2\sqrt{10}}>\sqrt{5}-\sqrt{2}$

95.Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ και $\sqrt{8}-\sqrt{3}$.

Τράπεζα θεμάτων

96.(1270)Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

α) Να βρείτε τις τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

97.(1281)Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $\mathrm{A}=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $\mathrm{B}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ και $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=23$
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση.

98.(1335) Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{A}=\sqrt{(x-2)^2}$ και $\mathrm{B}=\sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A;
β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B;
γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

99.(1338)Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}, B=\sqrt{3}$ και $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$ **β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β .

100. (1340)Αν είναι $A=2-\sqrt{3},\ B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$.

101. (1375) Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις): $\sqrt{2}\cong 1{,}41$, $\sqrt{3}\cong 1{,}73$, $\sqrt{5}\cong 2{,}24$ και $\sqrt{7}\cong 2{,}64$.

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20},\sqrt{40},\sqrt{80}$.

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

102. (1376) Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

103. (1377)**α)** Να δείξετε ότι : $3<\sqrt[3]{30}<4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30},\ \ 6-\sqrt[3]{30}$.

104. (1378)Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=5$,να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$.

105. (1379)Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=4$,να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$.

106. (1380)Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$

107. (1381) Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

108. (1382)Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$

109. (12943).Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right)$ και $\beta = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα α + β και το γινόμενο αβ.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

110. (14774)**α)** Να δείξετε ότι $\left(2 + \sqrt{5}\right)^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $\left(1 - \sqrt{5}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5} .$$

111. (14682)Δίνονται οι αριθμοί: $A = \left(\sqrt{3}\right)^6$ και $B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$.

112. (14452)Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$. **β)** Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

113. (4.14931)Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε: $\alpha x = -\beta \Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha} x}{\cancel{\alpha}} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

  Δηλαδή αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει **μοναδική λύση** την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0 \cdot x = -\beta$ και είναι φανερό ότι για να

τη λύσουμε πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές του β, γιατί:
- αν $\beta \neq 0$ η εξίσωση είναι **αδύνατη**, ενώ
- αν $\beta = 0$ η εξίσωση έχει τη μορφή $0 \cdot x = 0$ και αληθεύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x, δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

114. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{8}{x^2-2x}$ **b)** $\dfrac{3}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{x^2+x} - \dfrac{1}{x}$

115. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2(x+1) - x(x+1)^2 = 0$ **β)** $\left(x^2-1\right)^2 - x^2\left(x^2-2x+1\right) = 0$

γ) $x(2x-3)^2 = 4x$ **δ)** $x^3 - 3x^2 - 4(x-1)(x-3) = 0$

116. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ **β)** $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ **γ)** $2x^3 - 2x = x^2 - 1$

117. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(\lambda-1)x = \lambda^2 - 1$ **β)** $(\lambda-2)x = \lambda^2 - 4$ **γ)** $\left(\lambda^2 + 2\lambda\right)x = \lambda + 2$

Τράπεζα θεμάτων

118. (1246) Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-1\right)x = (\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

119. (1327) Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$ **ii)** όταν $\alpha = -3$

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

120. (1369) Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-9\right)x = \lambda^2 - 3\lambda \quad (1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

121. (1351)Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(\lambda-1)x = (\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

122. (12857)Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x-2\lambda+2=0$.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για λ=-2.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το x=1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

123. (14224)Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$, $x\neq 0, x\neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A=\dfrac{x+1}{x}$.

β) i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4^o Θέμα

124. (13170)Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x\left(1+\dfrac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$(1{,}03^2-1{,}02^2)\cdot y=15811-15000\cdot 1{,}02^2.10)$

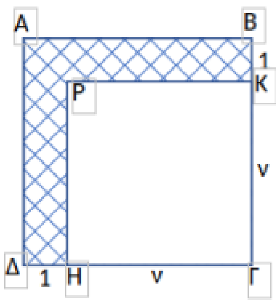
ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

125. (14543**)** Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $\alpha=2k+1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων. **β) i)** Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.



Εξισώσεις με απόλυτα

126. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x+3|=2$ **β)** $|x-4|=6$ **γ)** $|x-6|=-3$ **δ)** $|x-1|=3$ **ε)** $|x-1|-4=2$

στ) $|x+3|=0$ **ζ)** $|x+4|=-2$ **η)** $d(x,2)=4$ **θ)** $d(3,x)=5$

ι) $\sqrt{x^2-2x+1}=3$ **κ)** $\sqrt{4x^2+4x+1}=7$ **λ)** $\sqrt{x^2-4x+4}=2$

127. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|3x-6|+2=6+|2x-4|$ **β)** $7-|3x+3|=|2x+2|-8$

128. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{|x-2|+4}{3}-\dfrac{|x-2|+3}{5}=\dfrac{4}{3}$ **β)** $\dfrac{3|x-1|-1}{2}-2=\dfrac{|x-1|-4}{3}$

129. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $||x-1|-2|=3$ **β)** $||2x-3|+1|=4$ **γ)** $|3-|x+2||=1$

130. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|3x-4|=2|x+3|$ **β)** $|2x-3|=|x+6|$

γ) $|2x-10|=\sqrt{x^2-4x+4}$ **δ)** $||x-3|-2|=||x-3|-4|$

131. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $||x-1|-2|+||x-2|-1|=0$ **β)** $||x-3|-4|+|5-|x-2||=0$

132. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3|x-1|=2x-1$ **β)** $|3x-2|=x+1$ **γ)** $|x-2|=2x-3$ **δ)** $|2x-4|=3x+2$

133. Να λύσετε τις εξισώσεις :**α)** $|x+1||x-5|=2|x+1|$ **β)** $2|x-3|-|x^2-9|=0$

134. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $3|x-1|-|x+2|=x+3$ **β)** $|2-x|+2|x+3|=4$

Τράπεζα θεμάτων

135. (1303) Δίνονται οι παραστάσεις: $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\le x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$.

β) Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

136. (1308) Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A=4$. **β)** Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$.

137. (13169)Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \le x \le 5$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι $x-5 \le 0 < x-2$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|-|x-5|=2$.

138. (12917)Δίνεται η εξίσωση $\left(|\alpha-1|-3\right)x=\alpha+2 \ (1)$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για α = 0 και α = 5.
β) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha-1|=3$.
ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα β)i.

139. (14649)Δίνεται η παράσταση $K=|x+1|+2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι $K=\begin{cases} x+3, \text{ αν } x \ge -1 \\ 1-x, \text{ αν } x<-1 \end{cases}$.
β) i. Να λυθεί η εξίσωση $|x-2|=4$.
ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Αν ν άρτιος και $\alpha<0$,τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ είναι αδύνατη

Αν ν άρτιος και $\alpha \ge 0$ τότε: $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=+\sqrt[\nu]{\alpha} \\ x=-\sqrt[\nu]{\alpha} \end{cases}$

Αν ν περιττός και $\alpha \ge 0$ τότε: $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{\alpha}$

Αν ν περιττός και $\alpha<0$ τότε: $x^\nu=\alpha \Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

140. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $x^2-25=0$ **β)** $x^4-625=0$ **γ)** $x^{2016}-1=0$ **δ)** $x^4+81=0$
ε) $x^3-27=0$ **στ)** $x^5+243=0$ **ζ)** $x^{1821}-1=0$ **η)** $x^7-2x^3=0$

141. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $(x+1)^4-81=0$ **β)** $(x-2)^8+128=0$ **γ)** $(2x-1)^5+243=0$
δ) $(3x+2)^7-128=0$ **ε)** $81(x+2)^7-(x+2)^4=0$ **στ)** $16(x+4)^4-81=0$

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	**Ρίζες της εξίσωσης**
$\Delta>0$	$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta=0$	$x_{1,2}=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta<0$	δεν υπάρχουν ρίζες

142. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $6x^2+12x=0$ **β)** $\sqrt{2}x^2-2x=0$ **γ)** $\lambda x^2-3x=0$ **δ)** $x^2-16=0$
ε) $2x^2-4=0$ **στ)** $x^2+16=0$ **ζ)** $\lambda x^2-\lambda^2=0$

143. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2-6\alpha x+8\alpha^2=0$ **β)** $\alpha^2x^2-\left(\alpha^2+1\right)x+1=0$, $\alpha\neq 0$

144. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες.
α) $x^2-\left(k+1\right)x+k=0$ **β)** $x^2-kx+k-1=0$

145. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+\lambda x-1=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

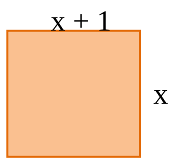
146. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2-2\left(\lambda+2\right)x+2\lambda^2-2=0$ είναι το 2, να βρείτε την άλλη της ρίζα.

147. Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+\lambda=0$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση έχει:
α) ρίζα το 3 **β)** δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
γ) μία διπλή ρίζα **δ)** Καμία πραγματική ρίζα

Τράπεζα θεμάτων

148. (1238).**α)** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$
β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$

149. (1285) Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $\left(x+1\right)$ μέτρα και x μέτρα.



α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.
β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

150. (1290) Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1 , να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$.
β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

151. (1312) Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq 0$.
α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\neq 0$.

152. (1349)**α)**Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.
β) Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$.

153. (13028)Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-2\alpha x-2\alpha-2=0$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ (1).
α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.
β) Για α=2 να λύσετε την εξίσωση (1).

4ο Θέμα

154. (1388) Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού.
β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.
γ) Για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

155. (1412)Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-\lambda)\cdot x^2-(\lambda^2-1)\cdot x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.
β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.
γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

156. (1440) Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, με $\lambda>0$.
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$.
β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:
i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.
ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του $\lambda>0$ και να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$.
iii) για την τιμή του $\lambda>0$ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

157. (1459) Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda = (2x+5)^2 - 8x \quad (1)$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος;

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25-\lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ.

158. (1476)Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$

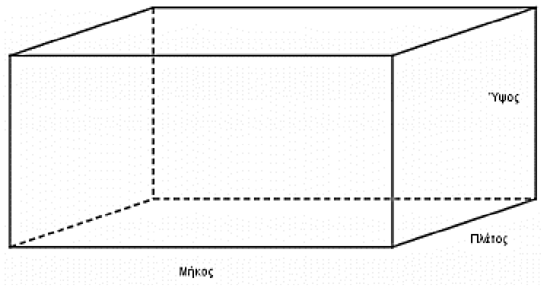
ii) Να δείξετε ότι: $\rho \neq 0$ και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

159. (1516) **α)** Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2).

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.
Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε:

i) $\rho \neq 0$ και **ii)** ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

160. (12683)Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.



α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

161. (13320)Θεωρούμε τις εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\ (\mathrm{I})$ και $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0\ (\mathrm{II})$ όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha\neq\gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών.

β) Αν ο αριθμός $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της (Ι) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (ΙΙ).

γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (Ι), (ΙΙ) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$.

162. (14651) Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0$, με $\lambda>0$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, για κάθε $\lambda>0$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

163. (14406)Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\frac{\alpha^{22}\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}\left(\alpha\beta\right)^{25}}$.

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$ να τους υπολογίσετε.

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

Εξισώσεις που ανάγονται σε 2ου βαθμού

164. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{x^2-21}{x^2-9}=\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x-3}$ **β)** $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

165. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $9x^4+5x^2-4=0$ **β)** $x^4+5x^2+6=0$ **γ)** $x^6-9x^3+8=0$

δ) $x^{10}-33x^5+32=0$ **ε)** $x^{500}+2011x^{250}+1821=0$

166. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2-2|x|-3=0$ **β)** $(x-2)^2-3|x-2|+2=0$ **g)** $(x^2+3x)^2-5|x^2+3x|+6=0$

167. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\left(x^2-2x\right)^2-4\left(x^2-2x\right)+3=0$ **β)** $\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)^2-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$

168. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $\left(x^2-4x+3\right)^2-2x^2+8x-9=0$ **β)** $\left(2x^2+3x-1\right)^2-5\left(2x^2+3x+3\right)+24=0$

γ) $x^2+\dfrac{1}{x^2}-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

Τράπεζα θεμάτων

4ο Θέμα

169. (1448)Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\dfrac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$

170. (1477) **α)** Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4-8x^2-9=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.
β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν $\gamma<0$ τότε:

i) $\beta^2-4\gamma>0$ **ii)** η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Τύποι Vieta

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}\qquad P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$$

171. Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-4x-6=0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) x_1+x_2 **β)** x_1x_2 **γ)** $x_1^2+x_2^2$ **δ)** $x_1^3+x_2^3$ **ε)** $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$

172. Να βρείτε το πρόσημο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων, χωρίς να τις λύσετε.

α) $x^2-6x+3=0$ **β)** $x^2-4x-1=0$ **γ)** $x^2+3x+2=0$

173. Να βρείτε τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού που έχουν για ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

α) 2 και -6 **β)** $\frac{1}{3}$ και 2 **γ)** 2α και 3α **δ)** $\frac{\alpha}{2}$ και α^2 **ε)** λ και $\lambda-2$

174. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+2x-5=0$, να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη:

α) $-x_1, -x_2$ **β)** kx_1, kx_2 **γ)** x_1^2, x_2^2 **δ)** $x_1x_2^2, x_2x_1^2$ **ε)** $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$

175. Δίνεται η εξίσωση $x^2+\lambda x-\left(\lambda^2+1\right)=0$.

α) Να δείξετε ότι έχει δυο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της , να βρεθεί το λ ώστε $x_1{}^2+x_2{}^2=4$.

176. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες τής εξίσωσης $\lambda x^2-2x-\lambda=0$, $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες ισχύει: $x_1^2+x_2^2=6$.

β) Να βρείτε τη δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες ρ_1, ρ_2 για τις οποίες ισχύει $\rho_1+\rho_2=2x_1x_2-3$ και $\rho_1\rho_2=\lambda x_1+\lambda x_2+2$.

177. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-\lambda x+\lambda-1=0$, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει $x_1^2-5x_1^2x_2-5x_1x_2^2+x_2^2=-25$.

178. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2+\left(\lambda+1\right)x+\lambda^2-3=0$ έχει ρίζες αντίστροφες.

179. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2+\left(\lambda^2-9\right)x+\lambda+2=0$ έχει ρίζες αντίθετες.

180. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2-\left(\lambda^2-5\right)x-2=0$ έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι αντίθετες.

Τράπεζα θεμάτων

2ο Θέμα

181. (1262) Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι: **i)** $A+B=\frac{1}{2}$ **ii)** $A\cdot B=\frac{1}{20}$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

182. (1269) Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1+x_2, x_1\cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

183. (1280) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=2$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

184. (1288) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\kappa x-2$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-\kappa x-2=0$ (1) , τότε:

i) να βρείτε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών της (1).

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1,ρ_2 , όπου $\rho_1=2x_1$ και $\rho_2=2x_2$.

185. (1315) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha\cdot\beta=4$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=5$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

186. (1316) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha+\beta=-1$ και

$\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

187. (1334) Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε: $\alpha+\beta=12$ και $\alpha^2+\beta^2=272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-64$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

188. (1337) Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B=\frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A\cdot B=\frac{1}{2}$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A,B .

189. (1348) Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.
β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
γ) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$.

190. (1359)**α)** Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$.
β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α)ερωτήματος.

191. (14577)Δίνεται η εξίσωση $x^2-x-2=0$ (1).
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .
β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).
γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=\frac{x^2-x-2}{x^2+x}$, $x\neq 0$, $x\neq -1$.

4ο Θέμα

192. (1407) Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$t_A<t_B$, $t_\Gamma=\frac{t_A+2t_B}{3}$ και $|t_A-t_\Delta|=|t_B-t_\Delta|$.

α) i) Να δείξετε ότι $t_\Delta=\frac{t_A+t_B}{2}$.
ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A+t_B=6$ και $t_A\cdot t_B=8$.
i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B .
ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

193. (1431) Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.
β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):
i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.
ii) Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .
γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:
i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$.
ii) να βρείτε το λ.

194. (1439) Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - \left(\lambda^2+1\right)x + \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

195. (1451)Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - \left(\lambda^2+5\right) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.

196. (1452)**α)** Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1) .

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

197. (1456) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \left(\lambda - \lambda^2\right) = 0$ (1) , με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \dfrac{1}{d(x_1, x_2)}$.

198. (1460)Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1). Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

199. (1463) Δίνεται η εξίσωση: $\alpha\beta x^2 - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)^2$.

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β.

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \dfrac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι: $\left(1 + x_1\right)\left(1 + x_2\right) \geq 4$.

200. (1469) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + \left(2\lambda - 1\right)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

201. (1475) Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x + \lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

202. (1478) **α)** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\ cm^2$.

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

203. (1491)Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
$\left(x_1 + x_2\right)^2 - 18 - 7\left(x_1 x_2\right)^{24} = 0$.

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$

204. (1493) Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0$ με $\lambda \in (0,2)$.

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$.

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

205. (1508)Δίνονται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$,τότε :

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 την τιμή του λ.

206. (1509) Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|p_1 - p_2| = 2$.

207. (12912)**α)** Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$ και $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

208. (14490) Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i) Το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii) να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

Οι ανισώσεις $\alpha x+\beta>0$ και $\alpha x+\beta<0$

Είναι: $\alpha x+\beta>0 \Leftrightarrow \alpha x>-\beta$

- Αν $\alpha>0$, τότε: $\alpha x>-\beta \Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha}x}{\cancel{\alpha}}>-\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x>-\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha<0$, τότε: $\alpha x>-\beta \Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha}x}{\cancel{\alpha}}<-\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x<-\frac{\beta}{\alpha}$.

Αν $\alpha=0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0\cdot x>-\beta$ και
- αν $\beta\geq 0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ
- αν $\beta<0$ είναι αδύνατη.

Ανισώσεις με απόλυτα

1. $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta,\ \theta>0$ **2.** $|x|>\theta \Leftrightarrow x<-\theta$ **ή** $x>\theta,\ \theta>0$

209. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η τιμή της παράστασης
$A=(x-3)^2-(x-1)(x+1)$, βρίσκεται στο διάστημα $[4,16]$.

210. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
α) $(\lambda-1)x>0$ **β)** $\lambda x\geq 3x$ **γ)** $\lambda x<2x$ **δ)** $2\lambda x\leq x$

Τράπεζα θεμάτων

2ο Θέμα

211. (1357) Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. **β)** Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

4ο Θέμα

212. (13312)Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha\cdot\beta=\lambda$, τότε:
i. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\leq 9$ **ii.** Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=9$ αν και μόνο αν α = β.
γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Ανισώσεις με απόλυτα

213. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
α) $|x-1|\leq 4$ **β)** $|x+1|>2$ **γ)** $|x-3|<-2$ **δ)** $|x|\geq -5$ **ε)** $|x-5|\leq 0$
στ) $|x-2|>0$ **ζ)** $\sqrt{x^2-8x+16}\leq 5$ **η)** $\sqrt{x^2+10x+25}\geq 3$

214. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $\frac{2|2x-1|+11}{4}-\frac{4-|2x-1|}{2}>\frac{|1-2x|}{3}$ **β)** $\frac{|x-2|+1}{2}-\frac{3-|x-2|}{3}>\frac{1}{3}$

215. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $\left||x-2|-3\right|<1$ **β)** $\left||x-1|-2\right|\ge 3$ **γ)** $\left||x|-3\right|\le 1$

δ) $\left|5-|x-1|\right|\ge 3$ **ε)** $\left||x+2|-3\right|<4$ **στ)** $\left||3-2x|-1\right|>4$

216. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $1\le |x|\le 4$ **β)** $2<|x-3|\le 5$ **γ)** $1\le |x-3|<6$ **δ)** $2\le |1-3x|\le 9$

217. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|3x-6|=3x-6$ **β)** $|2-x|=x-2$ **γ)** $|4-x|=4-x$ **δ)** $|x-5|=5-x$

218. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\left||x-2|-3\right|=|x-2|-3$ **β)** $\left||x+1|-5\right|=5-|x+1|$ **γ)** $\left|5-|2x-3|\right|=5-|2x-3|$

219. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|x|\ge x$ **β)** $|x|>x$ **γ)** $|x|\le x$ **δ)** $|x|<x$ **ε)** $|x|\ge -x$

στ) $|x|>-x$ **ζ)** $|x|\le -x$ **η)** $|x|<-x$

220. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|x-2|>|x+6|$ **β)** $|x+4|\le |x-4|$ **γ)** $|3x-1|<3d(x,2)$

Τράπεζα θεμάτων

2ο Θέμα

221. (1243) **α)** Να λύσετε την ανίσωση $|x-1|\ge 5$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

222. (1284)**α)** Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\ge 3$.

β) Αν $\alpha\ge -1$, να γράψετε την παράσταση $A=\left||\alpha+4|-3\right|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

223. (1330) **α)** Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: i) $|2x-3|\le 5$ ii) $|2x-3|\ge 1$

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

224. (1331) **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2-x-6=0\,(1)$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

225. (1355) **α)** Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

226. (1365)**α)** Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$.

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

227. (1367)**α)** Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4|=3|x-1|$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5|>1$.

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

228. (1374) **α)** Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ **ii)** $|1-2x|\geq 1$

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

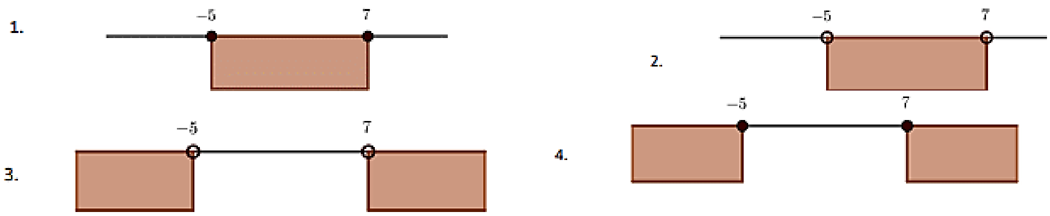
229. (12909)Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3|<5$.

α) Να δείξετε ότι $x\in(-2,8)$.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$.

γ) Αν Α το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και Β το σύνολο με $B=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A\cup B$ και $A\cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

230. (14295)**α)** Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1|\geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

231. (13025)**α)** Να λύσετε την ανίσωση $-\dfrac{3-2x}{7} \geq 5$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

232. (14319)Δίνεται η ανίσωση $|2x-5|<3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου: $A=(\alpha-1)(\alpha-5)$.

4ο Θέμα

233. (1406)Δίνεται το τριώνυμο $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(\alpha-1)^2-16$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$

234. (1416)Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$.

β) Έστω $\lambda\neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

ii) Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\dfrac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$.

235. (1473)**α)** Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

236. (1521)**α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι

μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.
ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19.

237. (13474)Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1| \le \sqrt{3}\ (1)$ και $3 - \dfrac{x+4}{2} < 0\ (2)$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).
β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).
γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).
δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\dfrac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

238. (14650) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \le 3\ \ (1)$.
β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.
γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \le 3$.
δ) Να βρείτε τους ακέραιους x που ικανοποιούν την ανίσωση $\big||x|-1\big| \le 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Ανισώσεις 2ου βαθμού

Παραγοντοποίηση και Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Αν $\Delta > 0$, τότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο	o	ετερόσημο	o	ομόσημο	

Αν $\Delta = 0$, τότε: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	o	ομόσημο του α

Αν $\Delta < 0$, τότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Τράπεζα θεμάτων

2ο Θέμα

239. (1250) Δίνεται η παράσταση: $K = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.
β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

240. (1273) Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2$.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

241. (14474)Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.
α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.
β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Δευτεροβάθμιες ανισώσεις

242. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
α) $3x^2 + 7x + 2 > 0$ **β)** $-3x^2 + 7x - 4 > 0$ **γ)** $x^2 + x - 2 \le 0$ **δ)** $-x^2 + 5x - 6 \ge 0$
ε) $x^2 + x \le 2$ **στ)** $2x^2 + 40 \ge 18x$ **ζ)** $x^2 + 16 > 8x$
243.
244. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
α) $3x^2 \ge 12x$ **β)** $x^2 \le 2x$ **γ)** $3x^2 - 12 \ge 0$ δ) $9 - x^2 < 0$ ε) $-4x^2 + 1 > 0$

245. Αφού λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x - 4 < 0$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:
$A = (-36{,}879)^2 + 3 \cdot (-36{,}879) - 4$ $B = 36{,}879^2 + 3 \cdot 36{,}879 - 4$
$\Gamma = (-0{,}9898)^2 + 3 \cdot (-0{,}9898) - 4$ $\Delta = (0{,}9898)^2 + 3 \cdot 0{,}9898 - 4$

246. Αφού βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 6x + 8$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:
$A = \left(\sqrt[7]{3}\right)^2 - 6 \cdot \sqrt[7]{3} + 8$ $B = \pi^2 - 6\pi + 8$ $\Gamma = (-983)^2 + 6 \cdot 983 + 8$

247. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\left|x^2 - 6x - 7\right| = x^2 - 6x - 7$ **β)** $\left|x^2 - 2x - 3\right| = 2x + 3 - x^2$

248. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $|2x - 3| > |x + 2|$ **β)** $|x - 1| \le |3x - 2|$ **γ)** $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$
δ) $x^4 - 10x^2 + 9 \le 0$ **ε)** $x^2 - 7|x| + 8 < 0$ **στ)** $x^2 - 4|x| + 3 > 0$

249. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda + 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:
α) έχει ρίζες άνισες **β)** έχει ρίζες ίσες **γ)** είναι αδύνατη

250. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες:
α) $(\lambda + 5)x^2 - 2(1-\lambda)x + 1 = 0$, $\lambda \neq -5$ **β)** $(1-\lambda)x^2 - 3(\lambda - 1)x + 6 = \lambda$

251. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$:
α) $x^2 + 6\lambda x + 9\lambda^2 + 4 > 0$ **β)** $x^2 - 5\lambda x + 6\lambda^2 + 1 > 0$ **γ)** $-x^2 + 3\lambda x - 3\lambda^2 - \lambda - 5 < 0$

252. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω παραστάσεις διατηρούν σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$:
α) $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 1 > 0$ **β)** $4x^2 + 4(\lambda + 2)x + 8\lambda + 1 > 0$

Τράπεζα θεμάτων

2ο Θέμα

253. (1271) Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0 \ (1)$ και $x^2 - 16 \leq 0 \ (2)$.
α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).
β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

254. (1277) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$.
β) Δίνεται η παράσταση: $A = |x-3| + |x^2 - 10x + 21|$.
i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $A = -x^2 + 11x - 24$.
ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει A=6.

255. (1279) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$.
β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

256. (1291) **α)** Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.
β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
γ) Να τοποθετήσετε το $-\dfrac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\dfrac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

257. (1300)**α)** Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.
β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$.

258. (1306) Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=3x^2+9x-12,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α).
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

259. (1350) **α)** Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5|\le 3$ και $2x^2-x-1\ge 0$.

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

260. (1356) Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

β) Να βρείτε τις τιμές του x ∈ℝ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2-3x+1<0$.

261. (1363) **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\le 0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

262. (12722).Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-x-3$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$. **β)** Να επιλύσετε την ανίσωση $-2f(x)<0$.

263. (12976).**α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-x-1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x)\le -1$.

264. (13321)**α)** Να λύσετε την εξίσωση $x^4-16=0$. (1)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+3x\le 0$. (2)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

265. (14189) **α)** Αν $x^2-3x-4<0$, να δείξετε ότι $-1<x<4$.

β) Δίνεται η παράσταση $A=|2x+2|+|x-5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A=x+7$.

266. (14652)**α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2>x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha>1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:
$0,\ 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha,\ \alpha^2,\frac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

4ο Θέμα

267. (1391)Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x \ + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες.

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \neq 0$, ώστε : $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x \ + \lambda \leq 0$.

268. (1396)Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0 \ \ (1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

δ) Αν $\left|\lambda^2 - 4\lambda - 5\right| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$,να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

269. (1397) Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x \ + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου , να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$, συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου ,τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(k) \cdot f(\mu)$ όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε : $x_1 < k < x_2 < \mu$.

270. (1402) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0 \ \ (1)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d\left(x_1, x_2\right)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $d\left(x_1, x_2\right) = \sqrt{24}$.

271. (1409) Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m;

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

272. (1425) Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

273. (1426) Δίνονται οι ανισώσεις : $|x+1| \le 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$.

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$.

274. (1432) **α)** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{1}{4}x^2 + (2-\lambda)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο λ .

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

275. (1436) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

276. (1450)Δίνεται η εξίσωση: $(x-2)^2 = \lambda(4x-3)$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \ne 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης ,στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ δηλαδή σταθερή.

277. (1455)Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

278. (1458) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$.

279. (1461)Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες $x_1,\ x_2$ της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

280. (1462) Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,\ 2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$ **ii)** να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$.

281. (1465) Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

282. (1480)Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2).
α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).
β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).
γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή.

283. (1481) Δίνεται το τριώνυμο: $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$.
α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.
β) i) Αν $\beta\neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;
ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν β= 0 .
γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

284. (1483) Δίνεται το τριώνυμο: x^2-2x-8.
α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x
β) Αν $k=-\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2-2\kappa-8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Αν ισχύει $-4<\mu<4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2-2|\mu|-8$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

285. (1486) Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-3$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα δ του τριωνύμου.
β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
γ) Αν $3<\lambda<12$,τότε :
i) να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες..
ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του τριωνύμου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας .

286. (1487) **α) i)** Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2+9x+18$.
ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+3|+|x^2+9x+18|=0$.
β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2+9x+18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.
ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2+9x+18|=-x^2-9x-18$.

287. (1494) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\dfrac{46}{47}\right)^2+5\dfrac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

288. (1500) Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S=x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-6|x|+\lambda=7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda=3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

289. (1513) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του x.

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)$.

γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού: $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

290. (1517) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+1\geq\dfrac{5}{2}x$ (1)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ. **ii)** Να δείξετε ότι: $|\kappa-\lambda|\geq\dfrac{3}{2}$.

291. (1518) Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha-2|<1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α.

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2-(\alpha-2)x+\dfrac{1}{4}$.

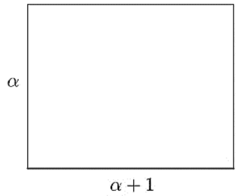
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $x^2-(\alpha-2)x+\dfrac{1}{4}>0$.

292. (1520) **α)** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+x-6<0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και α + 1όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|a-\frac{1}{2}\right|>1$.Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E<6$, τότε:



i) Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

293. (13176)Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<2$ και $x^2-3x+2\geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,1]\cup[2,3)$.

γ) i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1,\rho_2\in(-1,1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1\in(-1,1]$ και $\rho_2\in[2,3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

294. (13174) Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $B=\frac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;

β) Να δείξετε ότι $A=3-|x|$ και $B=|x|-2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B-A<2d(x,4)-5$.

295. (14615)Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Να λύσετε την εξίσωση.

Έστω ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1<\rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1<k<\rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2-2\lambda k+\lambda^2-1$.

296. (14653)Δίνεται η ανίσωση: $|x-1|\leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1) .

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιο του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

297. (14654)***α***) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}$.Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0$.

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι.

ii. Να δείξετε ότι $\left|(\alpha-1)(\beta-2)\right|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

298. (14924) **α)** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-x-12 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

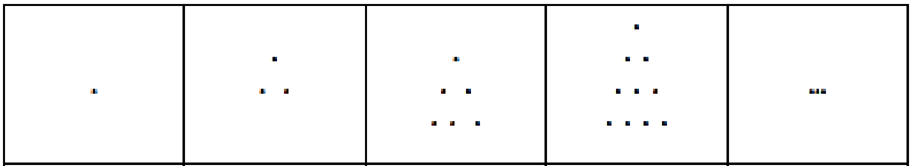
β) Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{\pi+9}{3}\right)^2-\left(\dfrac{\pi+9}{3}\right)-12>0$, όπου π = 3,1415… .

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $\left(|\alpha|+3\right)^2-\left(|\alpha|+3\right)-12<0$, να δείξετε ότι $\alpha\in(-1,1)$.

Πρόοδοι
Ακολουθίες Τράπεζα θεμάτων

4ο Θέμα

299. (13056)Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.



1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο

$$T_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2},\ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

α) Να βρείτε τον $10^{\text{ο}}$ τριγωνικό αριθμό.
β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.
γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Αριθμητική πρόοδος
Τράπεζα θεμάτων

300. (1240)Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0, \alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

301. (1245)**α)** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί : $x+2, (x+1)^2, 3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν
i) $x = 1$ ii) $x = -1$.

302. (1247) Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.
α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.
β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; **γ)** Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

303. (1249)Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

β) Να βρείτε τον α_{20} .

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

304. (1256) Οι αριθμοί $A = 1, B = x + 4, \Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (αν).

α) Να βρείτε τη τιμή του x.

β) Αν x=1 και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω.

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

305. (1266)Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0, (1)$ με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

306. (1325)Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 3.

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

307. (1326)Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

308. (1329) Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α1 της προόδου.

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

309. (1336)Οι αριθμοί $x + 6, 5x + 2, 11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S8 των 8 πρώτων όρων.

310. (1343)Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Δίνεται: $\sqrt{1849}=43$).

311. (1370) **α)** Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,\ldots\nu$.
β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

312. (14476)Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών:
1, 3, 5, 7, …
α) i) Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.
ii) Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

313. (14512)**α)** Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2=1$ και $x^2=9$.
β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος αύξουσα σειρά και στη συνέχεια:
i) να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε την διαφορά ω.
ii) να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

314. (14573)Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4-\alpha_2=10$.
α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=5$.
β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

315. (14574) Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8.
α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.
β) Αν είναι ω = 3, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35 .

316. (14597)Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα .
α)Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.
γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά;

317. (14656)Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται $\alpha_1=41$ και $\alpha_6=26$.
α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.
β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu=\nu$.

4ο Θέμα

318. (1387) Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων .Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. **γ)** Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

319. (1395)Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3 € και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β) Αν, για κάθε $\nu \le 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί α_1 , α_2 ,... , α_{51} είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε διαθέτοντας τα εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10021} = 101$)

320. (1399)Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) , όπου $\nu \in N^*$ που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι:

$\alpha_1 = x$,$\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$ όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $x = 3$.

β) Να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014 .

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$.

321. (1411)Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το νο όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

322. (1417)Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

323. (1430)Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

324. (1471)Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι α1=2, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι ω=7.

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

325. (1488) Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x+3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές.

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

326. (1502) Οι αριθμοί : $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.
β) Αν x = 3 και ο αριθμός x2 + 5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:
i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. **ii)** Τον πρώτο όρο της προόδου.
iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$.

327. (1503) Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8=23$.
α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι α1 = 2 και η διαφορά της ω = 3.
β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της.
γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ \ldots+\ (\alpha_{31}+31)$

328. (1507) Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3=10$ και $\alpha_{20}=61$.
α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.
β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.
γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$.

329. (12694). Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.
α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;
β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.
γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.
δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

330. (13171).Το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=S_\nu=2\nu^2+3\nu,\ \nu\in\mathbb{N}$ με $\nu\geq1$.
α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. **β)** Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1}=2\nu^2-\nu-1,\ \nu\geq2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1,\ \nu \geq 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

331. (13089)Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, ..., 7$.

332. (13173)Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$.

α) i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

333. (12764)Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω.

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

334. (12945)Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο $(\alpha_\nu),\ \nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο $(\beta_\nu),\ \nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι

μεγαλύτεροι του 56 .
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.
β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο
γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της ε(α_ν) ίναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

335. (14809)Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…
α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.
β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β.
γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

336. (14927)Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) .
α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1)
β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία
i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).
ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.
γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

337. (14758)Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.
α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;
β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;
δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^o αυτοκίνητο;

Γεωμετρική πρόοδος

338. (1242)**α)** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x,\ 2x+1,\ 5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$ ii) $x = -1$

339. (1257) **α)** Αν οι αριθμοί $4 - x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

β) Αν οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x,\ x,\ 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

340. (1265)Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0\ (1)$, με παράμετρο $\beta>0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=2\beta$ και $x_2=\dfrac{\beta}{2}$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

341. (1311)Οι αριθμοί $\kappa-2, 2\kappa$ και $7\kappa+4, \kappa\in\mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$.

342. (1321)α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. ii) τον πρώτο όρο α1 της προόδου.

343. (1339)Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι λ = 3.

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

344. (1360) Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι : $\alpha_\nu=2^{\nu-3}$.

345. (12787)**α)** Να λύσετε την εξίσωση $x^2-x-6=0$.

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa-2, \kappa, 2\kappa+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

$4^{ο}$ Θέμα

346. (1392)Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

β) Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ) Στο τέλος της 8ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

347. (1394)Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400 , ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες.

Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης $(\nu \le 5)$.

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν .

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

348. (1435)Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:
Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.
Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ,
το 2ο μήνα 110ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

iv) Να βρείτε το ποσό $B_ν$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

349. (1498)Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι Ε=1.

β) Αν α + β = 10 τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β .

ii) Να βρείτε τα μήκη α, β.

350. (1499)Δίνονται οι αριθμοί $2,\ x, 8$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2,\ x,\ 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ) Αν $(α_ν)$ είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, … και (βν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, … τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα Sν των ν πρώτων όρων της (αν).

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα Sν των ν πρώτων όρων της $(α_ν)$ να ισχύει: $2(S_ν + 24) = β_7$

351. (1519) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος $(α_ν)$ με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $α_3 = 4$, $α_5 = 16$ και $λ > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α1 και το λόγο λ της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $(β_ν)$, με $β_ν = \frac{1}{α_ν}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (αν).

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (αν) και (βν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

352. (12731)Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ $(κ \neq 0,\ λ \neq 0$ και $λ \neq 1)$. Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{κ}{λ}, κ, κ \cdot λ$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\kappa\cdot\lambda$, $(\kappa>0,\ \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2+10x+16=0$, να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa\cdot\lambda$.

353. (12998)Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν):
$\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

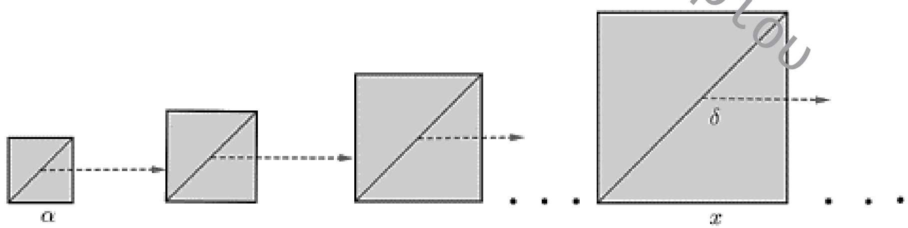
i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$.

β) Αν $\alpha_7=\frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $\alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda=\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_ν) είναι ίσο με $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}$.

354. (14645)Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta=\sqrt{2}\cdot x$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda=2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu=\alpha^2 2^{\nu-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ..

355. (14375)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\mu x-2, \mu\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x=-2$ και $x=3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, ενώ ο $x=1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ.

ii. Για $\mu=\frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

Η Έννοια της Συνάρτησης

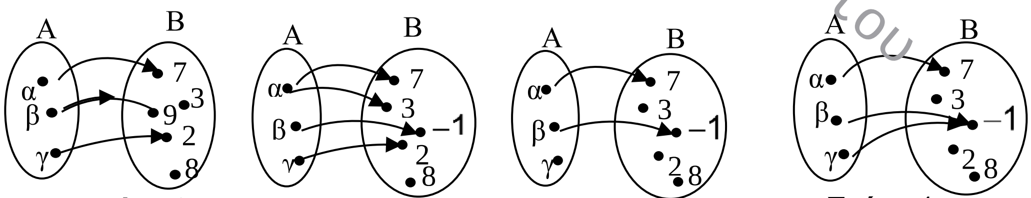
Ορισμός συνάρτησης

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

- Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές μιας συνάρτησης f για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με **f(A)**.
- Αν με μια συνάρτηση f το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y=f(x)$.

Το γράμμα x που παριστάνει οποιαδήποτε στοιχείο του Α λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

356. Ποιες από τις παρακάτω αντιστοιχίσεις είναι συναρτήσεις και ποιες δεν είναι; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών σε κάθε περίπτωση;



Σχήμα 1 **Σχήμα 2** **Σχήμα 3** **Σχήμα 4**

357. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^3-5x^2+2x-3$ **β)** $g(x)=\frac{x-2}{x-3}$ **γ)** $g(x)=\frac{x+2}{x-1}$ **δ)** $t(x)=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$

ε) $h(x)=2-\frac{x}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}$ **στ)** $h(x)=x^5-\frac{1}{x}+\frac{x^3}{x+3}$ **ζ)** $t(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4x+3}$

358. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{x-2}$ **β)** $g(x)=\sqrt{4-x}-3x\sqrt{x+2}$ **γ)** $h(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$

δ) $t(x)=\frac{\sqrt{|x|-2}}{x-3}$ **ε)** $\varphi(x)=\frac{\sqrt{|x|-x}}{|x|-2}$ **στ)** $\sigma(x)=\frac{3x-4}{|x|+x}-\sqrt{x^2+1}$

359. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ, για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) $f(x)=\dfrac{3x^2+x-4}{x^2-4x+2\lambda}$ **β)** $f(x)=\dfrac{x^3-8x}{x^2-4x-\lambda}$

360. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=5x$. Να δειχθεί ότι:

α) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ **β)** $f(3\alpha)=3f(\alpha)$

γ) $f(\alpha)f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=25$ **δ)** $f(|\alpha|)=|f(\alpha)|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Τράπεζα θεμάτων

361. (1244) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$. **β)** Να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=0$.

362. (1255) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$.

363. (1263)Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: y=35+0,8x

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

364. (1278)Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (˚C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση: Τ=15+25·x, όταν 0≤x≤200.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290˚C. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440˚C; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

365. (1283)Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}8-x, & \text{αν } x<0\\ 2x+5, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι : $f(-5)=f(4)$

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$.

366. (1295)Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f\left(x\right)=x^2+4x$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f\left(x\right)=32$.

367. (1297)Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}, x\neq 0$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=\dfrac{5}{2}$.

368. (1354) Δίνεται η συνάρτηση f, με $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει : $f\left(x\right)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

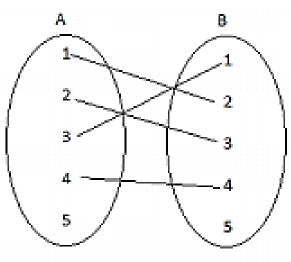
369. (1385) **α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6 .

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$

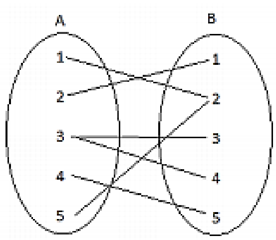
i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

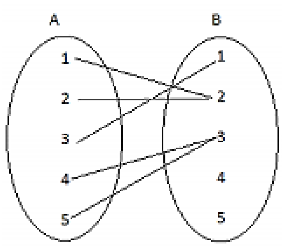
370. (12908). Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f.

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2).

371. (12997)Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου. Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου. Ορίζουμε την αντιστοίχιση

f : A→ B σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την g: B→ A με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση f : A→ B ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση g:B→A αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο Β στο σύνολο Α και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

372. (13031)Δίνεται η συνάρτηση G με $G(x)=\frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της G για $x=2,\ x=0,\ x=-\frac{1}{2}$

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3.

373. (13032)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x,\ g(x)=\sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g.

β) Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x)=g(4)$.

374. (13026)Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν x άρρητος} \\ 2x, & \text{αν x ρητός} \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f\left(\sqrt{2}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $\left[f(x)\right]^2=4x-1$.

375. (14681)Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ 2x+2, & x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(3)$ και $f(-3)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)=8$.

376. (14781)Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2,-1,0,\frac{1}{2},1$ και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση.
ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x\to y$.

377. (14728)Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$.
α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.
β) Για $x\geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq 2$.

4ο Θέμα

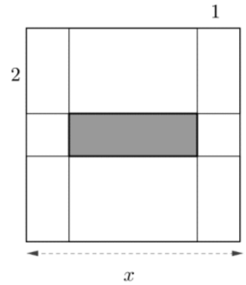
378. (1400) Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.
α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;
γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)
δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

379. (1418**)** Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1)cm.
α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.
β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:
i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.
ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

380. (1441)Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-4x+\alpha$ και $g(x)=\alpha x-5$,με $\alpha\in\mathbb{R}$.
α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.
β) Για $\alpha=1$,
i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$

381. (1420) Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).

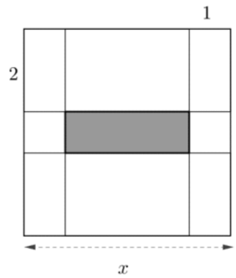


α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2.

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου ,αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2.

382. (1421) Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = x^2 - 6x + 8$.

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2.

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2 ,να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

383. (1437)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$.

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

384. (1457)Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

385. (1441)Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$,με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

386. (1467**)**Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

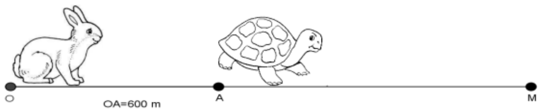
iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο: $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

387. (1484)Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με $OM > 600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με $OA = 600$ μέτρα.



Υποθέτουμε ότι, , η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t) = 10\,t^2$ μέτρα , ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t) = 600 + 40t$ μέτρα.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι ΟΜ=2250 μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα.

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12$min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση.

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.

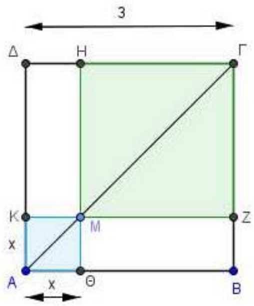
388. (1495) Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x+y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x), x\in(0,10)$

β) Να αποδείξετε ότι $E(x)\le\frac{25}{2}$ για κάθε x ∈ (0, 10) .

γ) Για ποια τιμή του $x\in(0,\ 10)$ το εμβαδόν E(x) γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

389. (1497)Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $AB=3$ και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος .

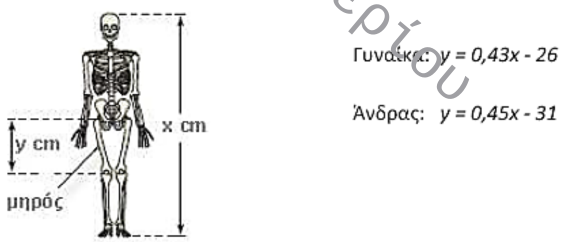


α) Να αποδείξετε ότι $E=2x^2-6x+9, x\in(0,3)$.

β) Να αποδείξετε ότι $E\ge\frac{9}{2}$ για κάθε $x\in(0,3)$.

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο ,δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

390. **(**1501**)** Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm . Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

391. (1506)Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40cm.$ Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι 0 < x < 20.

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:
$E(x) = 20x - x^2$.

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \le 100$, για κάθε $x \in (0,\ 20)$.

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm.

392. (1510) Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.).Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του
ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος Κ(ν) της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα Ε(ν) της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα.

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση
i) να μην έχει ζημιά.
ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

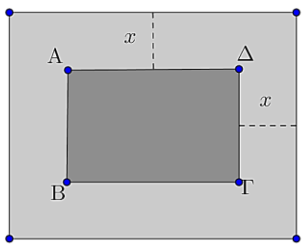
393. (13114)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$.

α) Να δείξτε ότι $f(x) = d(x,2) \ - d(x,1)$.

β) Αν τα σημεία Α και Β παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

394. (12911) Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m (x > 0), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$.

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\ m^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

395. 14629.Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\dfrac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του E(x) δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{4}{3}(x-25)$.

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50 . Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

396. (14702)Για της ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και 2x − 1, όπου $x>\frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

397. (14759)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2+6\alpha x+6\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha)+f(\beta)\geq\beta^2-36$.

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $f(\alpha)+f(\beta)=\beta^2-36$.

γ) Αν α = 2 και β = −6

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=6x$ **.**

ii. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{6}.$$

398. (14562) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f .

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{x}{x-2}$ για κάθε $x\in$ Α.

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία y = 1 έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

Γραφική παράσταση Συνάρτησης

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων λέγεται ένα ζεύγος κάθετων αξόνων x΄x και y΄y με κοινή αρχή O. Συμβολίζεται με **Oxy**.
Το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό λέγεται **καρτεσιανό επίπεδο**.
Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**. Ο οριζόντιος άξονας x΄x καλείται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x** και ο κατακόρυφος άξονας y΄y καλείται **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y**.
Σε κάθε σημείο M του καρτεσιανού επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζευγάρι (x,y) πραγματικών αριθμών που ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου M. Το σημείο συμβολίζεται με M(x,y). Το x λέγεται **τετμημένη** και το y **τεταγμένη** του σημείου M.

Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα μέρη καθένα που ονομάζονται **τεταρτημόρια** και διακρίνονται σε $1^{ο}$, $2^{ο}$, $3^{ο}$, $4^{ο}$.

Συμμετρίες

- Το σημείο $M_1(\alpha,-\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς τον άξονα x΄x**. Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.
- Το σημείο $M_2(-\alpha,\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς τον άξονα y΄y**. Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.
- Το σημείο $M_3(-\alpha,-\beta)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς την αρχή O των αξόνων**.
Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων έχουν αντίθετες συντεταγμένες.
- Το σημείο $M_4(\beta,\alpha)$ είναι το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha,\beta)$ **ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.**
Δηλαδή δύο σημεία συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων «αλλάζουν» τις συντεταγμένες τους.

Απόσταση δύο σημείων

Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, δίνεται από τον τύπο:

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

399. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ , ώστε τα σημεία $A(\kappa,4)$ και $B(2,3\lambda-2)$, να είναι:

α) Συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x **β)** Συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.
γ) Συμμετρικά ως προς την αρχή O των αξόνων.

400. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(2,5)$, $B(-1,4)$ και $\Gamma(0,1)$, ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x^2-4x+1$.

401. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x<0 \\ x^2-2x, & x\geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f:

$A(-3,10)$ $\quad B(2,0)$ $\quad \Gamma(-2,-7)$ $\quad \Delta(-5,-12)$ $\quad E(3,5)$

402. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-1$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής της παράστασης που έχουν:

α) τετμημένη: **i.** -2 **ii.** 3 **β)** τεταγμένη: **i.** 3 **ii.** 0

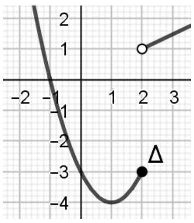
403. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες.

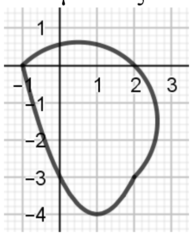
α) $f(x)=3x-6$ **β)** $f(x)=x^2-2x-8$ **γ)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x}$

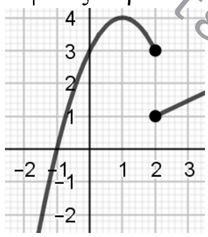
δ) $f(x)=\sqrt{x+2}$ **ε)** $f(x)=\sqrt{x^2-1}+x^4$ **στ)** $f(x)=|x-1|+2$

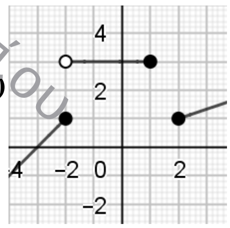
404. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & -2\leq x<\dfrac{1}{2} \\ x^2+1 & \dfrac{1}{2}\leq x<3 \end{cases}$ Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x΄x, y΄y.

405. Ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων;

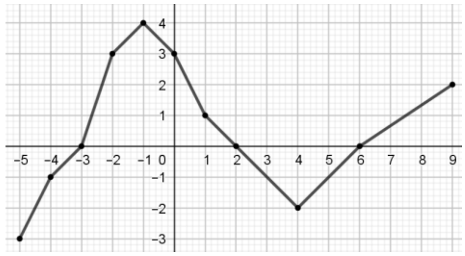
α) 

β) 

γ) 

δ) 

406. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

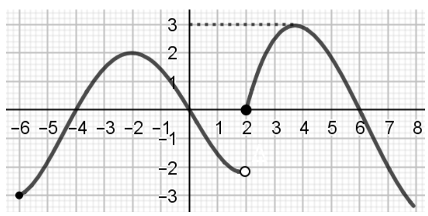
β) Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(1)$ και $f(f(4))$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-3$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>3$.

407. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:



α) Το πεδίο ορισμού της

β) Το σύνολο τιμών της.

γ) Τις τιμές $f(0), f(-2), f(2), f(4)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2$.

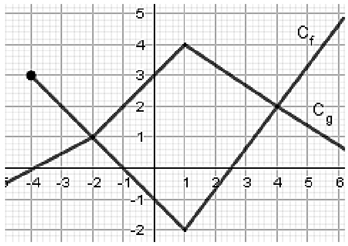
στ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>0$.

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \le f(x) \le 4$.

408. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>g(x)$.



Τράπεζα θεμάτων

409. (1259)Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

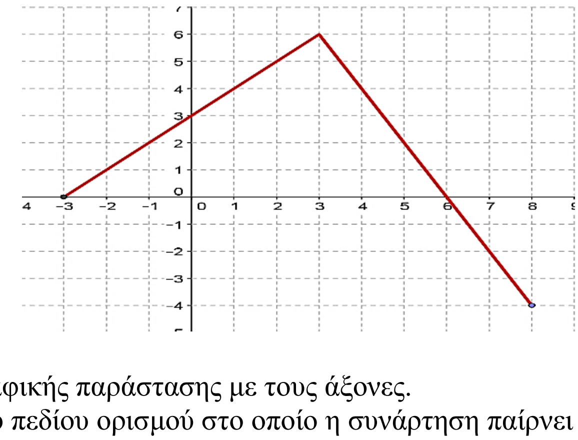
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \dfrac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

410. (1299)**α)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,\ 3)$.

411. (1305)Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

412. (1345)Δίνεται η συνάρτηση , με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

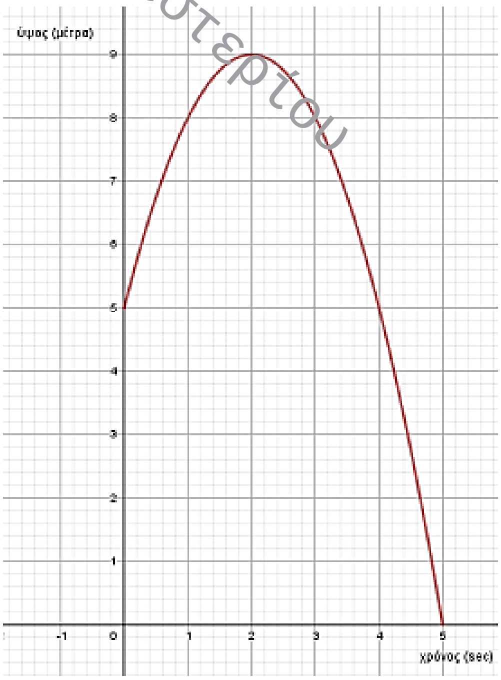
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

413. (1358)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

414. (12680) Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(4,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
γ) Να εξετάσετε αν το σημείο Ν(-1,-2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

415. (12686)Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x-1}$ **.**
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M\left(2,4\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες.

416. (12729) Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;
β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;
γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.
δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.

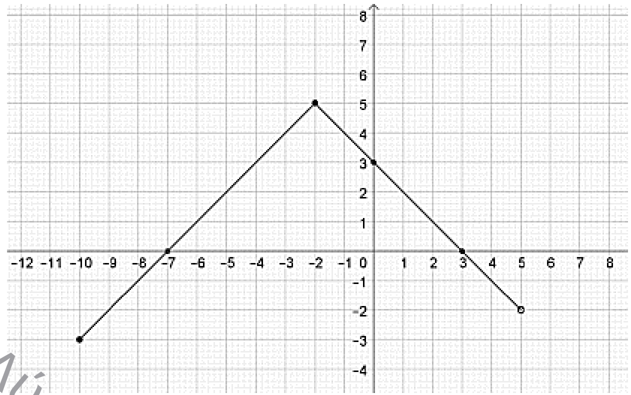
417. (13322)Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x}{x^2+2}+\sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για x=1, x = - 2, x = 2 .

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον y΄y άξονα;

418. (12910) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σύνολο τιμών της f(A).

β) Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(0), f(3).

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) = 0.

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) < 0.

419. (14072)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f .

β) Ανήκει το σημείο Μ(1, 3) στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y 'y .

420. (14306)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{5}+3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .

β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$.

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση;

421. (14596)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x\neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x)=x-3$ για κάθε $x\neq -1$.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$.

422. (14603) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\leq 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ και $f(5)$.

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y΄y.

423. (14628)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x},\ x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Α(4,3).

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4,-3)$ είναι σημείο της C_f.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία y = 3.

4ο θέμα

424. (1393)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i) Αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,h δεν έχουν κοινά σημεία.

425. (1408)Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και $x_1,\ x_2$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$

426. (1433)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1, 2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α.

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

427. (1454)Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\dfrac{\alpha}{4}}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

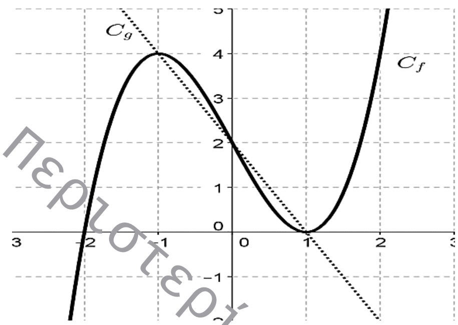
428. (1470)Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

429. (1490)Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:



α) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$.

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

γ) τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

δ) τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

430. (1485)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

431. (1523)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

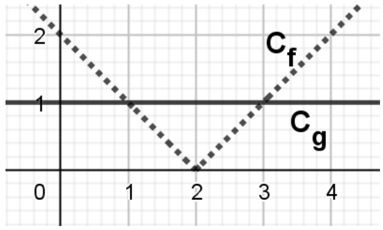
α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases}x-3, & x>2\\ -x+3, & x<2\end{cases}$.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 0$.

432. (1514)Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x-2|$ και $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$.

433. (1524)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4x^2 - 2(\alpha+3)x + 3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

434. (12788) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}\alpha \ne \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$.

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 4 .

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει f(α) = f(β) .
Να αποδείξετε ότι α + β = 2.

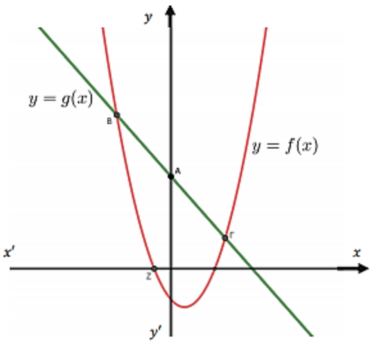
435. (12944)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ και $g(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $x \ne 0$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(2) + g(2) - f\left(\dfrac{1}{2}\right) - g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό $x \ne 0$.

γ) Θεωρούμε την ευθεία y = α, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \ge 2$.

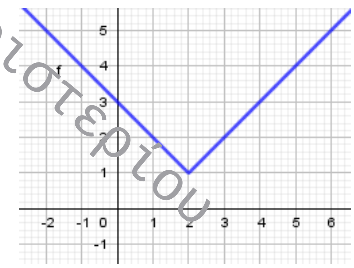
436. (12628)Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2-x-1$ και $g(x)=3-x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ.
β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g(x)$.
γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

437. (12788) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}\alpha\neq\beta$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3})=8$.
β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία y = 4 .
γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με ώστε να ισχύει f(α) = f(β) .
Να αποδείξετε ότι α + β = 2.

438. (12914) Έστω η ευθεία ε: y = c, με παράμετρο $c\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=|x-2|+1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο διπλανό σχήμα.



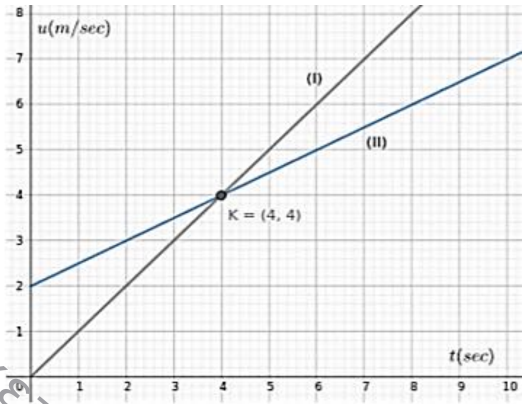
α) i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c\in\mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).
β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία Α, Β. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c,c)$ και $B(c+1,c)$.
γ) i. Αν Α, Β τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι $(AB)\leq 2$;
ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

439. (12941)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{9-x^2}{3-|x|}$.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .
β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x)=3+|x|$.
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.
δ) Αν $g(x)=3-x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

440. (12999)Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u = u_0 + \alpha \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και α η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec.



Οι παρακάτω ευθείες (Ι),(ΙΙ) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (Ι), (ΙΙ) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή t sec , $t \in [3,5]$.

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

441. (13027)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta,\ g(x) = x + \beta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξτε ότι β = − 1.

β) Για β = − 1

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες x΄x, y΄y.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

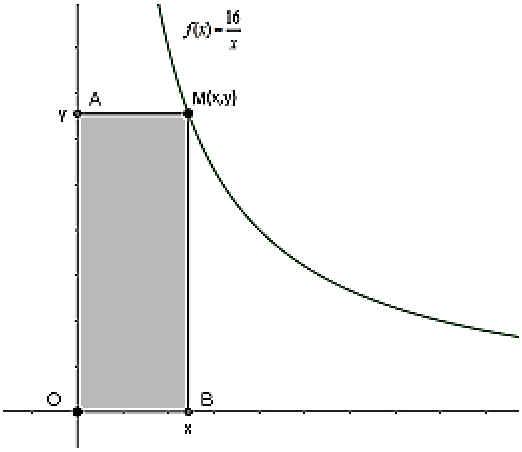
442. (13030)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$. Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

443. (13090)Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{16}{x},\ x>0$.Ένα σημείο Μ(x, y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες y΄y και x΄x αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση

$\Pi(x)=2x+\dfrac{32}{x},\ x>0$ όπου x η τετμημένη του Μ.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

γ) Αν Μ΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ΄ έχει τετμημένη 4.

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

444. (13120)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-(\lambda-1)x-4\lambda^2,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο σημεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για $\lambda\neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου Α(4,4) ως προς τον άξονα x΄x να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

δ) Για $\lambda=-1$ να βρείτε τις τιμές του *x* για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x .

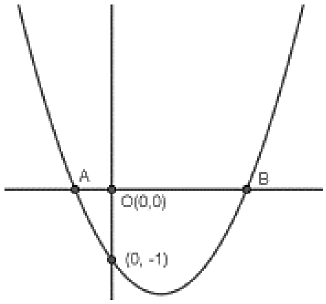
445. (13313) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^7-x}{x^3-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f.

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες x΄x και y΄y.**γ)** Να δείξετε ότι $f(x)=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in A$.

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο Α.

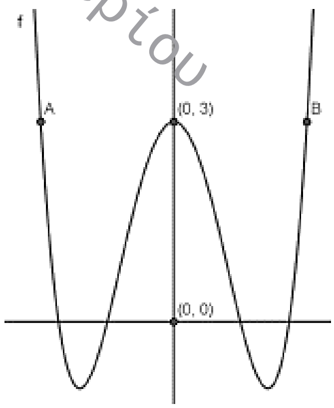
446. (13168)Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$
η οποία τέμνει τον άξονα y′y στο (0, −1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $\gamma = -1$
ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες
$A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$ και $B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$.
γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

447. (13479)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$. Αν $|x| \le 4$, τότε:
α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.
β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.
i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
ii. Αν το σημείο M(μ+ 1, −20) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ.

448. (13454)Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y.

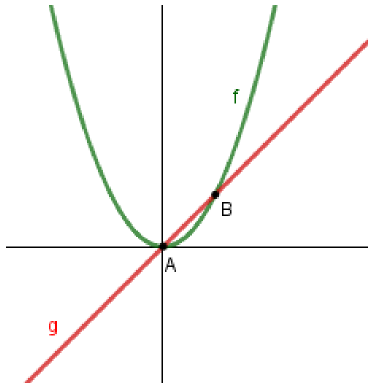


α) Να δείξετε ότι γ = 3.
β) Αν $A(\alpha^2 - 3, 3)$ και B(5 – 3α, 3) είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι α = 1 και να γράψετε τον τύπο της f.
γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x.
δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα x′x.

449. 13507.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = px^2 + (6 - p)x + \left(\frac{5}{2}p - 3\right)$, με παράμετρο $p \in \mathbb{R}$.
α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης για p = 0 και p = 2. Για ποια από αυτές τις τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία;

β) i. Για $p = 0$ και $p = 2$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα κοινό σημείο με τον x΄x άξονα, το οποίο και να βρείτε.
ii. Συμβαίνει το ίδιο (δηλαδή να έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο με τον x΄x άξονα) και για άλλες τιμές της παραμέτρου $p \in \mathbb{R}$;
γ) Για $p \neq 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του p η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα έχει δυο κοινά σημεία με τον x΄x άξονα.

450. (13557)Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B .
β) Αν A(0, 0), B(1,1) , τότε:
i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .
ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.
γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$,
να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$.

451. (14184)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.
γ) Αν είναι $f(x) = x + 2,\ x \neq -1$, τότε:
i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$.
ii. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

452. (14185)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.
δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία y = 1.

453. (14190)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη β > 0. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες x΄x, y΄y και έστω Α και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το Α ανήκει στον x΄x και το Δ στον y΄y .

Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΔ είναι $\left[\sqrt{2}(\beta+1)\right]^2$.

454. (14225)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{(x-2)(x^2 - 5x + 4)}{x - 1}$.

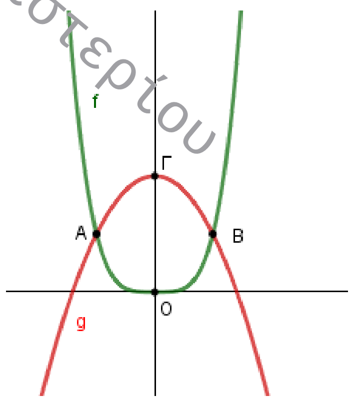
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8,\ x \in A$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία y = 3.

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f.

455. (14307)Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία ΑΒ, είναι τα σημεία τομής των γραφικών παρατάσεων των f g, ενώ Γ είναι τ0 σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα y΄y.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ.
Αν $A(-1,1), B(1,1), \Gamma(0,2)$

β) Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

456. (14320)Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \in [0,6] \\ 16\ , & x \in (6,9) \\ 25 - x, & x \in (9,12] \end{cases}$ και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και

στις 5 το απόγευμα.
β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:
i. Διατηρείται σταθερή.
ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

457. (14459)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ και η ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι αν $0<\alpha<1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $\left|xf(x)\right|\le\frac{1}{2}$.

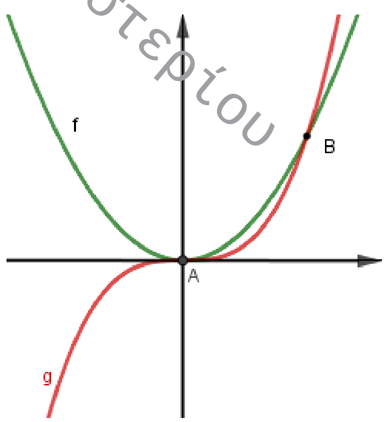
458. (14760)Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3\cdot(x^2-16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

β) Να δείξετε ότι $g(x)=\frac{x+4}{x+3}$ για κάθε *x* στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

459. (14665)Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία Α και Β.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.
β) Με βάση το σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $x^3<x^2$.
γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ) Για τον πραγματικό αριθμό π = 3,1415… να δείξετε ότι:
i. $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$ **ii.** $\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0$

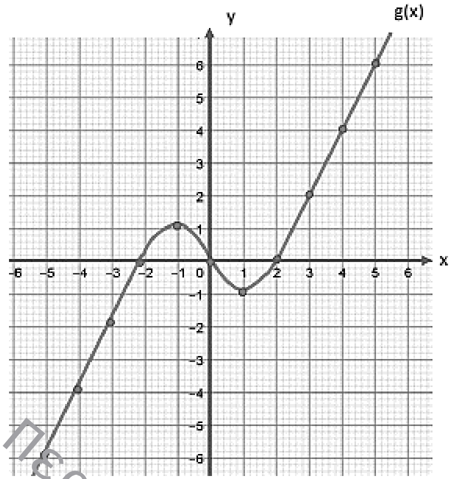
460. (14810)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-7x+\kappa$, $\kappa\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη y = 10.
α) Να αποδείξετε ότι κ = 10.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x .

γ) Έστω $A\left(\alpha, f(\alpha)\right)$ και $B\left(\beta, f(\beta)\right)$, $\alpha<\beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x .

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha<\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$.

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0=\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x.

461. (14745) δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g(x). Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.



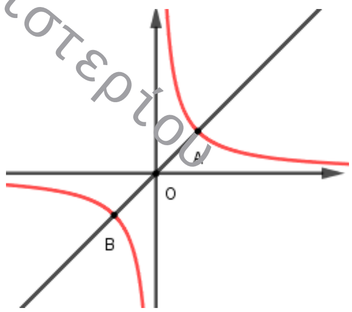
α) Να λύσετε την ανίσωση $-2\le g(x)\le 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)|\le 2$.

γ) i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x)=\dfrac{4}{5}$ και $g(x)=-1$.

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x)=k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k.

462. (14925)Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και η ευθεία ΑΒ με εξίσωση $y=x$.



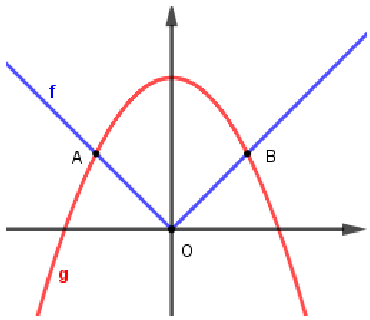
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Β και να δείξετε ότι το Ο είναι το μέσο του ΑΒ.

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι το συμμετρικό Μ ΄του Μ ως προς το Ο(0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB)\le(MM')$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB)=(MM')$.

463. (14926)Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$. Τα Α, Β είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g.



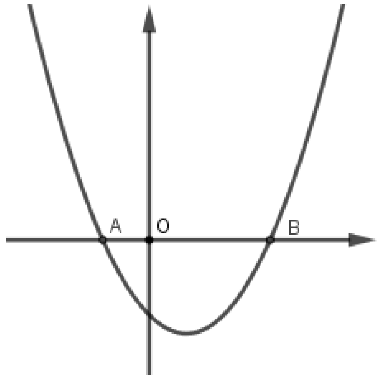
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β .

β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $f(x)<g(x)$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi.

464. (14961) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$. Αν Α(ω,0), Β(φ,0)



α) Να δείξετε ότι

i. $\omega + \varphi = 1$

ii. $\omega \cdot \varphi = -1$

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι β > φ.

δ) Να δείξετε ότι $\varphi < \frac{5}{3}$.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

Τράπεζα θεμάτων

465. (1241)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 6), Β(-1, 4), να βρείτε τις τιμές των α, β.

β) Αν α=1 και β=5, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y.

466. (1294) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

467. (1301) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξτε ότι Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

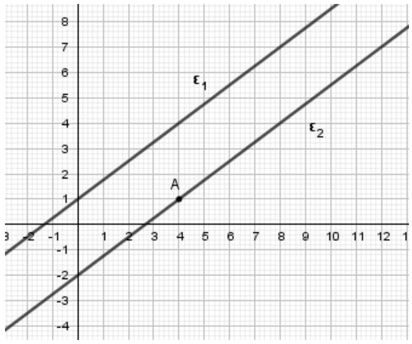
468. (12630) Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1,1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y' y$.

γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

469. (12631**)** Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α (4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2).

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2).

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.

470. (12684) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο Α (- 4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y' y$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x' x$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

471. (12730) Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x' x$ γωνία 45^o και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3).

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x' x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

472. (12856) Δίνεται ευθεία ε: y=αx+5.Αν η ευθεία δ : $y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ε), τότε:

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε.

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x' x$;

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x' x$ και $y' y$.

473. (12939)Έστω η ευθεία $\varepsilon_1 : y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y' y$ στο Α (0,- 6) και τον άξονα $x' x$ στο σημείο Β(-3, 0).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

474. (13033)Δίνεται η ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{2}x+4$.

α) i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x΄x άξονα;

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(6, 1), Β(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε).

γ) Να βρείτε την τιμή του $k\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο (k,5) να είναι σημείο της ευθείας (ε).

475. (13178)Δίνεται το σημείο Μ(3,4) .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και από το Ο(0,0).

β) Δίνεται το σημείο Ν (- 3, λ) με $\lambda\in\mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην ευθεία ΟΜ.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Αν Ν (- 3,- 4) να εξετάσετε αν τα σημεία Μ Ν, είναι συμμετρικά ως προς το Ο.

476. (13054)Δίνονται οι ευθείες ε_1 : $y=(3\alpha+4)x-4$ και ε_2: $y=(3-4\alpha)x+4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν α=1, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα xx′ .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

477. (13318)Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=-x+\sqrt{2},\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), \left[f(-\sqrt{2})\right]^2$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες x′x και y′y και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

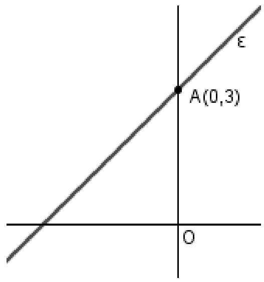
478. (13400)Δίνεται η ευθεία ε: y = −x + 2.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

479. (14641)Η διπλανή ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°.



α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.

β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x΄x .

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ=1$)

480. (12913)**α)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της παραπάνω συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x+3$ για κάθε $x\in A$.

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

481. (13471)Θεωρούμε τα σημεία $A(2,1), B(-1,-5), \Gamma(27,50)$ και την ευθεία ε: $y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία.
Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

482. (14575)Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

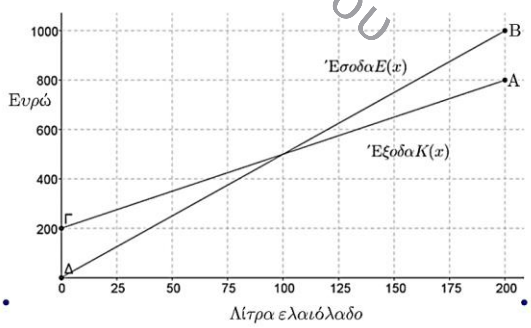
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.
γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

4ο θέμα

483. (1398)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = 4x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x΄x.
β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (−3, 0).
γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.
δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το Α(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Οx.

484. (1386) Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο διπλανό παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα Κ(x) και τα έσοδα Ε(x) από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.
β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;
γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;
δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων Κ(x) και Ε(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος (γ).

485. (1403) Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{9 - x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.
γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y ΄y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

486. (1410)Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.
α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.
β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.
i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.
ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i),στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.
γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

487. (1444) Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με
$f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2).
β) Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x και σε άλλο σημείο.
δ) Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

488. (1446) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα x΄x.
β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.
γ) Έστω Μ(x , y) σημείο της Cf. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

489. (1447)Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}-x+2, & \text{αν } x<0\\ x+2, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

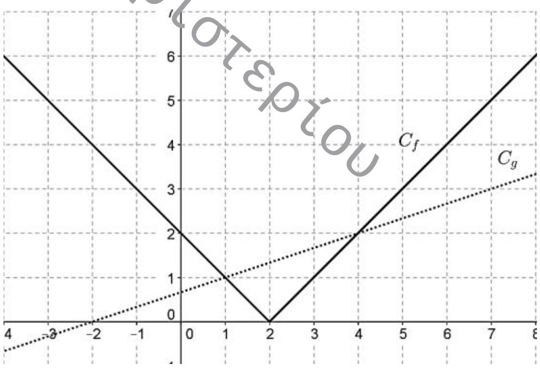
490. (1449) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

491. (1468) Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}, x\in\mathbb{R}$.



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g.

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση: $K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$.

492. (1479) Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο: $y=60+0,20x$,όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0{,}10x$ όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ) Αν $f(x) = 60 + 0{,}20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0{,}10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

493. (1496) Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία TAXI με το όνομα ‘RED’ χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Μια άλλη εταιρεία TAXI με το όνομα ‘YELLOW’ χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο TAXI και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α) i) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία ‘RED’ για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f (x) (ευρώ)			

ii) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία ‘YELLOW’ για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g (x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g και τους τύπους τους f(x) , g(x) .

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας ‘RED’ είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

δ) Αν δυο πελάτες Α και Β μετακινηθούν με την εταιρεία ‘RED’ και ο πελάτης Α διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον Β, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο Α σε σχέση με τον Β.

494. (12682)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g .

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

495. (12689) Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_1(t) = 150 + 50t$, $t \in [0,5]$.

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

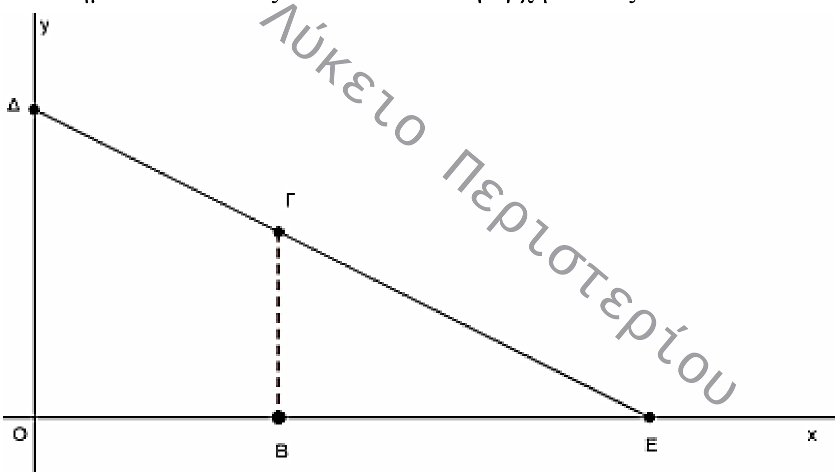
β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^o μέχρι το 10^o λεπτό της κίνησής του;

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

δ) i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

496. (12728) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον y΄y άξονα, Ε ένα σημείο του x΄x άξονα και Ο είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔΕ είναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

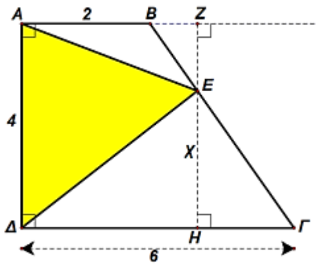
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Ε και Δ .

Ένα σημείο $Γ(t, y_Γ)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και Β ένα σημείο του x'x άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓ να είναι παράλληλη στον y΄y άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_Γ = 4 - \frac{1}{2}t$.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{2}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με 9, 75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .



497. (12834) Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \ldots + f\left(\frac{64}{16}\right)$.

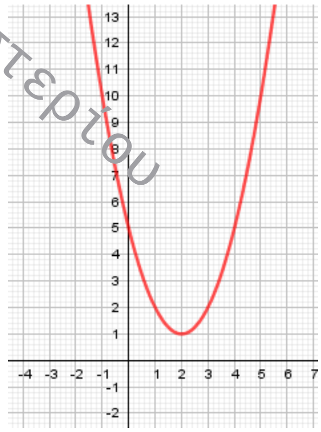
498. (12921)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|\kappa|x - 2$ και η ευθεία ε: $y = 2x - \kappa^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.

γ) Για κ = -3 να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).



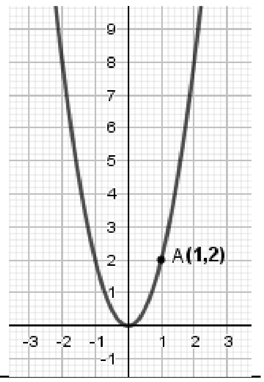
499. (13091)Στο διπλανό παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

β) i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.

γ) Έστω ότι μια ευθεία y = λ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2, με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.



500. (12942) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με παράμετρο α.

α) Αν το σημείο Α(1, 2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι α = 2.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο (1,6) και έχει κλίση λ = 2.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

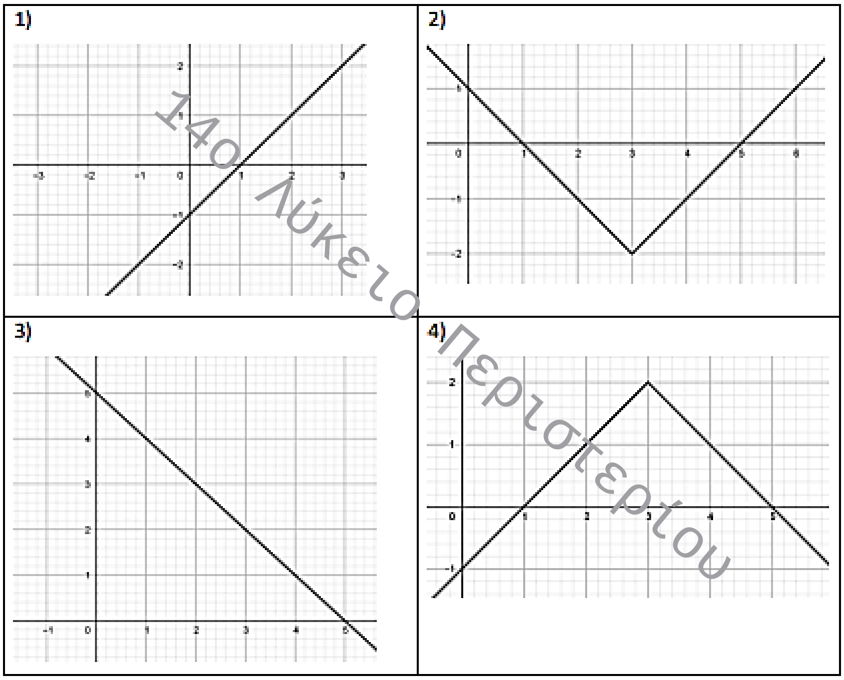
γ) i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x+4$.

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

501. (12681)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + 4 - (|6-2x| + 2)$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - |x-3|$.

β) Αφού δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 3 \\ 5-x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Η γραφική παράσταση της f είναι:



γ) i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y = -1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2 - |x-3| > -1$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

502. (13055)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5,\ x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3{,}52) - f(0{,}52) + f(3{,}48) - f(0{,}48)$.

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β, ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

503. (13367)Δίνεται η ευθεία ε: $y=(\omega^2-6\omega+8)x+2$, όπου $\omega\in\mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega\in\mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′.

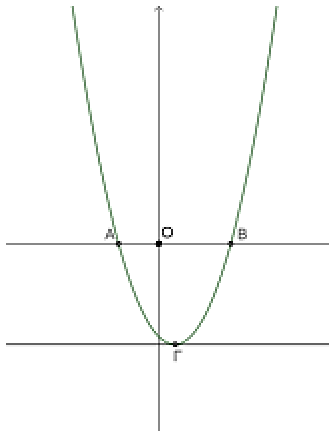
β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x′x είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ω = 3.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

504. (13314)Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-3$. Αν Α(α, 0), Β(β, 0), Γ(γ, δ) σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον x΄x έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



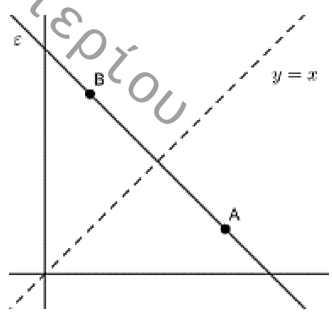
α) Να δείξετε ότι $\alpha=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2})<0$.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ.

505. (13298)Τα σημεία Α και Β είναι σημεία του 1ου τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο y = x της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου Α με τις συντεταγμένες το σημείου Β.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα Α κα Β έχει κλίση α = −1.

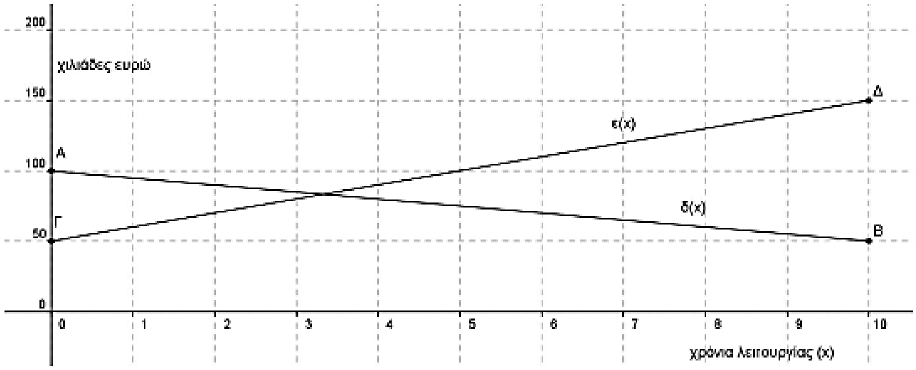
γ) Αν επιπλέον τα σημεία Α και Β έχουν συντεταγμένες $(4,\kappa^2-3\kappa+1)$ και $(\kappa-2,4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι κ = 3 και να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β.

ii. Για κ = 3, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

506. (14477) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία ΑΒ με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μίας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.
Η ευθεία ΓΔ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.

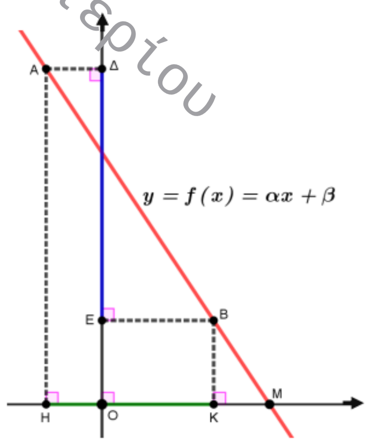


α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x), \varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

507. (14556)Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x), των οποίων οι προβολές στους άξονες x΄x, y΄y είναι τα σημεία Η,Δ και Κ,Ε αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΚ και ΔΕ έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\dfrac{3}{2}$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο Μ έχει τετμημένη 6, να αποδείξτε ότι $\beta = 9$.

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x).

Επαναληπτικά Διαγωνίσματα

1ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη

Σωστό ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν $\alpha\cdot\beta\geq 0$, τότε $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$.

β) Για κάθε πραγματικό αριθμό α, ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$.

γ) Υπάρχει συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(1,3).

δ) Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

ε) Για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α, β, ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$.

μονάδες 10

Α2. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

μονάδες 15

Θέμα Β

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$ και $\beta=\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=2$. μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{5}-\sqrt{\alpha}}-\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{5}+\sqrt{\alpha}}=\alpha$. μονάδες 6

Αν $\alpha<x<2\beta$, να αποδείξετε ότι :

Β3. $|x-\alpha|+|x-2\beta|=1$ **Β4.** $x^3-2\beta x^2<3\alpha x-6\alpha\beta$ μονάδες 7+6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

μονάδες 7

Γ2. Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι τετμημένες των σημείων που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x , να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1+x_2=x_1^2x_2^2+2$.

μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$. μονάδες 6

Γ4. Για $\lambda=3$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2-4$.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=(\lambda+2)x^2-2\lambda x+3\lambda$.

Δ1. Έστω $\lambda\neq-2$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $g(x)$ και να λύσετε την ανίσωση $\Delta<0$.

μονάδες 6

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση $h(x)=\sqrt{g(x)}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

μονάδες 6

Δ2. α) Να βρείτε την ακέραια λύση της εξίσωσης $\sqrt{\lambda^2+2\lambda+1}=|3\lambda+5|$

β) Για $\lambda=-2$ να λύσετε την ανίσωση : $|g(x)|>2$. μονάδες 3+3

Δ3 α) Να βρείτε την ακέραια λύση της εξίσωσης $(2\lambda+5)^4-27(2\lambda+5)=0$

β) Για $\lambda=-1$, να λύσετε την εξίσωση $|g(x)|=(\lambda+2)x^2-2\lambda x+3\lambda$.

μονάδες 3+4

2ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Η απόσταση δύο αριθμών α και β ισούται με α – β.

β. Αν $\alpha\geq 0$, τότε: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha$.

γ. Η εξίσωση $\alpha x^2+2x-\alpha=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Κάθε κατακόρυφη ευθεία μπορεί να έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δύο κοινά σημεία.

ε. Αν Α (α, β) είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x'x είναι το σημείο Δ (α,-β).

μονάδες 5x2

Α2. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$, έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1 , x_2 τότε το άθροισμα των ριζών $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και το γινόμενο τους $x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

α. $|x+3|$ β. $|x-5|$ μονάδες 5

Β2. Αν $-3<x<5$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=|x+3|+|x-5|$.

μονάδες 10

Β3. Να λυθεί η ανίσωση: $7\frac{|x-5|}{2}-2\frac{|2x-10|}{3}<26$ μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+1}$.

Γ1. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες. μονάδες 10

Γ2. Να δείξετε ότι $\left[f(7)-f(17)\right]\left[f(49)+f(71)-f(31)\right]=-14$ μονάδες 5

Γ3. Να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{4}{5-f(2)}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι $\sqrt{\left(2-f(4)\right)^2}+\sqrt{\left(3-f(4)\right)^2}=1$ μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-(\lambda+2)x+\lambda$.

Δ1. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον άξονα x’x. μονάδες 10

Δ2. Αν $\lambda\neq 2$ και x_1,x_2 ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $4x_1^2x_2+4x_1x_2^2+1=0$.

μονάδες 5

Δ3. Για λ=3, να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) είναι πάνω από τον άξονα x΄x . μονάδες 10

3ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\sqrt{x^2}=x$
2. Αν $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε α=0 ή β=0
3. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν Δ<0
4. Εάν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε το άθροισμα τους $x_1+x_2=\frac{\beta}{\alpha}$
5. Ισχύει: $|x|<\theta\Leftrightarrow-\theta<x<\theta$ για κάθε $\theta>0$.

Μονάδες 2x5 = 10

Α2. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

1. Να γράψετε τι εκφράζουν γεωμετρικά οι παραστάσεις $|x|$ και $|x-3|$.

Μονάδες 6

2. Να λυθεί η εξίσωση: $|x|-\dfrac{4|-x|-8}{3}=\dfrac{|6x|}{2}$.

Μονάδες 9

3 Αν $B=|2x-6|+|x-3|-5$ να λυθεί η ανίσωση: $1<B<4$ και να γραφεί η λύση της υπό μορφή διαστήματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+(\lambda+3)x+\dfrac{5\lambda+7}{2}$

1. Να γράψετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης f(x) = 0

Μονάδες 10

2. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση f(x) = 0 έχει διπλή ρίζα

Μονάδες 5

3. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση f(x) = 0 έχει δύο πραγματικές άνισες ρίζες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{2x^2-8\lambda x+15\lambda}{3x-9}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α (2, -2).

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

2. Να δείξετε ότι λ = 2

Μονάδες 5

Για λ=2

3. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες 5

4. Αν $g(x)=\dfrac{1}{3}x^2-x-\dfrac{4}{3}$ να βρεθεί για ποια x η γραφική παράσταση της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 10

Γεωμετρία

3ο Κεφάλαιο: Τρίγωνα

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

2ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3ο κριτήριο: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:
- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

Ισοσκελές τρίγωνο

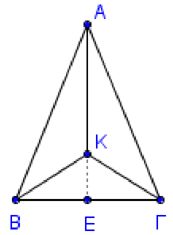
Ένα τρίγωνο λέγεται ισοσκελές όταν έχει δύο πλευρές του ίσες.
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύουν τα εξής:
- Οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του είναι ίσες.
- Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου.

1565. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και Α΄Β΄Γ΄ $(Α'Β' = Α'Γ')$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $ΑΒ = Α'Β'$ και $Α = Α'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $ΑΓ = Α'Γ'$ και $Β = Β'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

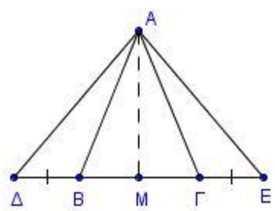
1591. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $ΚΒ = ΚΓ$.
α) Να αποδείξετε ότι: τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.
γ) Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ.



1592. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $ΒΔ = ΓΕ$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $Β_{εξ} = Γ_{εξ}$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.



γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ.

1598. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.
β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:

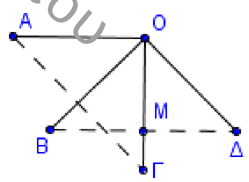
i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα. **ii.** $ΖΔ = \frac{ΕΔ}{2}$.

1601. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $ΜΒ = ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα.
β) Η ΑΜ είναι διχοτομεί τη γωνία ΒΜΓ.

1621. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. **γ)** το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

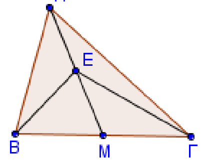
1627. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΑ = ΜΒ$ **β)** Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

1632. Αν $ΑΟΒ = ΒΟΓ = ΓΟΔ$ και $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΓ = ΒΔ$
β) το Μ είναι μέσο του ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.



1648. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $ΒΕ = ΓΔ$ **β)** $ΒΔ = ΓΕ$ **γ)** $ΔΒΓ = ΕΓΒ$

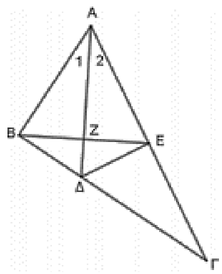
1660. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ.
Αν $ΒΓ = 2ΒΕ$, να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΕΒ = ΕΜΓ$ **β)** $ΑΒ = ΕΓ$.



12635. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ=ΓΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.

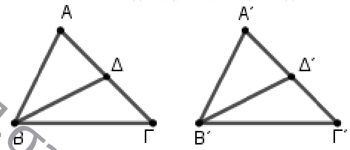
12636. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.
γ) Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

12705. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ = 2ΑΒ. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



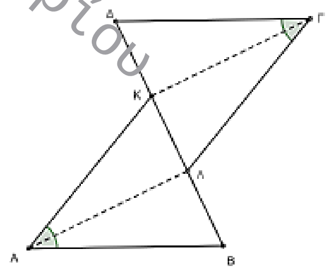
α) $ΑΒ = ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2}$.
β) ΔΒ = ΔΕ.
γ) $ΑΖ \perp ΒΕ$

13518. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος με ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΑΒ = Α΄Β΄. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β΄Δ΄ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{Α} = \hat{Α}'$
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

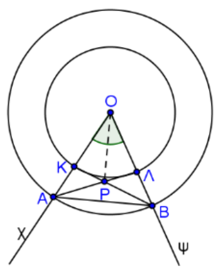
13826. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ= ΓΛ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν ΒΚ = ΔΛ.
β) Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:
  i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΛΚ και ΚΔ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
  ii. Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.

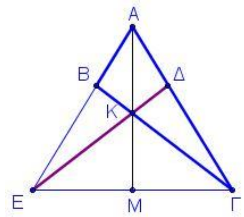
4ο Θέμα

1725. Δίνεται οξεία γωνία xΟψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι $(Ο,ρ_1)$ και $(Ο,ρ_2)$ με $ρ_1 < ρ_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ,Α και την Οψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



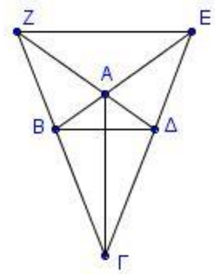
α) ΑΛ = ΒΚ
β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ,ΒΚ.
γ) Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία xΟψ.

1846. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta=AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:



α) $B\Gamma=\Delta E$
β) $BK=K\Delta$
γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.
δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

14880. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AB=A\Delta$ και $\Gamma B=\Gamma\Delta$. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:



α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.
β) $\Gamma Z=\Gamma E$
γ) $EZ\parallel B\Delta$.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

1532. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $EH\perp B\Gamma$ και $\Delta Z\perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. **β)** $EH=\Delta Z$

1545. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. **β)** $A\Delta=AE$

1546. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:
α) $MK=M\Lambda$ **β)** Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ.

1547. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$. Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $M\Delta=ME$ **β)** το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

1568. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.

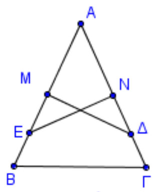
1569. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ.

1571. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^{\circ}\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β. Από το Δ φέρουμε $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{B}\Gamma$ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{AB}=\mathrm{BE}$ **β)** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα.

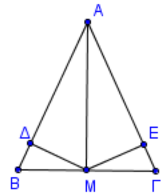
1656. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Αν $\mathrm{M}\Delta=\mathrm{NE}$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

β) Αν $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$ τότε $\mathrm{M}\Delta=\mathrm{NE}$.

1657. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

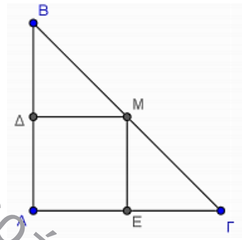


Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\mathrm{M}\Delta=\mathrm{ME}$, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα.

β) Αν $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$ και Μ το μέσο του ΒΓ, τότε $\mathrm{M}\Delta=\mathrm{ME}$.

1658. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



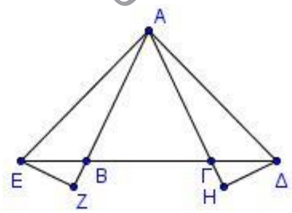
α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:

  i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.

  ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

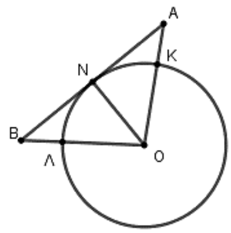
β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ.

1659. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $\Gamma\Delta=\mathrm{BE}$. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{AE}$ **β)** $\mathrm{EZ}=\Delta\mathrm{H}$

1676. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



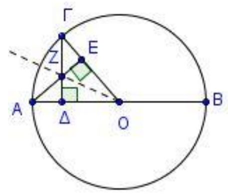
α) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές.

β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.

1677. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές.

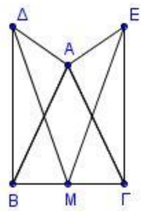
β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.



1698. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(ΑΒ = ΑΓ\right)$. Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ τα τμήματα $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ τέτοια, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα,

β) $ΑΔ = ΑΕ$.

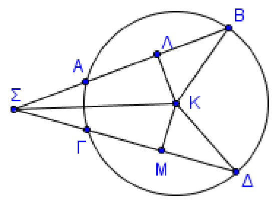


2816. Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει ότι $ΣΒ = ΣΔ$. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα. **ii.** $ΚΛ = ΚΜ$

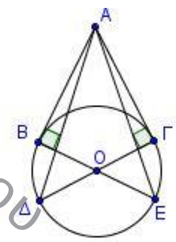
β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες.



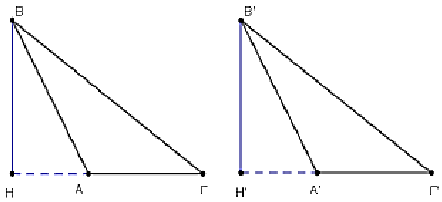
1684. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.



12149. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ και Α΄Β΄Γ΄ $\left(Α' = 90^\circ\right)$ με $γ = γ'$ και $β = β'$. Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:



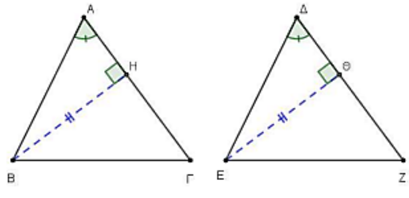
α) $ΒΑΗ = Β'Α'Η'$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

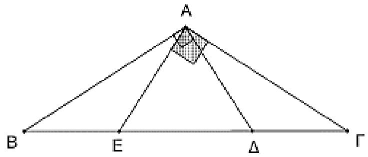
13517. Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $Α = Δ$, $ΑΒΓ = ΔΕΖ$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΔΕ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα .

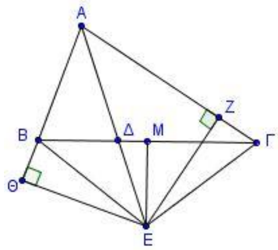


13533.Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε.
Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
γ) ΒΕ = ΓΔ.



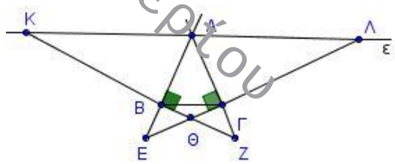
4ο Θέμα

1707. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα.
γ) $A\Gamma E + ABE = 180^{\circ}$.



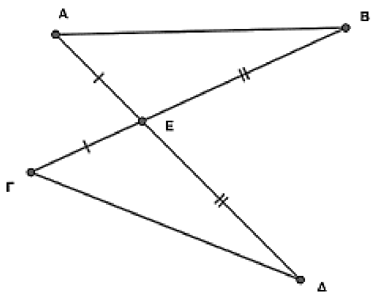
1724. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:
Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.
α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει.
γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στη πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στη πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $AZ = AE$ **ii.** $AK = A\Lambda$
β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ,ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

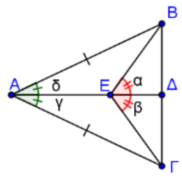
13839.Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΓΕ και ΒΕ=ΕΔ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες.
γ) Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.



Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

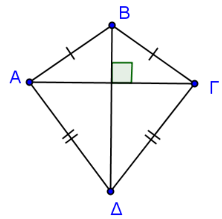
Κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
Μεσοκάθετος τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
Διχοτόμος γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

1587. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ του σχήματος ισχύουν $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:



α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.
β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.
γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

1624. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:



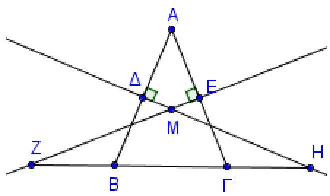
α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

1558. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. **β)** Οι γωνίες $A\hat{I}B$ και $A\hat{I}\Gamma$ είναι ίσες.
γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

1574. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.
β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.

1578. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

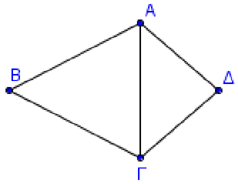


α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.

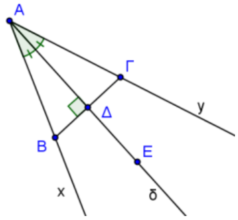
1585. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με και $A=\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $B A \Gamma = B \Gamma A$

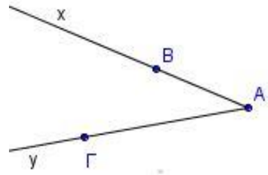
β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.



1670. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ. Να αποδείξετε ότι:
α) $AB = A\Gamma$
β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ.

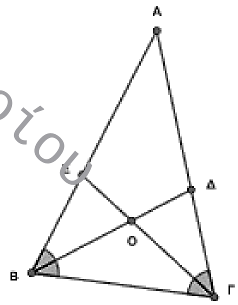


1688. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:
α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. **β)** ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



4ο Θέμα

13854. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.
α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.
β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ.
γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



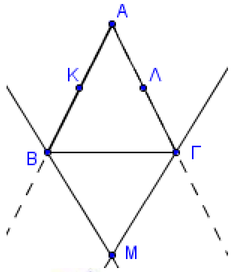
Ανισοτικές σχέσεις

1. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
2. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
3. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.
4. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους (τριγωνική ανισότητα).
5. Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντιστρόφως.
6. Από σημείο εκτός ευθεία φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα.

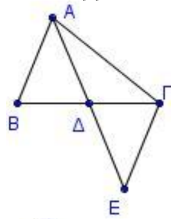
α) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.
β) Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της κάθετης είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

1540. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^{\circ}\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{\Delta E}$ **β)** $\mathrm{A\Delta}<\mathrm{\Delta B}$

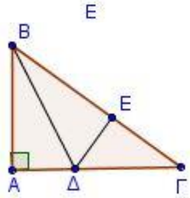
1553. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$.Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ,Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}$.
β) $\mathrm{MK}=\mathrm{M\Lambda}$



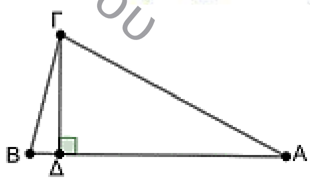
1573. Στο διπλανό σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $\mathrm{\Delta E}=\mathrm{A\Delta}$.
Να αποδείξετε ότι:
α) $\mathrm{AB}=\mathrm{\Gamma E}$
β) $\mathrm{A\Delta}<\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$



1646. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:
α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{\Delta E}$ **β)** $\mathrm{A\Delta}<\mathrm{\Delta\Gamma}$ **γ)** $\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{AB}$



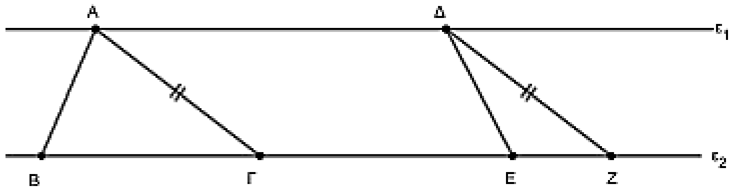
13844.Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι ΒΔ < ΑΔ, ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{A\Delta\Gamma}=90^{\circ}$.
α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ > ΒΓ.
β) Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4ο Θέμα

1749. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε, τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην ε. Έστω A' το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.
α) Αν η BA' τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:
i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία AOA'.
ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε.
β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:
i. $\mathrm{KA}=\mathrm{KA}'$ **ii.** $\mathrm{KA}+\mathrm{KB}>\mathrm{AO}+\mathrm{OB}$

13751.Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\mathrm{E}>90^{\circ}$.Ισχύει επίσης ότι ΑΓ = ΔΖ.

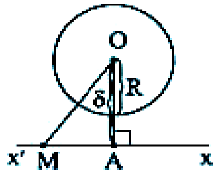


α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντας τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα.

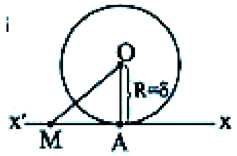
ii. Να αποδείξετε ότι ΗΓ = ΘΖ.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί ΕΖ < ΒΓ.

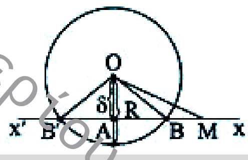
Σχετική θέση ευθείας και κύκλου- Εφαπτόμενα τμήματα



Θεωρούμε έναν κύκλο (O,R) μια ευθεία x'x και την απόσταση δ = OA του κέντρου O από την x'x.
Αν $\delta > R$, τότε η x'x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο
και λέγεται εξωτερική ευθεία του κύκλου.



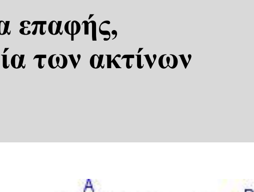
Αν $\delta = R$, τότε η x'x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.



Αν $\delta < R$, τότε η x'x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x'x, λέγεται τέμνουσα του κύκλου και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία τομής της με τον κύκλο.

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Η διακεντρική ευθεία:
(i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

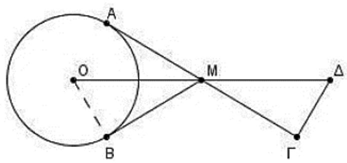


1617. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα.

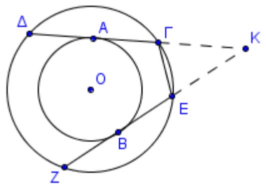
β) $MAO = MBO$.

1620. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.



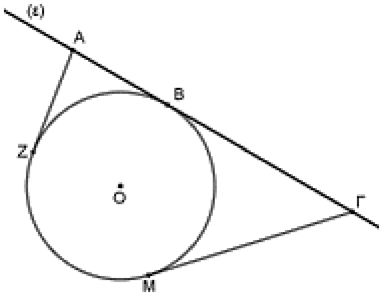
α) Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.

1667. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται στον κύκλο (0,ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΖΕ
β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές.

13817.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε ΒΑ < ΒΓ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.

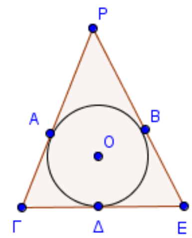


α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΑΖ + ΜΓ.

13759.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 6. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:
α) d = 3 **β)** d = 6 **γ)** d = 9

4ο Θέμα

1751. Έστω ότι ο κύκλος (Ο,ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α,Δ και Β.



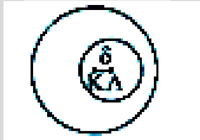
α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΡΓ = ΓΔ + ΑΡ **ii.** ΡΓ − ΓΔ = ΡΕ − ΔΕ
β) Αν ΑΓ = ΒΕ, να αποδείξετε ότι
i. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.
ii. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά.

1752.Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές. **β)** ΓΑ= ΔΒ.
γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ+ ΡΒ.

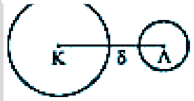
Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται διάκεντρος των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ.

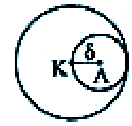
Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με R > ρ. Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$.



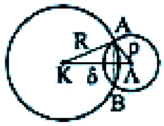
Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$.



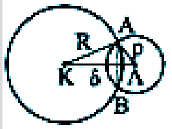
Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν δ = R - ρ.



Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν δ = R + ρ. Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται σημείο επαφής και είναι σημείο της διακέντρου.



Οι κύκλοι τέμνονται, δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία, αν και μόνο αν R – ρ<δ<R+ρ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται κοινή χορδή των δύο κύκλων.



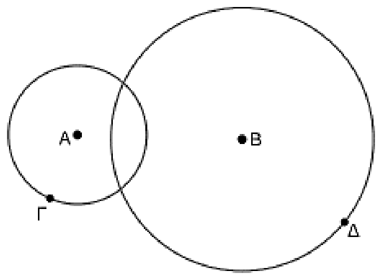
Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

2ο Θέμα

12417. Έστω δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R=3, r=2 και ΚΛ=4. Να αποδείξετε ότι:
α) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β.
β) $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$

13757.Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5).
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

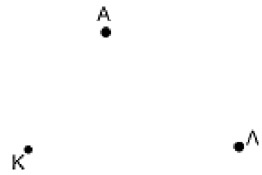
13836.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R.
Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$.
β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α



του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

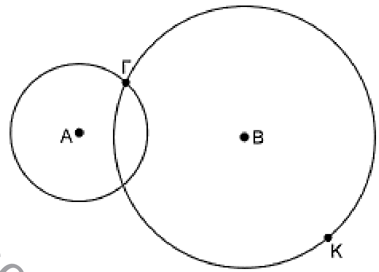
13758.Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,3) και (Λ,8). Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:
α) ΚΛ = 13. **β)** ΚΛ = 2. **γ)** ΚΛ = 5.
δ) ΚΛ = 11. **ε)** ΚΛ = 9.

13835. Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.
α) Να αποδείξετε ότι 1< ΚΛ < 9. **β)** Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.



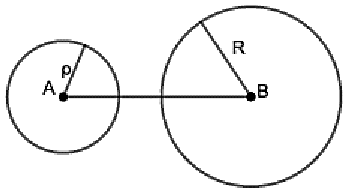
4ο Θέμα

13823.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R και ΑΒ = 6.
i. Να αποδείξετε ότι $ΒΚ - ΑΓ < ΑΒ < ΒΚ + ΑΓ$.
ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;
Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»
Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 2 από το Β του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

13846.Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με R > ρ. Επίσης ΑΒ = 9.
α) Να αποδείξετε ότι R + ρ < 9.
β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.



γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;
Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».
Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4ο Κεφάλαιο: Παράλληλες ευθείες

- Δυο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

- Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

- Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

- **Αίτημα παραλληλίας: Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.**

- Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
  Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
  Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

- Αν δύο διαφορετικές ευθείες $\boldsymbol{ε_1}$ και $\boldsymbol{ε_2}$ είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

- Αν μια ευθεία τέμνει μία από δύο παράλληλες ευθείες τότε θα τέμνει και την άλλη.

- Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

- Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δυο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

- Οι διχοτόμοι δυο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
  Οι διχοτόμοι δυο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

- Ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές ενός τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του. Το κέντρο του λέγεται **περίκεντρο**.
  Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

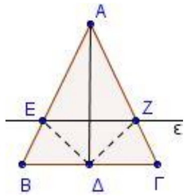
- Ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου και εφάπτεται και στις τρείς πλευρές του λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου. Το κέντρο του λέγεται **έγκεντρο**.
  Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρείς πλευρές του τριγώνου.

- Οι τρείς διχοτόμοι ενός τριγώνου τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος** και το κέντρο του **παράκεντρο** του τριγώνου.

1544. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.



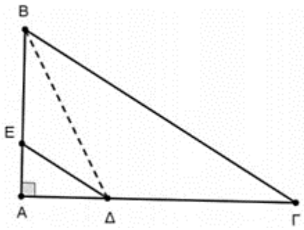
1594. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($A = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας ΑΔΒ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $E\Delta B = \Delta B\Gamma$ και $E\Delta A = \hat{\Gamma}$

ii) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν $A\Delta B = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία Γ.

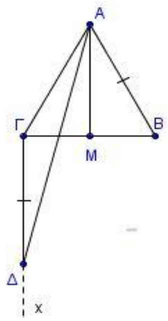


1595. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΑΓ είναι ίση με τη ΓΔΑ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) ΓΔ//ΑΜ **ii)** Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.



1597. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

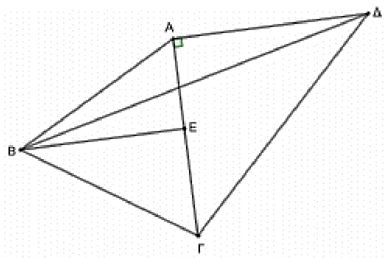
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. **β)** $\Delta E \parallel B\Gamma$

12710.Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτείνουσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ // ΑΔ.

β) οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες.

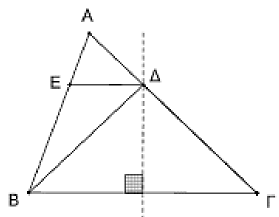
γ) το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές.



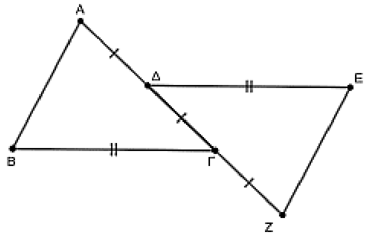
13534.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$.



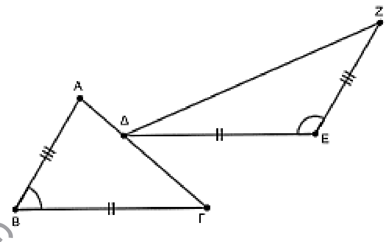
13748. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι ίσα.
β) ΑΒ // ΕΖ

13752. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $B < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΗ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.
α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

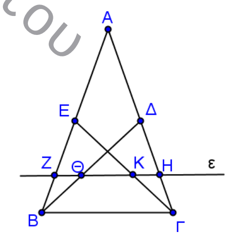
1. Οι γωνίες $\Delta E Z$ και $AB\Gamma$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $\Delta E Z = AB\Gamma$.
3. Τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΑΒΓ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔΗ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.



β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.
γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $B < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΗ για τα διάφορα είδη της γωνίας B και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

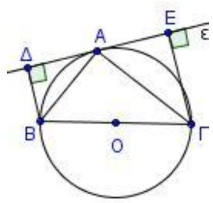
4ο Θέμα

1744. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

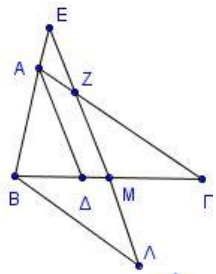


α) $BZ = \Gamma H$
β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.
γ) $ZK = H\Theta$.

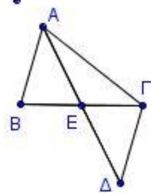
1809. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).



α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΔΒΓ και ΕΓΒ.
β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $A\Delta = AE = AZ$.
γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$.

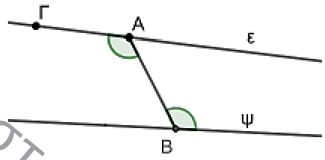


1818. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία ε παράλληλη από το Β προς την ΑΓ.
Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή.
β) $ΒΛ = ΓΖ$ **γ)** $ΑΕ = ΑΓ - ΒΛ$.



1890. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α,Β,Γ,Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωρίο Ε ισαπέχει από τα χωριά Β,Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.
ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ.
β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

13822.Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).



α) Αν η γωνία $\hat{ΒΑΓ}$ είναι μεγαλύτερη από την $\hat{ΑΒψ}$:
i. Να αποδείξετε ότι $\hat{ΒΑε} + \hat{ΑΒψ} < 180^\circ$.
ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;
β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.
γ) Αν ισχύει $\hat{ΒΑΓ} < \hat{ΑΒψ}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

13843.Έστω ότι οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) οι ευθείες x΄x και y΄y είναι παράλληλες.
β) οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy τέμνονται σε σημείο Μ.
γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.
δ) αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την y΄y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒy τέμνει την x΄x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ.

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. **Το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.**

2. **Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.**

3. **Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.**

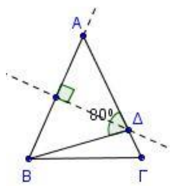
4. **Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.**
   Δυο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
   Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

5. **Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2\nu-4$ ορθές.**
6. **Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.**

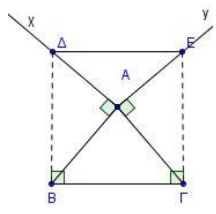
1541. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) $BE=AB$
β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A=55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ.

1552. Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία xΟψ. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx και Οψ της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ,Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

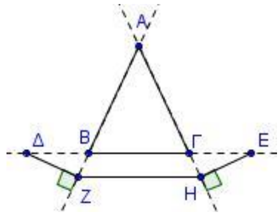
1554. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο $\hat{A}_{\varepsilon\xi}=2\hat{B}$ Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ και σχηματίζεται γωνία ΑΔΒ ίση με 80°.
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



1556. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax\perp AB$ και $Ay\perp A\Gamma$. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$.
β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ.



1572. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Έστω $ΔΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$.



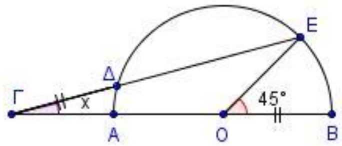
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΖ = ΓΗ$.

ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β) Αν $Α = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ.

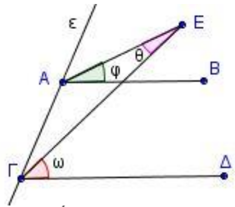
1576. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το ΟΒ και $ΒΟΕ = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $ΔΓΟ = x$.



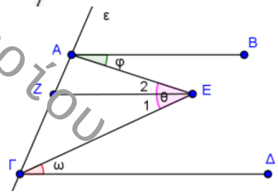
1590. Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ, τότε:

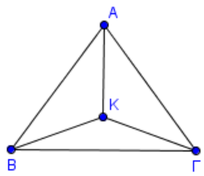
$\omega = \varphi + \hat{\theta}$.



β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και $ΕΖ \parallel ΑΒ$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \varphi + \omega$.



1593. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $Α = 80^\circ$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, τέτοιο, ώστε $ΚΒ = ΚΑ = ΚΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΒΚ και ΑΓΚ.

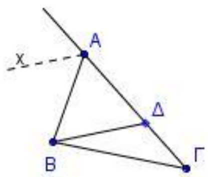
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΚΓ.

1596. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $Α_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αx, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΒΔ = 60^\circ$ **ii.** το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

iii. $ΔΓ = ΑΓ - ΑΒ$

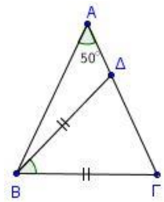


β) Αν η γωνία ΒΔΑ είναι διπλάσια της Γ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ.

1602. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $Α = 50^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΒΓ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι $ΔΒΓ = Α$.

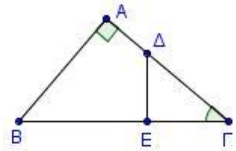


1603. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $(Α = 90^\circ)$ με $Γ = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $ΔΕ \perp ΒΓ$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

β) τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΔΕΒ.



1604. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $Α = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΑΒ$. Να υπολογίσετε

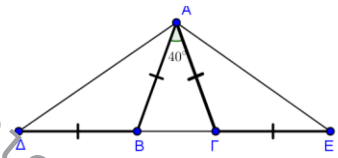
α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. **β)** τη γωνία $ΔΑΓ$.

1607. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $ΔΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΕ$ και $ΒΑΓ = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΒΔ = ΑΓΕ = 110^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

γ) Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.



1623. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 80^\circ$, $Β = 20^\circ + Γ$ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.

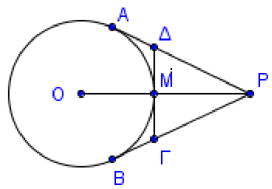
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ.)

β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΔΕ και ΕΔΓ.

1636. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

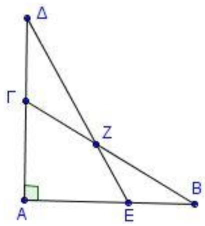
β) Αν $ΑΡΒ = 40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ.



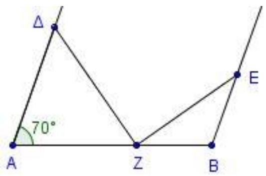
1639. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $Β = Δ = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΕΖΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή.

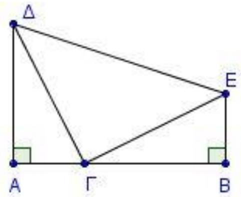


1640. Στο διπλανό σχήμα, οι ΑΔ, ΒΕ είναι παράλληλες.



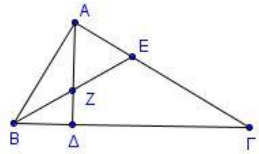
Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΑΖ$, $ΒΕ = ΒΖ$ και $Α = 70^{\circ}$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ.
β) Να αποδείξετε ότι $ΔΖΕ = 90^{\circ}$.

1641. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες Α,Β είναι ορθές και επιπλέον $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΑΓ = ΒΕ$. Να αποδείξετε ότι:



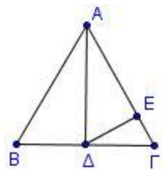
α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.
β) Αν $ΕΓΒ = 40^{\circ}$, τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

1645. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $Α + Γ = 2Β$ και $Α = 3Γ$.



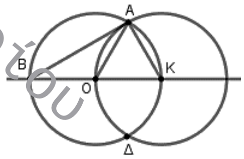
α) Να αποδείξετε ότι $Β = 60^{\circ}$
β) Αν το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

1661. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια, ώστε $ΒΑΔ = 30^{\circ}$.Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.



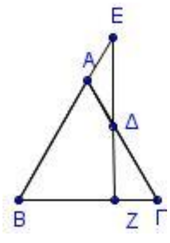
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

1673.Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) με ΟΚ=ρ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ.

1689. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $ΑΕ = ΑΔ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.
β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ.

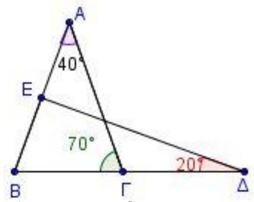
1693. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(Α = 90^{\circ}\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ.
γ) Αν η γωνία Β είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ, να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ.

1699. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

β) Αν $Α = 75^{\circ} + Β$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

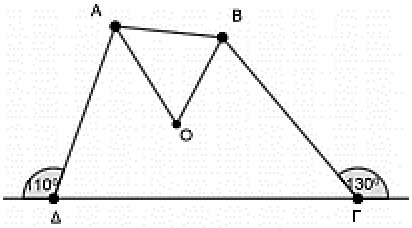
1700. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.



12640. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100^{o} , η γωνία του Δ ισούται με 140^{o} και η γωνία του Ε ισούται με 80^{o} τότε, να υπολογίσετε:

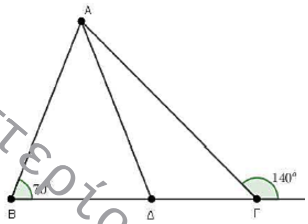
α) το μέτρο του αθροίσματος $Α + Β$. **β)** το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

12644. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130^{o} και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110^{o} . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:
α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.
β) το μέτρο του αθροίσματος $Α + Β$.
γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.

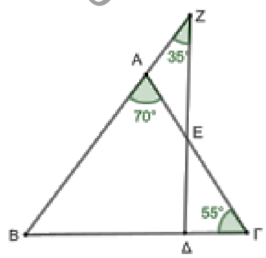


12704.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Β = 70^{\circ}$ και $Γ_{εξωτ} = 140^{\circ}$.
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΑΔ = 40^{\circ}$ **β)** $ΑΔΓ = 110^{\circ}$
γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

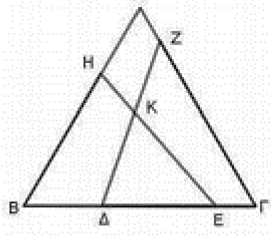


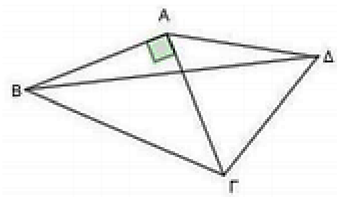
12707.Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 70°$ και $Γ = 55°$.
Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $ΒΖΔ = 35°$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ.
Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
β) $ΖΔΒ = 90°$.
γ) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές.



12708.Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε ΒΗ = ΓΔ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΗ = ΔΖ και $ΒΗΕ = ΓΔΖ$.
β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.



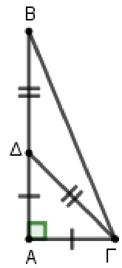


12709.Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $A = 90^\circ$.Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ.

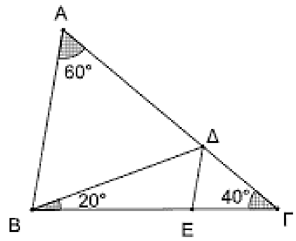


13442.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε
ΒΔ = ΔΓ και ΑΔ = ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔΓ = 45^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία B.

13443.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 60^\circ$ και $Γ = 40^\circ$.Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $ΓΒΔ = 20^\circ$.

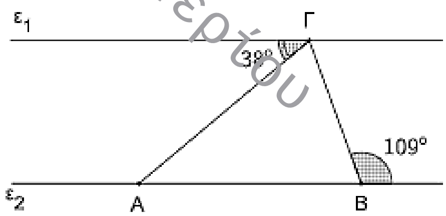


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο
σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΔΕ = 60^\circ$.

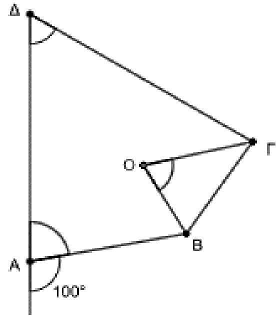
ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΔΓ$.



13535.Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία $ε_1$ διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία $ε_2$ που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β.
Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.



13619.Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με
$A_{εξ} = 100^\circ$ και $B + Γ = 220^\circ$.

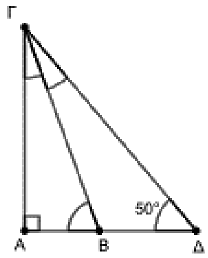
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών B και $Γ$ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες A και $Δ$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΟΓ = 70^\circ$.

13654. Στο ακόλουθο σχήμα είναι

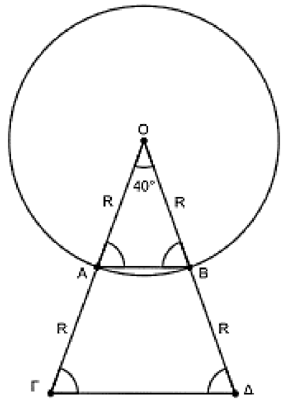
$A = 90^\circ$, $AB\Gamma - A\Gamma B = 50^\circ$ και $A\Delta\Gamma = 50^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $AB\Gamma$ και $A\Gamma B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Gamma\Delta$.

13687. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $AOB = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΓ = ΟΑ και ΒΔ = ΟΒ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

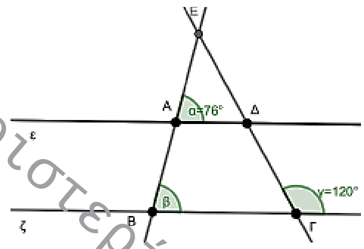


α) Να αποδείξετε ότι $OAB = OBA = 70^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $O\Gamma\Delta$ και $O\Delta\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ.

13741. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

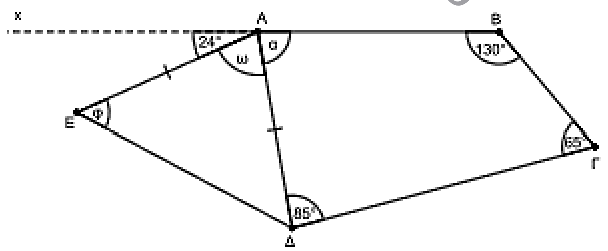


α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.

β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ .

γ) Τη γωνία Ε του τριγώνου ΕΑΔ.

13749. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

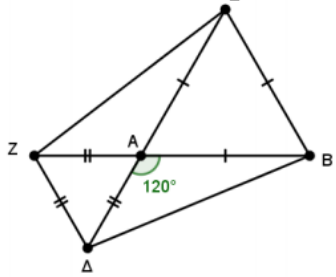


α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$.

β) Τη γωνία $\hat{\omega}$.

γ) Τη γωνία $\hat{\varphi}$.

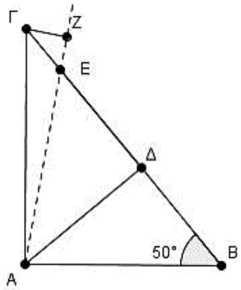
14884. Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\mathbf{A = 120^\circ}$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

β) Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ.

4ο Θέμα



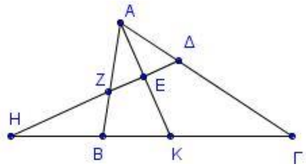
1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^\circ\right)$ με $\mathrm{B}=50^\circ$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

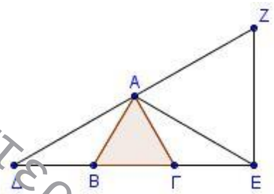
ii. $\Gamma\mathrm{A}\mathrm{E}=10^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.



1792. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A}\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{Z}\Delta\Gamma=90^\circ+\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ **β)** $\mathrm{ZK}=\mathrm{K}\Delta$ **γ)** $\mathrm{ZH}\Gamma=\dfrac{\mathrm{B}-\Gamma}{2}$



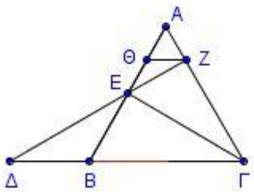
1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\mathrm{B}\Delta=\mathrm{B}\Gamma$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Gamma\mathrm{E}=\mathrm{B}\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\mathrm{Z}$.

1828. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\mathrm{B}\Delta=\dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και $\mathrm{Z}\Theta\parallel\mathrm{B}\Gamma$:

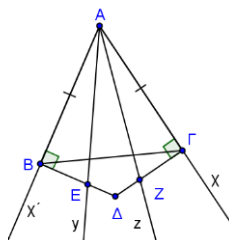


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ.

γ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AE}=2\Theta\mathrm{Z}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $3\mathrm{AB}=4\Theta\mathrm{B}$.

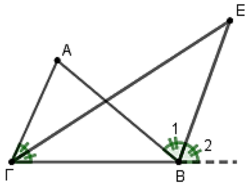


1849. Στις πλευρές Αx´ και Αx γωνίας x´Αx θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε $\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma$. Οι κάθετες στις Αx´ και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ. Αν οι ημιευθείες Αy και Αz χωρίζουν τη γωνία x´Αx σε τρείς ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

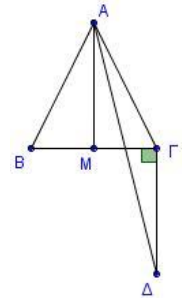
β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'Ax$.
γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες.

1851. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας Γ και της εξωτερικής γωνίας του Β,



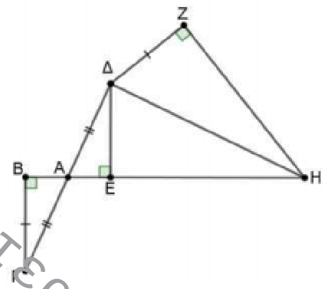
τέμνονται στο Ε. Δίνεται ότι $ΑΒΕ = 70^\circ = 2ΓΕΒ$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

1888. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε $ΓΔ \perp ΒΓ$ με $ΓΔ = ΑΒ$ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ).



Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΜ \parallel ΓΔ$
β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.
γ) $ΔΑΓ = 45^\circ - \frac{Β}{2}$ **δ)** $ΑΔ < 2ΑΒ$

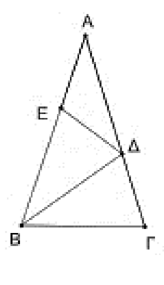
11882. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΔΖΗ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες ΑΒΓ, ΑΕΔ και ΔΖΗ, αντίστοιχα. Επίσης ΑΓ = ΑΔ και ΒΓ = ΔΖ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ είναι ίσα.
β) Η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΗΖ.
γ) Αν, επιπλέον, οι ΑΔ και ΔΗ είναι κάθετες, τότε
$ΑΔΕ = \frac{ΕΗΖ}{2}$.

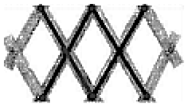
13499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ με ΑΒ < ΑΓ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε ΔΒ = ΑΒ και
ΓΕ = ΓΑ. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $ΓΑΔ = ΔΑΗ$ και $ΕΑΒ = ΗΑΕ$ **β)** ΔΕ = ΔΖ + ΕΘ.

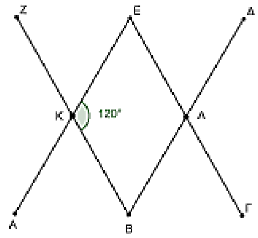
13537. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε ΑΕ = ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $Γ = 2Α$ **ii.** $Α = 36^\circ$ **iii.** Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές
β) Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

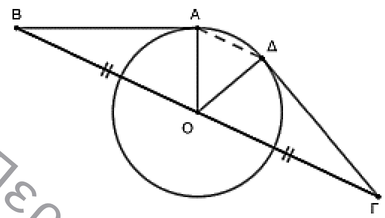
13697.Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου. Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΕ // ΒΔ και ΒΖ // ΓΕ, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία $\hat{BKE}$, είναι ίση με 120^o.





α) Να αποδείξετε ότι $\hat{AKB} = \hat{KB\Lambda} = \hat{B\Lambda\Gamma} = 60^\circ$.
β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

13750.Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΑΒ = ΔΓ **ii.** ΑΔ // ΒΓ
β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5ο Κεφάλαιο: Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Παραλληλόγραμμα

Το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται παραλληλόγραμμο.

- Σε κάθε παραλληλόγραμμο:
  - οι απέναντι πλευρές του και οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
  - οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

- Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου.

- Αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

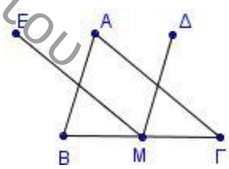
- Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
- Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

1531. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΑΔ$ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές.
β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. **γ)** η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ.

1533. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ(προς το Μ) κατά τμήμα $ΜΔ = ΒΜ$ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα $ΝΕ = ΓΝ$.
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $ΑΕ \parallel ΒΓ$.
β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1534. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

1535. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΔΑ = ΑΕ$ **β)** Τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά.
γ) $ΔΕ = ΒΓ$.

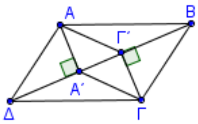
1538. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΑΔ$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1539. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $ΟΕ = ΟΖ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΔΕ = ΒΖ$ **β)** Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

1557. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. **β)** Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

1559. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $M\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ.

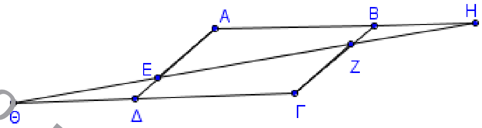
1600. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:



α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ **β)** $AA' = \Gamma\Gamma'$
γ) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο.

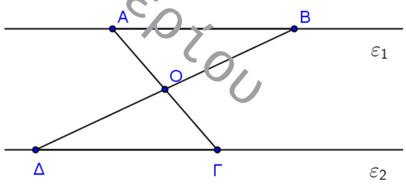
1609. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του Δ και Β τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

1610. Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια, ώστε $AE = \Gamma Z$. Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:



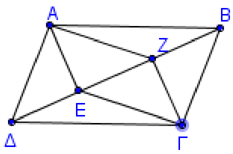
α) $HBZ = E\Delta\Theta$ **β)** $BZH = \Delta E\Theta$ **γ)** $BH = \Theta\Delta$

1618. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και το σημείο Ο είναι το μέσο της ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:



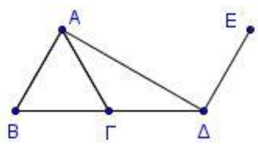
α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα
και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.
β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

1628. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη διαγώνιο ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:



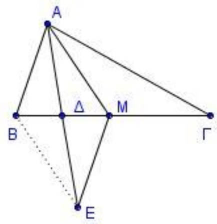
α) $AE = \Gamma Z$
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

1637. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο, ώστε $\Delta E = B\Gamma$.
(Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη ΒΔ).



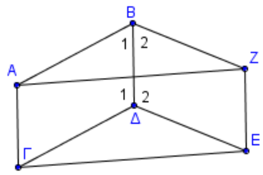
α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

1642. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $ΒΓ = 2ΑΒ$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκταση της ώστε $ΑΔ = ΔΕ$.Να αποδείξετε ότι:



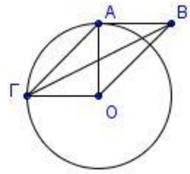
α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $ΜΕ = ΜΓ$.

1654. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι:



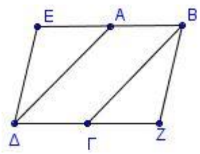
α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $\hat{ΑΒΖ} = \hat{ΓΔΕ}$

1678. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΓ και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα ΑΒ με $ΑΒ = ΟΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ.

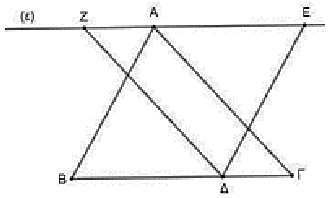
1687. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΓΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

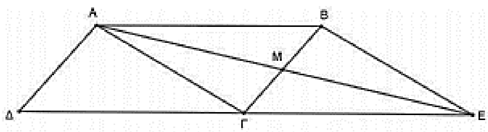
1701. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $ΜΔ = ΜΑ$. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $ΒΜ = \frac{ΑΕ}{2}$.

13755.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :



α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα.
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

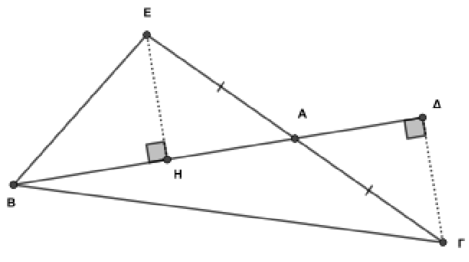
13816.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε ΑΔ < ΑΒ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το Μ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι :



α) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.

13825.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ και ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμα.
β) ΔΑ=ΑΕ.

13833.Στο διπλανό σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΑΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο.



13829.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

13834.Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΖ=ΒΓ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΗ=ΒΓ, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

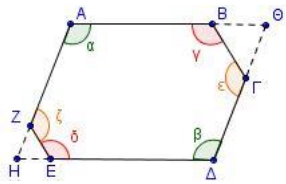
4ο Θέμα

1709. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία Γ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας Α. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx//ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ.
β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $Γ_{εξ}$. **γ)** Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

1730. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει $ΑΒ > ΑΔ$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:
Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Ισχυρισμός 2: $\hat{ΑΕΔ} = \hat{ΒΖΓ}$.
Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και Β.
α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. **β)** Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

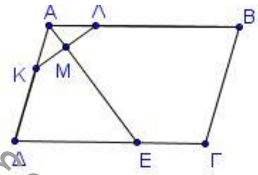
1731. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν ΑΒ > ΓΔ και η γωνία Α είναι αμβλεία,, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:
Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.
Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.
α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. **β)** Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1746. Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύον τα εξής: $\alpha=\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon}=\hat{\zeta}$.



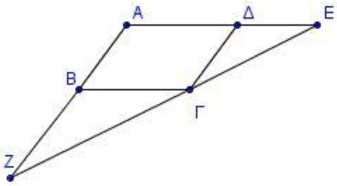
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}$.
β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:
i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές.
ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.

1785. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$. Θεωρούμε σημεία Κ,Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = A\Lambda$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) $A\Delta = \Delta E$.
β) $B\Gamma + \Gamma E = AB$. **γ)** $B = 2\cdot A\Lambda K$

1805. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στη προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $BZ = B\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $B\Gamma Z = \Delta\Gamma E$
ii. Τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό.
≪ Έχουμε: $B\Gamma Z = \Delta E\Gamma$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και $B\Gamma Z = \Delta E\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ). Όμως $\Delta\Gamma E + \Gamma\Delta E + \Delta E\Gamma = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα :
$\Delta\Gamma E + B\Gamma\Delta + B\Gamma Z = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.≫
Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό.

1810. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το ΒΓ και το σημείο Α .Να αποδείξετε ότι:

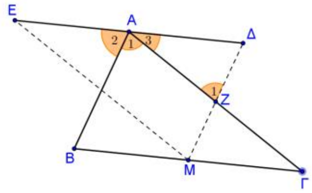
α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής :

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)

$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ)



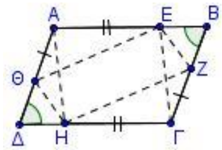
Όμως $Z_1 + A_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ).

Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$A_1 + A_2 + A_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ,Α,Ε συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

1839. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:

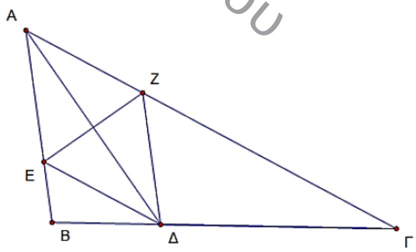


α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1844. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ότι $A\Delta = \Delta\Gamma$. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα.

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές.

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται.

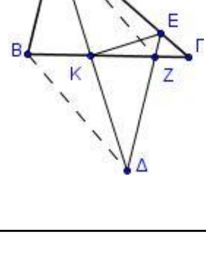
1857. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

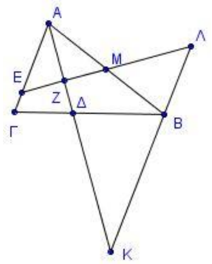
β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα.

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

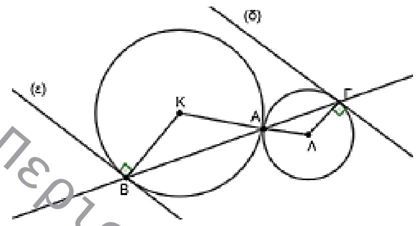


1882. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή.
β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο.



13742.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε
ΒΚ ⊥ ΒΓ έτσι ώστε ΒΚ = ΑΓ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).
α) Να αποδείξετε ότι ΑΜ//ΒΚ και ΑΒ = ΒΚ.
β) Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΜ.
γ) Να αποδείξετε ότι $BKA = 45^\circ - \frac{\Gamma}{2}$.
δ) Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13845.Οι κύκλοι (Κ,R), (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:



α) $KBA = \Lambda\Gamma A$ **β)** (ε) // (δ).
γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Ορθογώνιο – Ρόμβος - Τετράγωνο

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

- Οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες.
- Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο όταν:

(i) Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
(ii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
(iii) Έχει τρεις γωνίες ορθές.
(iv) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

- Κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιες είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

- Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.
- Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
(ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
(iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

- Κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία του, είναι ρόμβος.

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

- Σε κάθε τετράγωνο:

(i) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
(ii) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
(iii) Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.

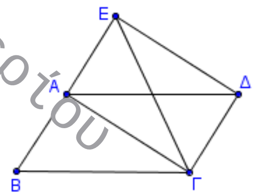
- Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
(iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
(vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

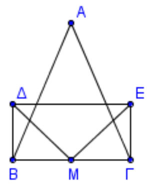
Ορθογώνιο

1599. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΔ = ΜΓ$
β) Η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ.

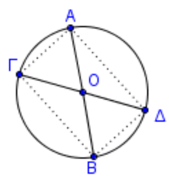
1653. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ.
β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.
γ) $ΒΓΑ = ΑΔΕ$



1668. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΜΔ = ΜΕ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο.

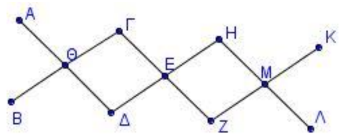


1683. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες.
β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο.



1692. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα.
β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο.

4ο Θέμα

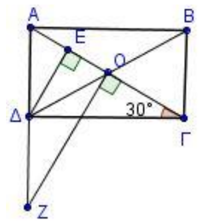


1714. Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.

β) Τα σημεία Β,Δ,Ζ είναι συνευθειακά.

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.



1729. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $\Delta E \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες.

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα.

1733. Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

i. $OM = OM_1$. **ii.** Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά.

iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο.

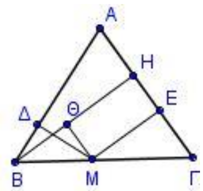
β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1735. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΑΑ΄//ΒΒ΄.

β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄.

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

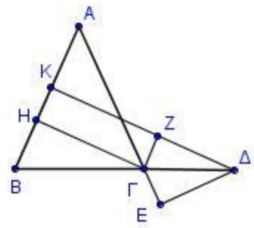


1800. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο.

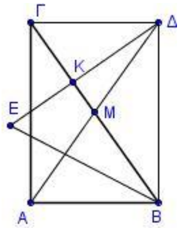
β) $B\Theta = \Delta M$.

γ) $M\Delta + ME = BH$.



1816. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:

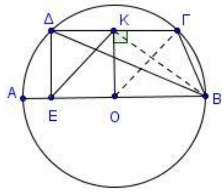
α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη Β.
β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ.
γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές **δ)** $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$



1833. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του Μ, κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο.

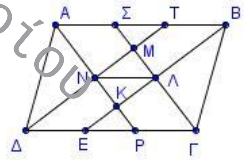
β) $\widehat{KEB} = 90^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2}$ **γ)** $\Delta E = B\Delta$.



1879. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ και Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

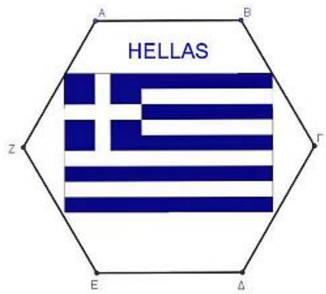
α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο

β) $\widehat{\Delta E K} = \dfrac{\widehat{\Delta O \Gamma}}{2}$ **γ)** $KE < KB$



1891. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ,Ε στην ΔΓ και Σ, Τα στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ,Λ,Μ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο.
β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.
γ) $\Lambda N \parallel AB$ **δ)** $\Lambda N = AB - A\Delta$



13523. Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΔ.
β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ ⊥ ΕΔ.
γ) i. Αν οι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ο, τότε να αποδείξετε ότι 2ΒΟ = ΑΔ.
ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο ισχυρισμό του;
Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

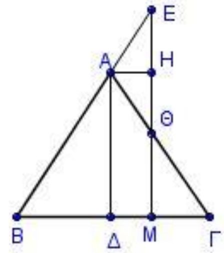
13746. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε ΑΔ = ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι :
i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.

ii. Η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν.

β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

14887. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{ΔΑΗ} = 90^\circ$

β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές **γ)** $ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ$.

Ρόμβος

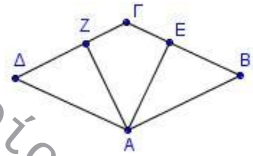
1570. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΑΔ$. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές. **β)** Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος.

1575. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $ΑΕ \perp ΒΓ$ και $ΑΖ \perp ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $ΑΖ = ΑΕ$.

β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $ΑΖ = ΑΕ$, τότε αυτό είναι ρόμβος.



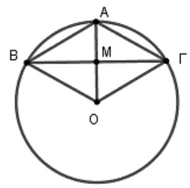
1584. Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο. **β)** Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.

1679(Ίδια με την 1584).Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ.

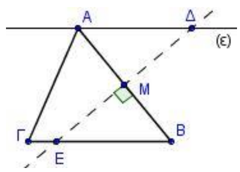


1630. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

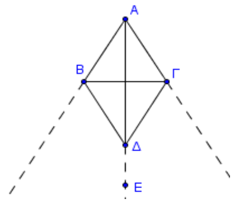
α) Να αποδείξετε ότι $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$.

β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.

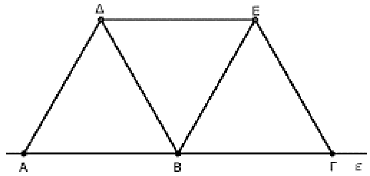
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.



1681. Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) Το Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα).
β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.

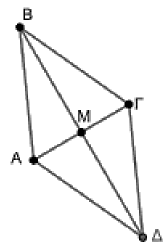


13767.Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

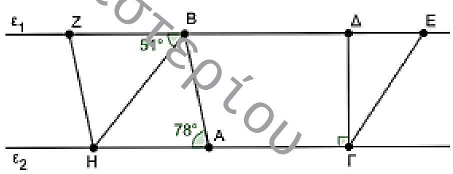


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ΔΒΕ}$.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.

13832.Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης $\widehat{ΑΜΒ} = \widehat{ΓΜΒ}$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.
ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;



13842.Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος. Επίσης δίνονται οι γωνίες $\widehat{ΒΑΗ} = 70^\circ$, $\widehat{ΖΒΗ} = 51^\circ$ και η $\widehat{ΑΓΔ}$ είναι ορθή.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ΑΒΗ}$.
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες.
γ) Αν η γωνία Ε του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56°, να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΓΔΕ.

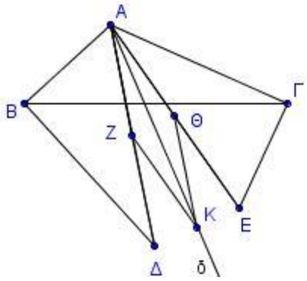
4ο Θέμα

1740. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:
Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.
Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.
α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
β) Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση.

1840. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ,Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια, ώστε να ισχύει $ΒΚ = ΚΛ = ΛΔ$.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

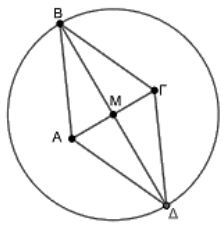
β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.
γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1869. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και $\hat{Α} > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $ΒΔ = ΑΓ$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $ΓΕ = ΑΒ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\hat{ΔΑΕ}$.

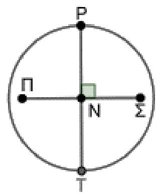


α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΑΕ$.
β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.
γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε $ΚΖ = ΑΖ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.

13857.α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή. Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.
γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και ΠΝ = ΝΣ. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν. Να αποδείξετε ότι ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ.



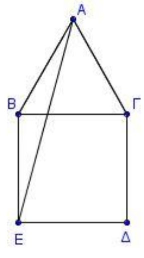
Τετράγωνο

1643. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. **β)** Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες.

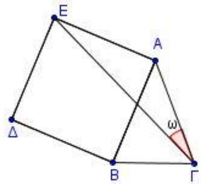
1651. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

i. $\hat{ΑΒΕ}$ **ii.** $\hat{ΒΕΑ}$

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

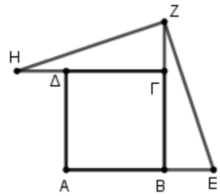


1652. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$.
Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.
β) $2E\Gamma A = 90^{\circ} - BA\Gamma$.



1662. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

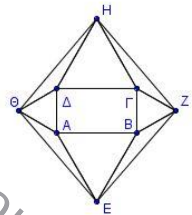
13536. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ.
α) Να αποδείξετε ότι ΖΕ = ΖΗ.
β) Να αποδείξετε ότι $EZH = 90$



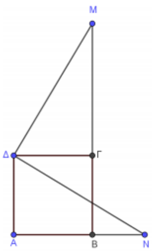
14883. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4ο Θέμα

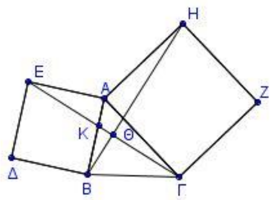
1734. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.
β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



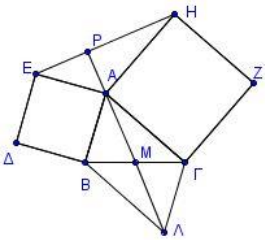
1750. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta N = \Delta M$
β) $\Delta N \perp \Delta M$



1788. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι:
α) $EAH = AB\Gamma + A\Gamma B$
β) $E\Gamma = BH$
γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ.



1795. Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

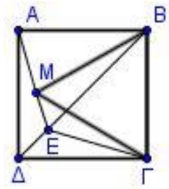


α) $\Gamma\Lambda = AE$.

β) $A\Gamma\Lambda = EAH$.

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ.

1814. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

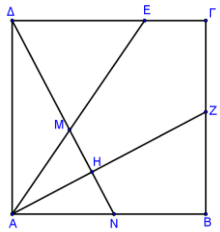


α) $\Delta AE = 15^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα.

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ.

1825.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:



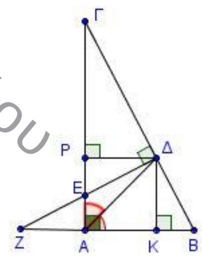
α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα.

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ.

γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ

1894. Σε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ.

Έστω Κ και Ρ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Α) στο σημείο Ζ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B = \Delta E\Gamma$ **ii.** $\Delta E = \Delta B$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ.

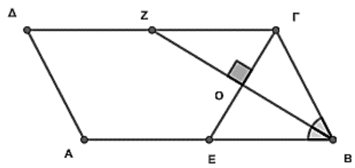
13744.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες ΑΕΔ και ΒΖΑ είναι ίσες **ii.** Τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε ΡΒ = ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ.

13850.Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας Β. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.

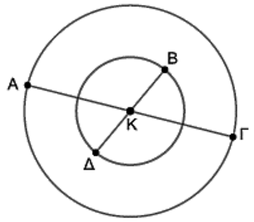


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος
δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Β ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο;

13848.Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.
α) Αν ισχύει ΑΓ>ΒΔ:
i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.
ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής: «Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο». Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13841.Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:
α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΕΔ **β)** Να αποδείξετε ότι ΒΕ//ΖΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.
δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

1) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

2) Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς

3) Αν τρείς (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

4) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δυο παράλληλες. Η ευθεία ε λέγεται μεσοπαράλληλος των ε_1 και ε_2.

5) Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο του.

6) Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα 2/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

7) Οι παράλληλες που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

8) Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ορθογώνιο τρίγωνο

9) Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

10) Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

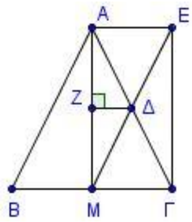
11) Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως.

Τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου

1542. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^\circ\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

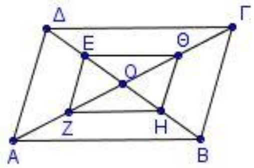
α) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. **β)** $\Delta\mathrm{E}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$

1560. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΜΔ = ΔΕ$. Αν το σημείο Ζ είναι η προβολή του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.
β) $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{4}$.

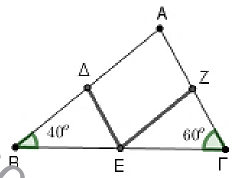


1566. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ.

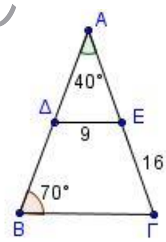
1583. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του ΕΖΗΘ.



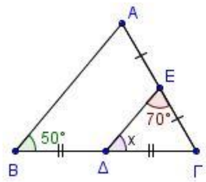
1589. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Β = 40^\circ$ και $Γ = 60^\circ$. Επιπλέον τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ και ΖΕ//ΑΒ.
γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.



1608. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 40^\circ$ και $Β = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $ΔΕ = 9$ και $ΕΓ = 16$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.
β) Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = 18$.
γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

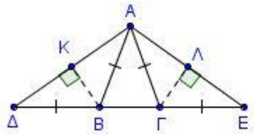


1611. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Β = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΔΕΓ = 70^\circ$.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί $ΔΕ \parallel ΑΒ$.
β) Να υπολογίσετε
 i. τη γωνία x.
 ii. τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

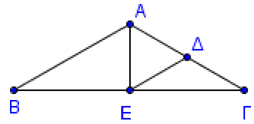


1616. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $ΑΒ = ΒΔ = ΑΓ = ΓΕ = 5$, $ΒΚ \perp ΑΔ$ και $ΓΛ \perp ΑΕ$.
α) Να προσδιορίσετε ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.
γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.

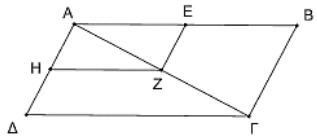


1686. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $Β = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

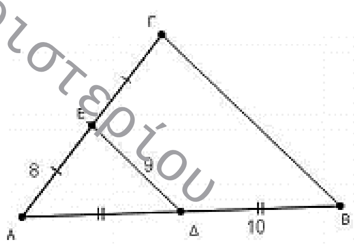


12639. Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:
α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ **β)** το ΑΕ ισούται με το 1/4 του ΑΓ.

13532. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΖΗ = \frac{ΑΒ}{2}$.
β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

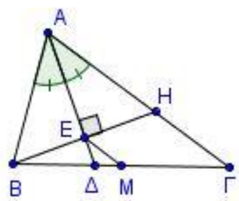


14877. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ = 8, ΕΔ = 9 και ΔΒ = 10.
α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες.
β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.
γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.



4ο Θέμα

1723. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ < ΑΓ)$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές.
β) $ΕΜ \parallel ΗΓ$ **γ)** $ΕΜ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$

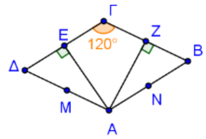


1726. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.
β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για
i. ισόπλευρο τρίγωνο. **ii.** ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

1741. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

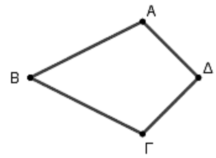
α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$.
β) Στη περίπτωση που το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Α και Ε είναι συνευθειακά.

1743. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{Γ} = 120^\circ$. Έστω ΑΕ και ΑΖ οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.



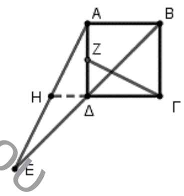
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.
ii. $ΑΓ \perp ΕΖ$
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο.

1745. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ=ΒΓ και $\hat{Α} = \hat{Γ}$.
Να αποδείξτε ότι:



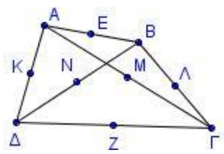
α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.)
β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα.
γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

1766. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να αποδείξετε ότι:



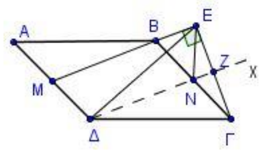
α) $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ **β)** Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα.
γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.

1773. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΔ = ΒΓ$. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος.
β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΝ.
γ) $ΚΕ = ΖΛ$
δ) Τα τμήματα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

1775. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ $(ΓΕ \perp ΜΒ)$. Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ $(Δx \parallel ΜΒ)$ τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν,Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

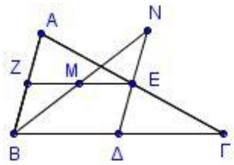


α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ.
γ) $ΔΕ = ΔΓ$.

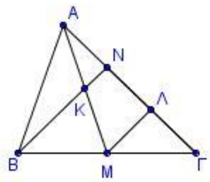
1794. α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ πρέπει απαραίτητα να είναι ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

1798. α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.
β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

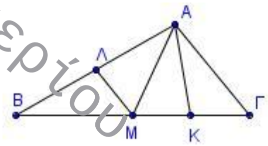
1801. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή.
γ) $ΒΖ + ΝΕ = ΔΓ$



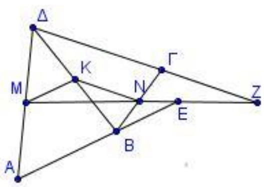
1802. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:
α) Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ.
β) $\widehat{ΚΜΓ} = \widehat{ΜΒΚ} + \widehat{ΑΚΝ}$ **γ)** $ΒΚ = 3ΚΝ$



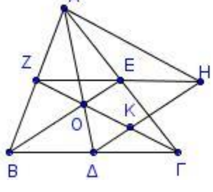
1803. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΓ$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ,Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $\widehat{ΜΑΓ} = \widehat{ΑΜΓ}$.
β) $ΜΛ = ΜΚ$.
γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΜΚ.

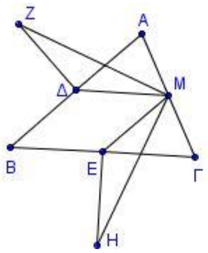


1804. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = ΓΔ$ και Μ,Ν,Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ,ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΚ = ΚΝ$ **β)** $\widehat{ΜΕΑ} = \widehat{ΜΖΔ}$



1820. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΖΕ (προς το Ε) κατά τμήμα $ΕΗ = ΖΕ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΗ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) Οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ.



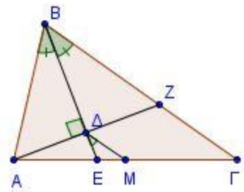


1832. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με τις γωνίες Β και Γ οξείες και Δ,Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΔΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΕΗ = \frac{ΒΓ}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:
 i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο.
 ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $Α = 90^\circ$.

1837. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΒΓ$ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας Β. Αν $ΑΖ \perp ΒΕ$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

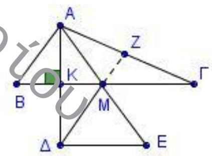


α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

β) $ΔΜ \parallel ΒΓ$ και $ΔΜ = \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$.

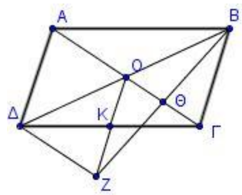
γ) $ΕΔΜ = \frac{Β}{2}$, όπου Β η γωνία του τριγώνου.

1873. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $ΑΜ = ΑΒ$. Φέρνουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $ΚΔ = ΑΚ$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ΜΕ = ΜΔ$.
Να αποδείξετε ότι:



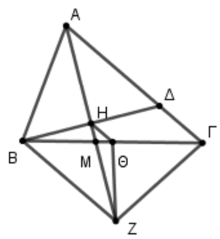
α) $ΔΕ \perp ΑΔ$ και $ΔΕ = 2ΚΜ$.
β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος.)
δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ.

1877. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $ΚΖ = ΚΟ$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ.
Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται.
β) $ΑΟ = ΔΖ$
γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ είναι ίσα.

1889. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος.

β) ΗΘ//ΒΖ. **γ)** $ΗΘ = \dfrac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$

1898.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε,Ζ και Η τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.
γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.

13743.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.
α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{ΔΜΓ} = \widehat{ΒΓΜ}$.
β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.
γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

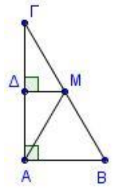
13745.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.
α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:
i. ΜΕ = ΜΖ.
ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ.
β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:
i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;
ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

13856.Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε ΑΜ=ΜΘ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα ΕΑ=ΕΖ και προς το Ζ κατά τμήμα ΖΓ=ΕΖ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι ΑΔ=12. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη;

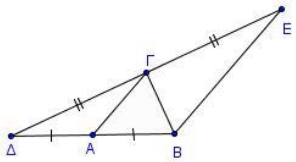
Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου – θεώρημα 30°

1537. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα $AH = \Delta A$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Ζ.

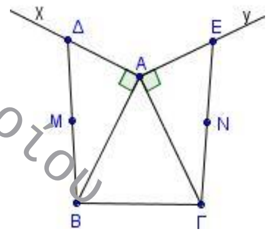
1548. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ με $B\Gamma = 8\,\text{cm}$. Έστω ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν $AM\Gamma = 120^\circ$, τότε:
α) Να δείξετε ότι $AB = 4\,\text{cm}$.
β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ.



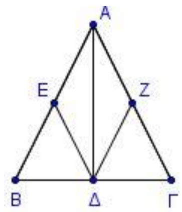
1551. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στη προέκταση της ΔΓ (προς το Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο.
β) $BE \parallel A\Gamma$ και $A\Gamma = \dfrac{BE}{2}$



1555. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.
α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.



1564. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$, το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.

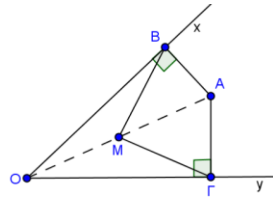


1567. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και $\Gamma = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ.
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$.
β) Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο.

1586. Δίνεται γωνία xΟy και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Οx, Οy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές. **γ)** $ΒΜΑ = 2xΟΑ$.

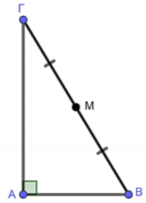


1606. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ με $Β = 2Γ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να βρείτε τη γωνία ΑΜΓ.

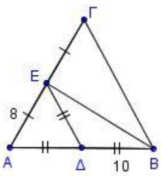


1614. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΔΕ = ΔΒ$ με $ΑΕ = 8$ και $ΔΒ = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = 20$.

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

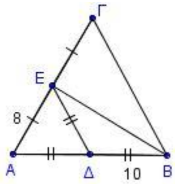


1615. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΔΕ = ΔΒ$ με $ΑΕ = 8$ και $ΔΒ = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

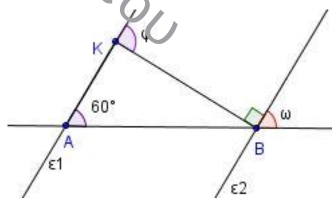


1619. Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1 \parallel ε_2$ και $ΑΒ = 6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.

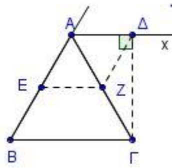
β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



1625. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας Α και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισόπλευρο. **β)** το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.

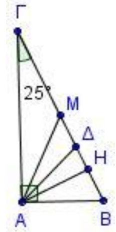


1631. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $Α + Γ = 120^\circ$ και $Α = 3Γ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

β) Αν η πλευρά $ΒΓ = 2\text{cm}$, να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

1633. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α.

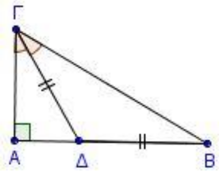


α) Να υπολογίσετε τις γωνίες AMB, HAB, $A\Delta B$.

β) Να αποδείξετε ότι $MA\Delta = \Delta AH = 20^\circ$.

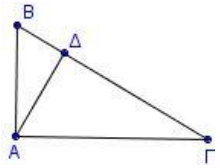
1647. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$, $B = 35^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ.

1638. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\,\text{cm}$.



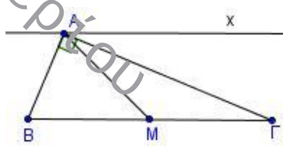
Να αποδείξετε ότι: **α)** $B = 30^\circ$. **β)** $AB = 3\text{cm}$

1649. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$, $2\Gamma = B$ και ΑΔ το ύψος του.



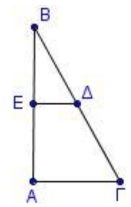
α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \dfrac{AB}{2}$.

1655. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:



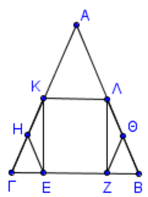
α) $MA\Gamma = M\Gamma A$
β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx.

1671. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $B = 30^\circ$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:



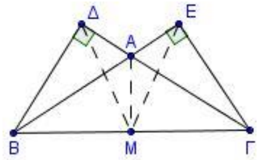
α) ΑΓ..... **β)** ΒΓ....... **γ)** ΑΔ.......
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

1675. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



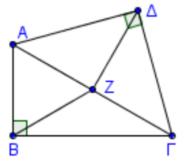
α) Τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.
β) $EH = Z\Theta$, όπου Η, Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα.

1680. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Α} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$.
β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:
 i. Να αποδείξετε ότι $ΜΔ = ΜΕ$
 ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ.

1685. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Β = 90^\circ$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $Δ = 90^\circ$.



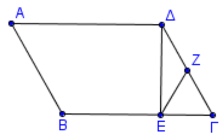
α) Να αποδείξετε ότι $ΒΖ = ΔΖ$.
β) Αν $ΑΓΒ = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ.

1690. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 90^\circ$ και $Β > Γ$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσό του ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) $Β = ΓΑΔ$ **β)** $ΑΜΔ = 2Γ$.

1691. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $Β = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ
γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο.

1702. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΔΓ \perp ΕΓ$
β) η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ.

1704. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $Β = 120^\circ$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.



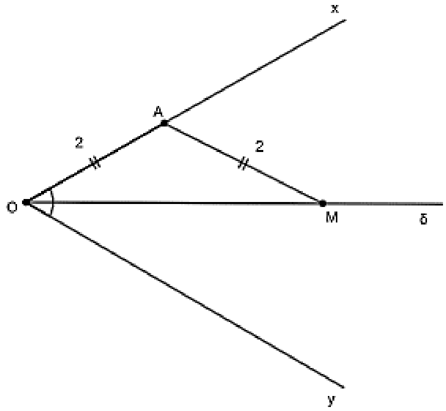
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου.
β) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΕΖ = ΑΚ$.
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ.

13653. Σχεδιάζουμε γωνία $x\hat{O}y = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε ΑΟ = 2. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε ΑΜ = ΑΟ. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\delta\hat{O}y$.

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

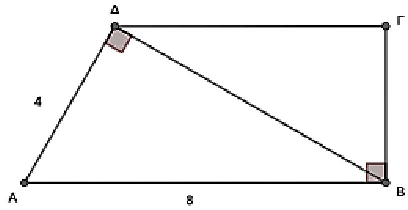
γ) Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.



13828. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.



13831. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΒ > ΑΓ. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί; (Μονάδες 10)

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30°, τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$;

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

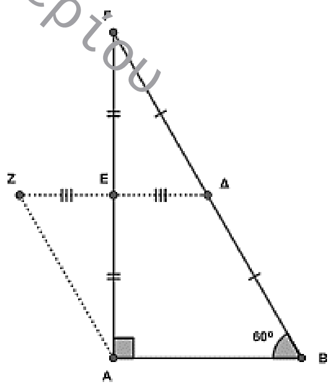
13837. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΖ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές.

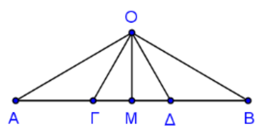


4ο Θέμα

1710. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ,Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $\Delta B = O\Delta$.

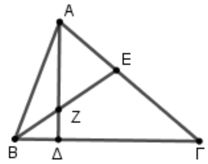
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\hat{O}\Delta = 60^\circ$ **ii.** $O\hat{A}\Gamma = O\hat{B}\Delta = 30^\circ$



β) Αν Μ το μέσον του τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2ΟΜ = ΟΑ$.

1713. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $Α + Γ = 2Β$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.

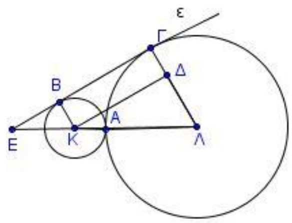


α) Να αποδείξετε ότι:

i. $Β = 60^\circ$ και $ΑΖ = ΒΖ$ **ii.** $ΑΔ = \frac{3}{2}ΒΖ$

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.

1721. Οι κύκλοι $(Κ, ρ)$ και $(Λ, 3ρ)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο.

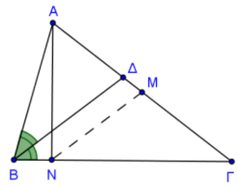
β) Να αποδείξετε ότι $\hat{ΔΚΛ} = 30^\circ$ **γ)** Να αποδείξετε ότι $ΕΛ = 6ρ$.

1737. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Μ, Ν οι προβολές των Δ,Ε στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ$ **β)** Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.

γ) Τα σημεία Ε,Α και Δ είναι συνευθειακά και ΜΝ=ΔΕ/2.

1738. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Β = 2Γ$ και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές. **γ)** $ΑΝ \perp ΒΓ$

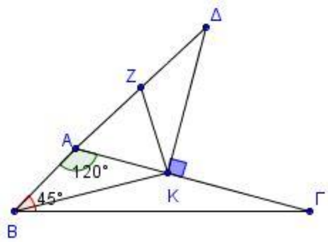
1759. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι $ΑΒ = 2ΑΔ$. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος.

β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές.

γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΗΓ.

1761. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β ίση με 45°. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα $ΑΔ = 2ΑΒ$. Από το Δ φέρνουμε την



κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:

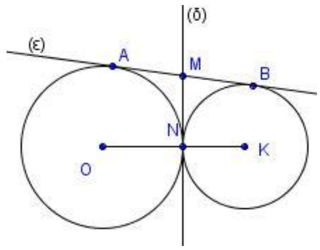
α) $A\Delta K = 30^\circ$

β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $ZKB = 90^\circ$

δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ.

1771. Δύο κύκλοι (O,ρ_1), (K,ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α,Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την ε στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

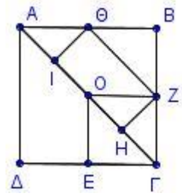


α) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

β) $OMK = 90^\circ$

γ) $ANB = 90^\circ$

1781. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

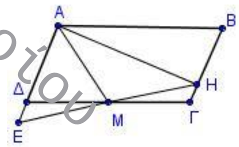


α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο.

β) $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο με $\Theta Z = 2\Theta I$.

1787. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

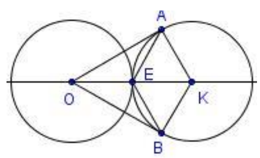


α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ.

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται.

γ) $E = \Delta MA$

1796. Δύο ίσοι κύκλοι (O,ρ) και (K,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (K,ρ), να αποδείξετε ότι:



α) $AE = BE$ **β)** $AOK = 30^\circ$

γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

1806. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

α) $B = BAM$ **β)** $A\Delta H = \Delta AH$.

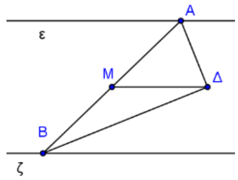
γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ.

1808. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Δ,Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $ΕΛ = ΑΕ$ και στη προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο, ώστε $ΔΚ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΚΔ = ΛΕ$ **β)** Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια.

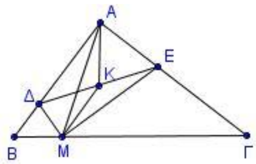
γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα.

1811. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{ΒΔΑ} = 90^\circ$ **β)** $\hat{ΒΜΔ} = 2\hat{ΜΔΑ}$ **γ)** $ΜΔ \parallel ε$

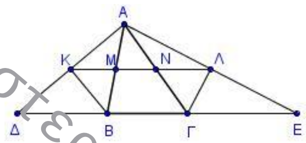
1812. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή.

β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι $ΜΚ = ΚΑ$.

1824. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΑΒ$ ενώ στη προέκταση της ΒΓ προς το Γ, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΓΕ = ΑΓ$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



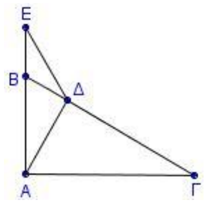
α) Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή. **γ)** $ΚΛ = \frac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2}$

1831. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο, ώστε $ΒΕ = ΒΔ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.

β) Να αποδείξετε ότι:



i. $ΒΕ = \frac{ΑΒ}{2}$ **ii.** $ΑΕ = ΓΔ$

1850. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο Α της μεσοκαθέτου του τμήματος ΕΖ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους ΕΘ, ΘΗ, ΗΖ στα σημεία Β, Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης Α. Για τη διαδρομή $Α \to Β \to Γ \to Δ \to Α$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ΑΒΕ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΘΒΓ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45°.

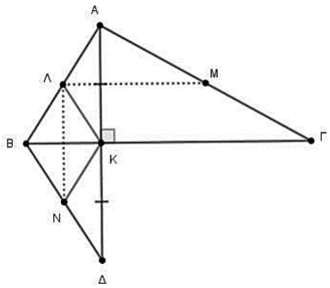
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ίσα.

ii. Η διαδρομή ΑΒΓΔΑ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο.

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ.

1858. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΑΚ = ΚΔ . Έστω Λ, Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

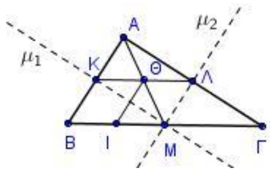


α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος .

γ) $ΛΜ \perp ΛΝ$

1859. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους $μ_1$, $μ_2$ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

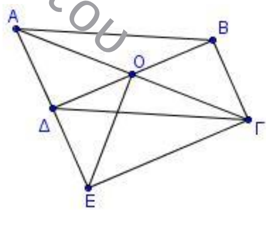
i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο.

iii. $ΛΘ = \frac{ΒΓ}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ.

β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο, ώστε $ΒΙ = \frac{ΒΓ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.

1862. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή να τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΔΕ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

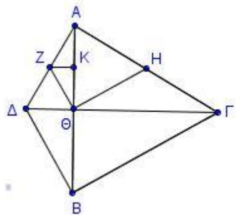


α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

1866. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με $Δ = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

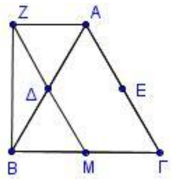


α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία ΖΘΗ είναι ορθή.

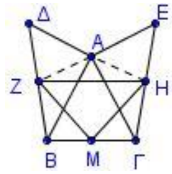
γ) Αν η ΖΚ είναι κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ΖΚ = \frac{ΑΔ}{4}$.

1868. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ,Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στη προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $ΔΖ = ΔΜ$. Να αποδείξετε ότι:



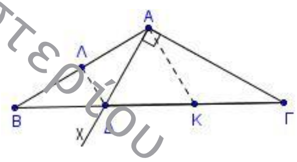
α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα.
β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ.

1870. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με $ΑΔ = ΑΕ$.
Θεωρούμε τα μέσα Ζ,Η και Μ των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



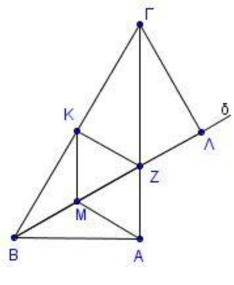
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.
ii. Το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ισοσκελές.
iii. Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ.
β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έγραψε τα εξής:
« 1. $ΑΔ = ΑΕ$ από την υπόθεση
2. $ΑΒ = ΑΓ$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
3. $ΔΑΒ = ΕΑΓ$ ως κατακορυφήν
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».
Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις;

1871. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Αχ κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:



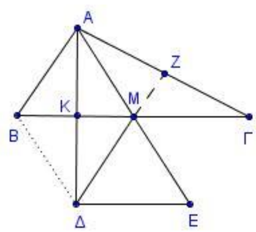
α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές.
β) $ΔΓ = 2ΒΔ$ **γ)** $ΛΔ \parallel ΑΚ$ **δ)** $ΑΚ = 2ΛΔ$

1872. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 90^\circ$ και $Β = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος.)
γ) $ΓΖ = 2ΖΑ$
δ) $ΒΛ = ΑΓ$

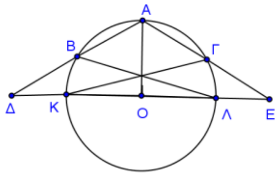
1873. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $ΑΜ = ΑΒ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $ΚΔ = ΑΚ$.
Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΔΕ \perp ΑΔ$ και $ΔΕ = 2ΚΜ$.
β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

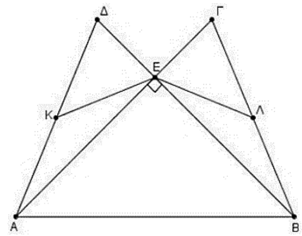
γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος.
δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει την ΑΓ στο μέσον του Ζ.

1874. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο $ΚΛ = 2ρ$. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $ΑΒ = ΑΓ = ρ$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ. Να αποδείξετε ότι:



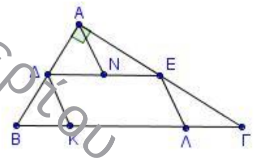
α) $\hat{ΒΑΓ} = 120^\circ$ **β)** Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.
γ) $ΚΓ = ΛΒ$

1876. Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΒΑ=ΒΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



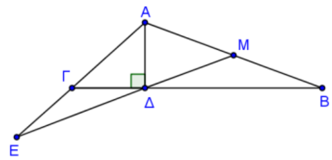
α) ΕΔ=ΕΓ .
β) ΔΓ//ΑΒ .
γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ.

1880 . Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^\circ$ και Δ,Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $ΔΚ = ΚΒ$ και $ΕΛ = ΛΓ$.Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{ΔΚΛ} = 2\hat{Β}$ και $\hat{ΕΛΚ} = 2\hat{Γ}$.
β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο με $ΔΕ = 2ΔΚ$.
γ) $ΑΝ = ΔΚ = \dfrac{ΒΓ}{4}$

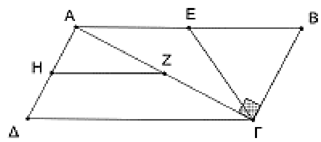
1881. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ\,(ΑΒ > ΑΓ)$, ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $ΓΔ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{Β} = \hat{Ε}$ **β)** $\hat{Γ} = 2\hat{Β} = \hat{ΑΜΔ}$
γ) $ΓΕ < ΑΓ$

1895. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές.
β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

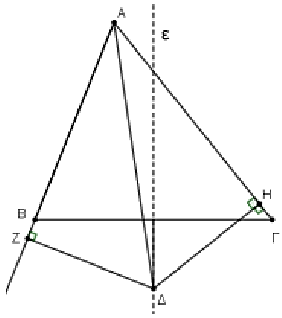
13540. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιός του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΓΕ = ΖΗ. **ii.** Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\Gamma E$.

β) Αν $\Delta H = \dfrac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο.

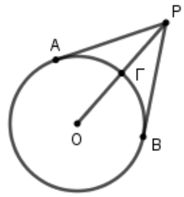


13522.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΔΗ προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ.

β) Να αποδείξετε ότι ΒΖ = ΗΓ.

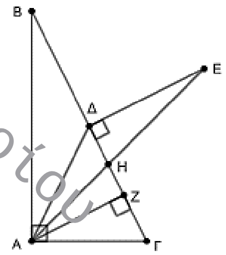
γ) Αν η γωνία $A = 60^{O}$ και Μ το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΗΜ = ΖΔ.



13520.Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $AP B = 60^{\circ}$.Να αποδείξετε ότι:

α) ΟΡ = 2ρ **β)** $A\Gamma B = 120^{\circ}$

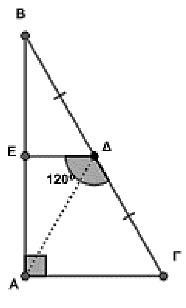
γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.



13672.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^{\circ}$ και ΑΒ > ΑΓ. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας Α στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma A Z = \Delta A B$

β) ΑΔ = ΔΕ **γ)** $Z A \Delta = \Gamma - B$

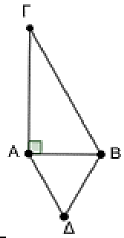


13855.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^{\circ}$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $E\Delta\Gamma = 120^{\circ}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία $\Delta\Gamma A$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

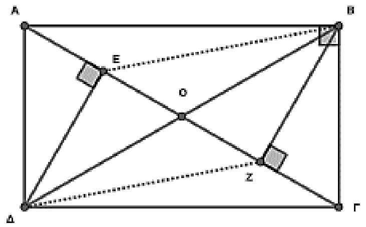
γ) Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΖ=ΑΓ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $A H Z = 90^{\circ}$.



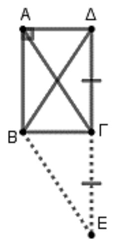
13853.Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $A = 90^{\circ}$.Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ.
γ) Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

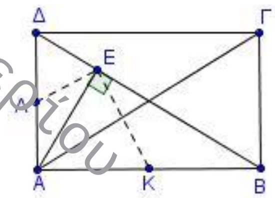
13852.Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Αν $\Delta A E = 60^\circ$ και ΟΕ=5, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.



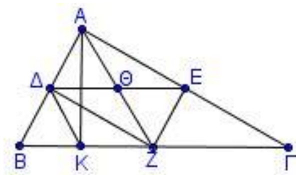
13851.Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.
γ) Αν $\Delta B E = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι ΒΔ=2ΑΔ.



14879. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε $A E \perp B\Delta$. Έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:
α) i. Να αποδείξετε ότι: $K E \Lambda = 90^\circ$ **ii.** $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$
β) Αν $B A \Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$.



14886. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(A = 90^\circ\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ, ΔΕ, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.
ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$
β) Αν επιπλέον είναι $\Gamma = 30^\circ$,
i. να βρείτε τη γωνία ΑΖΒ. **ii.** να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.

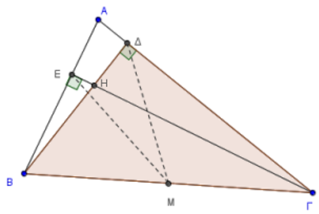


14881. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $NKM = NMK$
β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ. **γ)** $AM = KN + \Lambda P$.

Βαρύκεντρο – ορθόκεντρο τριγώνου

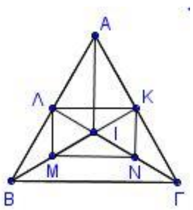
1706. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και $μ_β$, $μ_γ$ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:
Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β=γ, τότε οι διάμεσοι $μ_β$, $μ_γ$ είναι ίσες.
α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση *Π*, αιτιολογώντας την απάντησή σας. **β)** Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της *Π* και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.
γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η *Π* και η αντίστροφή της ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

1716. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΜΔ = ΜΕ
ii. Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα την ΒΓ και ότι $ΑΗΔ = Γ$, όπου $Γ$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ.

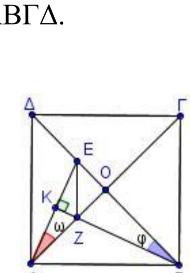
1719. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι. Αν τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα.
γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ.
δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

1728. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $ΑΕΔ = ΒΖΓ$.
γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

1748. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες.
β) $ΒΖ = ΑΕ$ και $ΓΖ = ΒΕ$.
γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ.

1754. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο, ώστε $ΗΑ = ΗΒ$. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ. Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στη ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.

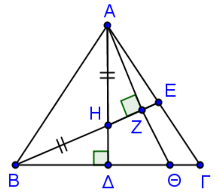
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα.

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$

iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

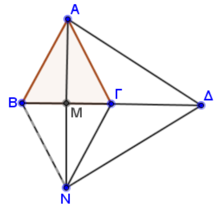


1760. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και ΑΜ το ύψος του στη πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα $MN = AM$. Στη προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος.

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές.

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ.

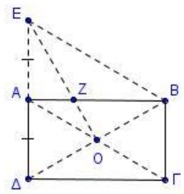


1764. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $AB > B\Gamma$, $A\Gamma = 2B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $\Delta A = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο.

γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.



1777. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη από τις κορυφές Β,Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.

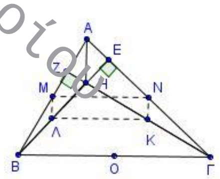
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN = \Lambda K$

ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.

β) Αν Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $\widehat{MOK} = 90^\circ$.



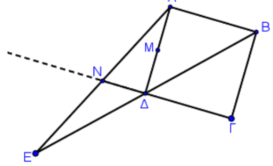
1780. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$.

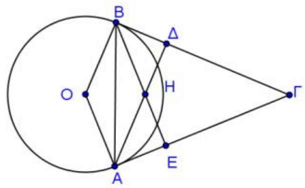
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN \perp A\Gamma$ **ii.** $\Gamma M \perp AN$

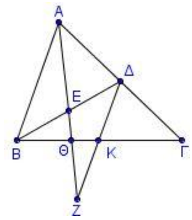


1823. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται σε σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:



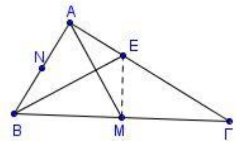
α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές.
β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος.**γ)** Τα σημεία Ο,Η,Γ είναι συνευθειακά.

1827. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $EZ = AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της ΑΖ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



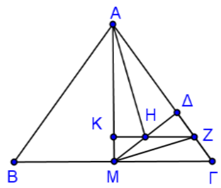
α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ.

1835. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 30^\circ$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.



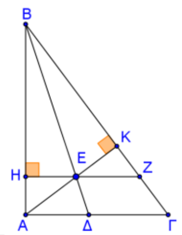
α) Να αποδείξετε ότι:
i. η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Β.
ii. $AE = \dfrac{\Gamma E}{2}$
iii. η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ.
β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά.

1843. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε τη ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε σημείο Η το μέσο του ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $HZ = \dfrac{B\Gamma}{4}$ **β)** $MZ \parallel B\Delta$
γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ.

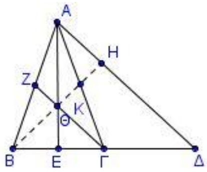
1865. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος ,που τέμνονται στο Ε.Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι :
i) Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα.
ii) Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές.
iii) Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ.

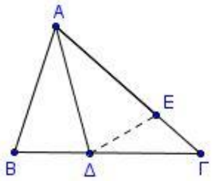
β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ.

1878. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \mathrm{B\Gamma}$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η. Να αποδείξετε ότι:



α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. **β)** $\mathrm{AH} = \Theta\Gamma$ **γ)** $\mathrm{AH} = 2\mathrm{Z}\Theta$

1887. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\mathrm{AE} = \mathrm{AB}$. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.
β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ.
γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ

Τραπέζιο

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται διάμεσος του τραπεζίου.
  Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους.

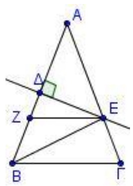
- Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.

- Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

- Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
  α) οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
  β) οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

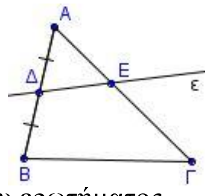
- Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
  (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
  (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

1529. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma})$. Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.



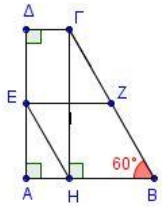
α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AE} = \mathrm{BE}$.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1536. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ κι σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ.



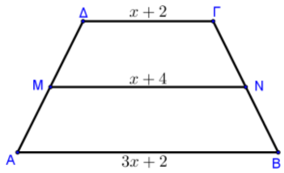
α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1549 . Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A} = \Delta = 90^\circ$, $\mathrm{AB} > \Gamma\Delta$, $\mathrm{B\Gamma} = 4\Gamma\Delta$ και $\mathrm{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma\mathrm{H} \perp \mathrm{AB}$ και θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

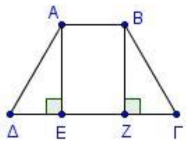


α) $\mathrm{AB} = 3\Gamma\Delta$
β) Το τετράπλευρο ΕΗΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

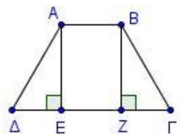
1550.Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{AB}//\Gamma\Delta$, $\mathrm{AB} > \Gamma\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{B}\Gamma$.
α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι ΑΒ = 3x + 2, ΓΔ = x + 2 και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι ΜΝ = x + 4, τότε να δείξετε ότι x = 2.
β) Αν η γωνία Γ είναι διπλάσια της γωνίας Β , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.



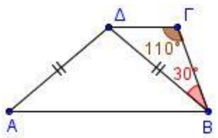
1562. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta)$. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{Z}$
β) το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο.



1563. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta)$. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{Z}$
β) $\mathrm{AZ} = \mathrm{BE}$

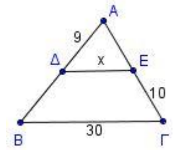


1577. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta)$ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία $\Gamma = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta\mathrm{B}\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$.

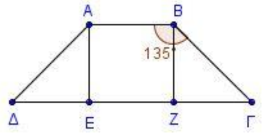


1579. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta$ και $\mathrm{AB} < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε $\mathrm{AE} = \mathrm{EZ} = \mathrm{ZB}$ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{E}$
β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή.

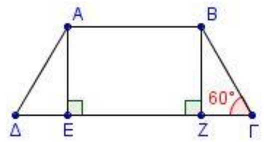
1612. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $ΑΔ=9$, $ΕΓ=10$ και $ΒΓ=30$.
α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ.



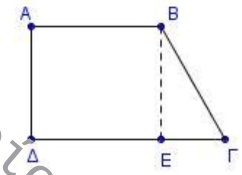
1629. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΓΔ > ΑΒ$ και $Β = 135^\circ$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.
β) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΕΔ = ΒΖ = ΓΖ$.



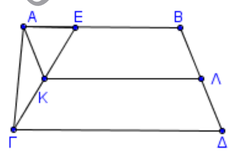
1634. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $Γ = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.
α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα.
γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του ΑΒΓΔ.



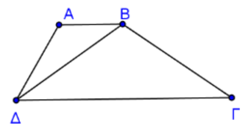
1635. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ = ΒΓ = 4$, $Α = 90^\circ$ και $Γ = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β.
α) Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι $2ΕΓ = ΒΓ$.
γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ,ΒΓ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΜΝ.



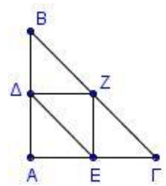
1644. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ = 3$, $ΓΔ = 4$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε $ΑΕ = 1$. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.
α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.



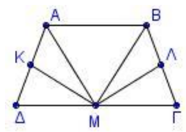
1650. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΒΔ = ΒΓ$. Αν $ΔΒΓ = 110^\circ$ και $ΑΔΒ = 25^\circ$, να υπολογίσετε:
α) Τη γωνία Γ.
β) Τη γωνία Α.



1666. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο.
β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



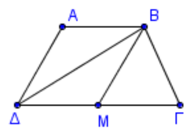
1669. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΚΜ = ΛΜ$
β) $ΑΜ = ΒΜ$

1694. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $ΑΒ = 8$ και $ΔΓ = 12$. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,
α) να αποδείξετε ότι $ΔΗ = ΘΓ$. **β)** να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου.

1697. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $ΑΒ = ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$, $\hat{Δ} = 60^\circ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:



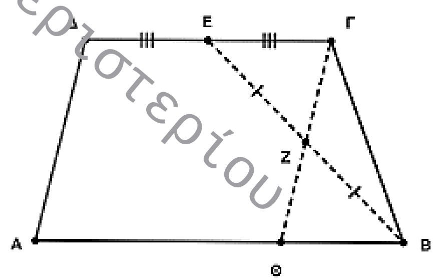
α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

13497.Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ > ΔΓ. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\hat{ΑΔΓ}$.

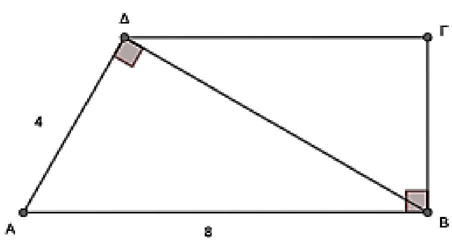
β) Αν $\hat{Α} = 120^\circ$,να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο.

13824.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΓΔ και ΒΕ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΓΕΖ, ΘΒΖ είναι ίσα.
β) ΕΓ=ΘΒ.
γ) Το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο.

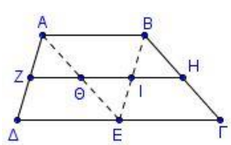
13828.Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:



α) Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{ΔΑΒ}$.
β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.

4ο Θέμα

1711. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ είναι $ΓΔ = 2ΑΒ$. Επίσης Ζ,Η,Ε είναι τα μέσα των ΑΔ,ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ,ΒΕ στα σημεία Θ,Ι αντίστοιχα.

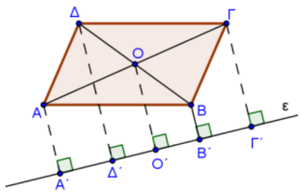


α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να δείξετε ότι τα σημεία Θ,Ι είναι μέσα των ΑΕ,ΒΕ αντίστοιχα.

γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$.

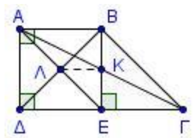
1715. Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ,ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ,Ν μέσα των ΑΒ,ΓΔ αντίστοιχα.
α) Αν τα Α,Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)
i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
1) $ΑΔ < ΒΓ$ 2) $ΑΔ = ΒΓ$.
ii. να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.
β) Αν η (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ,Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1718. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α,Β,Γ,Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε.

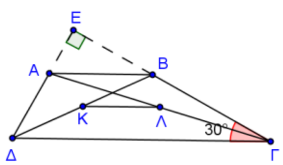


α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $ΓΓ' = 5$, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4.
ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ΄.
β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

1722. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. **β)** Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα.
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ.
δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



1727. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $A = Δ = 90^\circ$, $ΔΓ = 2AB$ και $B = 3Γ$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:
α) $Γ = 45^\circ$ **β)** $ΒΔ = ΑΕ$ **γ)** $ΚΛ = \frac{1}{4}ΔΓ$

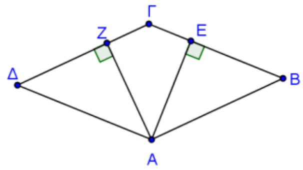


1736. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(AB \parallel ΓΔ\right)$ με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = 2AE$ **β)** $K\Lambda = A\Delta$

γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο;
Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας.

1742. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $B \neq 60^\circ$. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:



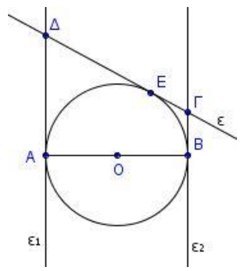
α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.
β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ.
γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1747. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ΄ ένα σημείο του Ε και τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.
α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. **ii.** $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$
β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

1755. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ είναι $AB = A\Delta$.
α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.
β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος.
γ) Αν επιπλέον είναι $BA\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ.

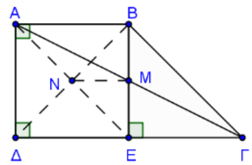
1757. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $A = \Delta = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$.
Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
γ) Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ.

1758. Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.
β) Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.
γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ.

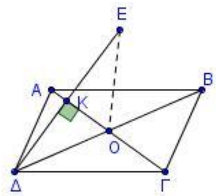
1767. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $A = \Delta = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $B = 3\Gamma$.
Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ.
Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ν.
Να αποδείξετε ότι:



α) $\Gamma = 45^\circ$
β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) $AE \perp B\Delta$

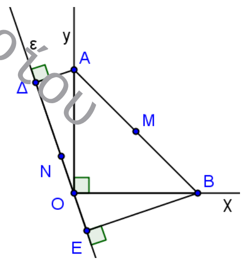
1786. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και τη γωνία Β αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω Μ,Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος.
β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ.

1770. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκταση του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:



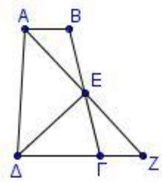
α) $EO = \dfrac{B\Delta}{2}$
β) $\Delta EB = 90^\circ$
γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1778. Δίνεται ορθή γωνία $xOy = 90^\circ$ και Α,Β σημεία των ημιευθειών Oy, Ox με $OA = OB$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το Ο και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε.
Να αποδείξετε ότι:

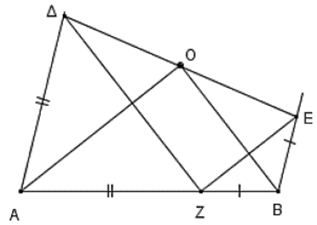


α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα.
β) $A\Delta + BE = \Delta E$
γ) $MN = \dfrac{\Delta E}{2}$, όπου ΜΝ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ.
δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

1783. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές. **β)** Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ.
γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου.

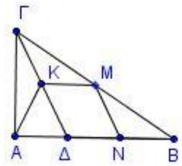


1784. Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ, με ΑΔ//ΒΕ, στο οποίο ισχύει ότι ΑΒ=ΑΔ+ΒΕ, και Ο το μέσον της ΔΕ. Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ=ΑΔ και ΒΖ=ΒΕ . Αν γωνία $\Delta A Z = \varphi$,



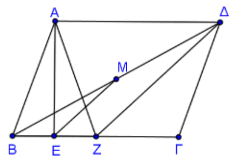
α) να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ σε συνάρτηση με τη φ.
β) να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ σε συνάρτηση με τη φ.
γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα.

1789. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ,Μ,Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



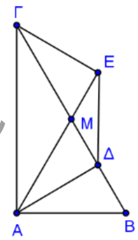
α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με ΑΒ/2.

1790. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70° και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ.
γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$

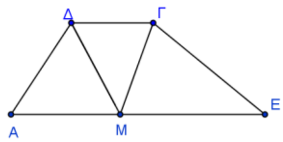
1791. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο.
β) $ME = M\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$
γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

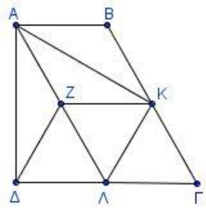
1797. α) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο;
Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

1815. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:



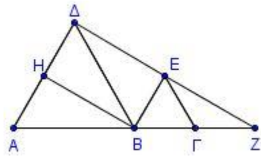
α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές.
γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου.

1821. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\hat{A}=\hat{\Delta}=90^\circ\right)$ με $B\Gamma=\Gamma\Delta=2AB$ και Κ,Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



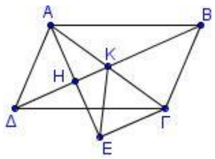
α) $B\Gamma=2\Delta Z$.
β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος.
γ) $A\hat{K}\Lambda=90^\circ$.

1829. Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε $AB=2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την (ε) στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:



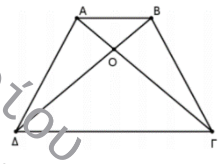
α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο.
β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές.
γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1830. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AH=HE$. Να αποδείξετε ότι:



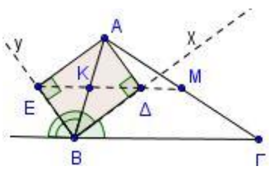
α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.
γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1834. Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $A\Delta=B\Gamma$, $A\Gamma=B\Delta$ και $AB<\Gamma\Delta$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή.
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}B=A\hat{B}\Gamma$.
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1838. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο.
β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.
γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha=B\Gamma$.

1841. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στη διαγώνιο ΒΔ. Αν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές.

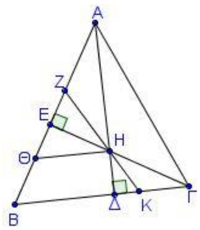
β) $Z\Gamma = 2OE$
γ) Το τετράπλευρο με κορυφές Β, Δ, Ζ και Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1842. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα $\Delta Z = A\Delta$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα.
ii. Τα σημεία Ε,Γ και Ζ είναι συνευθειακά.

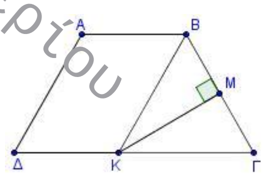
β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε $K\Lambda \parallel \Delta B$ και $K\Lambda = \frac{3}{2}\Delta B$.

1856. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΒΓ και Β<90° θεωρούμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) τέτοιο ώστε ΓΖ=ΒΓ. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, τέτοιο ώστε ΕΓ=ΓΒ, να αποδείξετε ότι:
α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή.
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

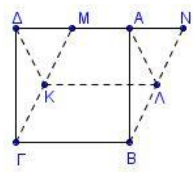
1845. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) $ZH = 2ZE$
β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο.
γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



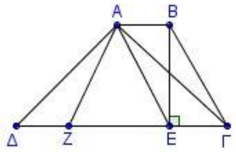
1853. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $B = 2\Gamma$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς τη ΒΓ το τέμνει στο Μ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος.
ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ.



1854. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

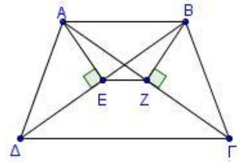


1860. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $ΔΓ = 4ΑΒ$ και $ΒΓ = 2ΑΒ$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $ΔΖ = ΑΒ$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:



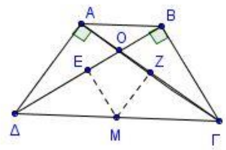
α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο.
γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα.

1861. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ = ΑΒ$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.
β) $ΑΕ = ΒΖ$.
γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ.

1867. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ,Ε και Ζ των ΓΔ,ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΜΕ = ΜΖ$.
β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ.
γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα.
δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

1884. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
γ) Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

≪ Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $Α\overset{\Delta}{Β}Κ$ και $Α\overset{\Delta}{Γ}Κ$ έχουν

1. $ΒΚ = ΚΓ$
2. $ΒΑΚ = ΓΑΚ$ επειδή ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α
3. $ΑΒΚ = ΑΓΚ$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.≫

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία- Πλευρά –Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.

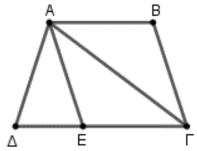
1885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ,Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες. **γ)** οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες.

1893. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.
ii. $AM = \frac{1}{4}A\Gamma$
β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

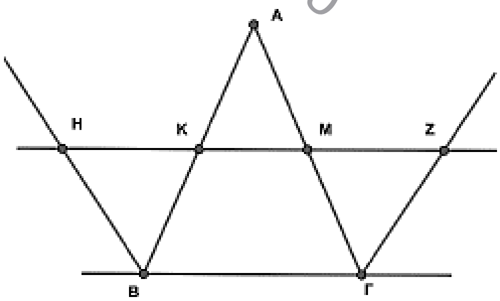
13519. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ = ΑΔ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.
α) Να αποδείξετε ΑΜ ⊥ ΔΕ.
β) Να αποδείξετε ότι 2ΜΚ = 2ΑΒ - ΑΔ.
γ) Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ.

13539. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.



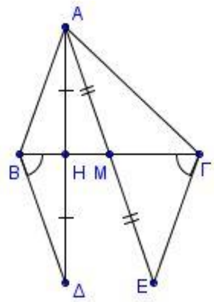
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

13838. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



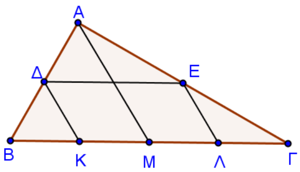
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

14885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα $\mathbf{H\Delta = AH}$ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα $ME = AM$.
Να αποδείξετε ότι:
α) i. $AB = \Gamma E$ **ii.** $AB = B\Delta$
β) $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$

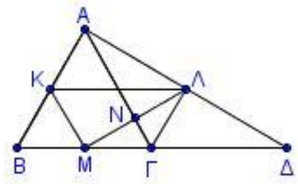


γ) i. Εξετάστε αν το τμήμα ΒΔ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΕ.
ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

14888. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathbf{A=90^\circ}$.
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε $\mathbf{BK=KM=M\Lambda=\Lambda\Gamma}$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο ΚΔΑΜ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\mathbf{\frac{3}{8}B\Gamma}$.



14882. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\mathbf{\Gamma\Delta=B\Gamma}$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, τότε:
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή.
ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.



6ο Κεφάλαιο: Εγγεγραμμένα σχήματα

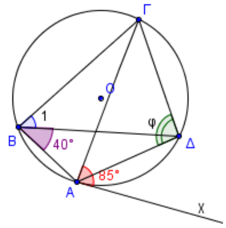
- Αν η κορυφή της είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία λέγεται **επίκεντρη**.
- Αν η κορυφή της γωνίας είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη** γωνία του κύκλου.
- Αν η κορυφή της γωνίας είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται γωνία **χορδής και εφαπτομένης**.

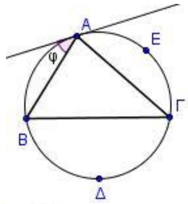
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

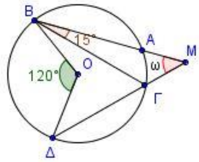
- Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής, ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

1530. Στο διπλανό σχήμα η Αx είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο,ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον $\Gamma A x = 85^\circ$ και $\Delta B A = 40^\circ$.
α) Να αποδείξετε ότι $B_1 = 45^\circ$.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία φ.

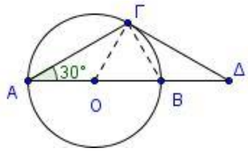




1561. Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι 160°,
α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) να βρείτε το μέτρο του τόξου ΑΕΓ.

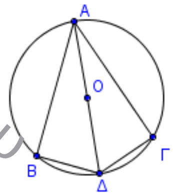


1580. Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία ΒΟΔ είναι 120° και η γωνία ΓΒΑ είναι 15°.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°.

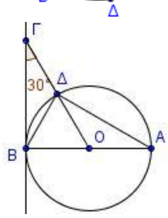


1626. Δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΑΓ τέτοια, ώστε $\text{ΒΑΓ} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΔ είναι ίσα.

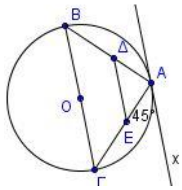
1581. Σε κύκλο κέντρου Ο δίνονται οι χορδές ΑΒ και ΑΔ τέτοιες ώστε η γωνία ΒΑΔ να είναι 44°. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΒΓΔΟ.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία x. **β)** Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136°.



1663. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

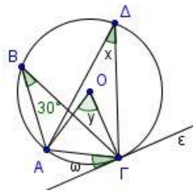


1665. Θεωρούμε κύκλο(Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30°. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ, να αποδείξετε ότι:
α) $\text{ΟΓ} = 2\text{ΟΑ}$
β) $\text{ΒΓ} = \text{ΑΔ}$



1672. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45°. Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

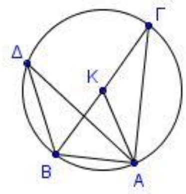
1695. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο, ρ) στο σημείο Γ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές.

1696. Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο, ώστε $ΒΑ = ΚΓ$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,

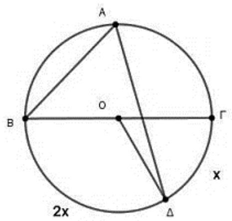


α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο.

β) να υπολογίσετε τη γωνία ΒΔΑ.

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

1703. Έστω κύκλος κέντρου Ο και διαμέτρου ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ.



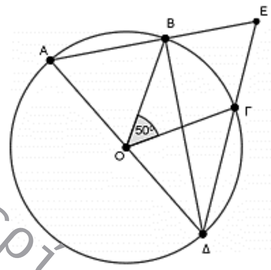
Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο x του τόξου ΓΔ

β) τη γωνία ΒΟΔ,

γ) τη γωνία ΒΑΔ.

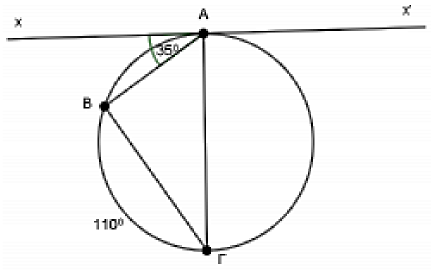
12642. Σε κύκλο με κέντρο το Ο, παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε η ΑΔ να είναι διάμετρος και η γωνία ΒΟΓ να ισούται με 50^o . Αν η προέκταση της ΑΒ προς το Β τέμνει την προέκταση της ΔΓ προς το Γ στο Ε, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της γωνίας ΒΔΓ. **β)** το μέτρο της γωνία ΑΕΔ.

12637. Στο διπλανό σχήμα η xx΄ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και επιπλέον ισχύουν:

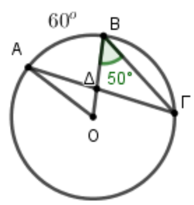
$ΒΑx = 35^\circ$ και $ΒΓ = 110^\circ$.



α) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας Γ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

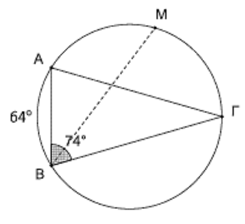
12638. Στον κύκλο του σχήματος, το Ο είναι το κέντρο του, το τόξο ΑΒ ισούται με 60^o και η γωνία Β ισούται με 50^o . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:



α) πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ.

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΟ .

13441.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο, $Β = 74^{\circ}$, το μέτρο του τόξου ΑΒ που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64^{o} και Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.



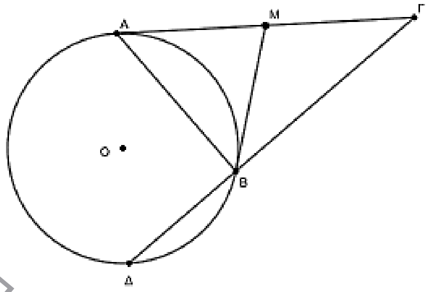
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $Γ$ και $Α$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

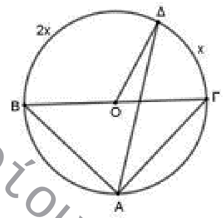
γ) Να αποδείξετε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β$.

13740.Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε μια τυχαία χορδή του ΑΒ, την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του Β κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο της Β που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΔΑ = ΔΓ **β)** Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

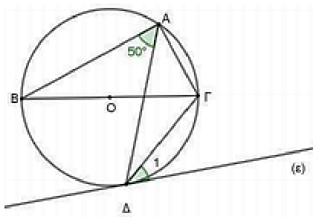
13747.Από σημείο Μ εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΑΜ προς το μέρος του Μ και παίρνουμε τμήμα ΜΓ = ΑΜ. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα ΓΒΔ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
β) Τα σημεία Α και Δ είναι αντιδιαμετρικά.



13753.Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με διάμετρο ΒΓ. Έστω Α και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο ΒΓ. Τα μέτρα των τόξων ΒΔ και ΔΓ είναι 2x και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:
α) της γωνίας ΒΑΓ. **β)** x του τόξου ΓΔ. **γ)** της γωνίας ΒΟΔ.

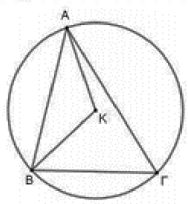


13754.Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με διάμετρο ΒΓ και τα σημεία Α, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου ΒΓ έτσι ώστε $ΒΑΔ = 50^{\circ}$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :
α) ΒΑΓ **β)** ΒΓΔ **γ)** $Δ_1$



13756.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο Σε κύκλο (Κ, ρ). Να αποδείξετε ότι:

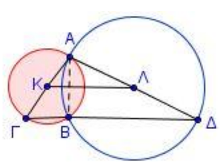
α) $ΑΚΒ = 2ΑΓΒ$
β) το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές.
γ) $ΚΑΒ + ΑΓΒ = 90^{\circ}$.



4ο Θέμα

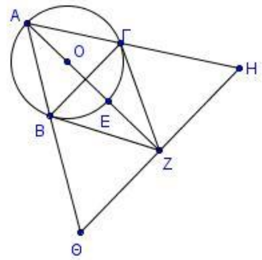
1717. Δύο κύκλοι (Κ, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία Α,Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΒΓ = 90^{\circ}$ **β)** τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά.



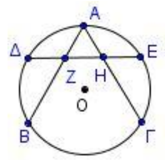
γ) το τετράπλευρο ΚΛΓΔ είναι τραπέζιο.

1720. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:



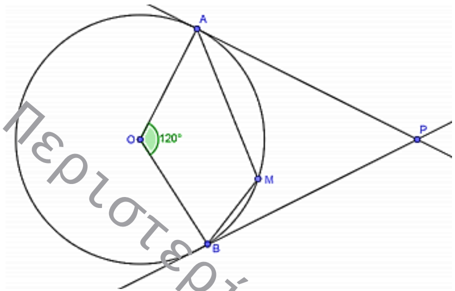
α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο.
β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος.
γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1739. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με 120°. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



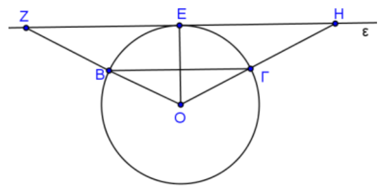
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.
γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

1768. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και μια επίκεντρη γωνία ΑΟΒ ίση με 120°. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο Ρ. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ και φέρουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ, οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις ΡΒ και ΡΑ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο.
β) $\hat{MAB} + \hat{MBA} = 60^\circ$.
γ) Για ποια θέση του Μ είναι $AM \perp BP$;

1772. Έστω κύκλος (Ο, ρ) και Ε το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ,ΟΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

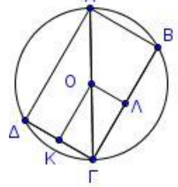


α) $ΒΓ \parallel ΖΗ$
β) $ΟΖ = ΟΗ$
γ) Αν Β το μέσον του ΟΖ

i. να αποδείξετε ότι $\hat{BEZ} = \dfrac{\hat{ZOH}}{4}$.

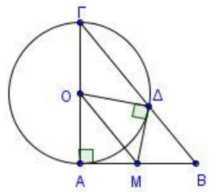
ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ.

1848. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές $ΑΔ = ΒΓ$. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες.
β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. **γ)** Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.
δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο.

1883. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ $\left(A = 90^\circ\right)$. Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

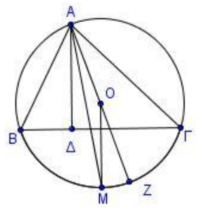


α) $\Gamma A \Delta = B$

β) Το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές.

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

1892. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) ΑΜ διχοτόμος της γωνίας ΔΑΟ.

β) $OA\Gamma = \Delta AB$ **γ)** $\Delta AO = B - \Gamma$

1897. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $\left(O, R\right)$. Έστω σημείο Δ του τόξου ΑΒ τέτοιο, ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp A\Gamma$.

β) Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $OM = \dfrac{AH}{2}$.

12419. Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R> r, τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΓΔ=2ΚΛ

β) Τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.

Το εγγράψιμο τετράπλευρο

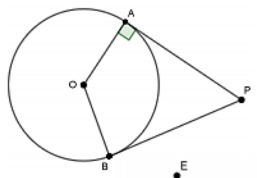
- Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.
- Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

(i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
(ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
(iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.

- Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται περιγεγραμμένο στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται εγγεγραμμένος στο τετράπλευρο αυτό.

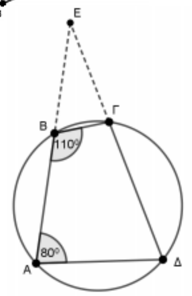
(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.
(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

12641. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 4 cm. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία ΑΡΒ ισούται με 60^o .



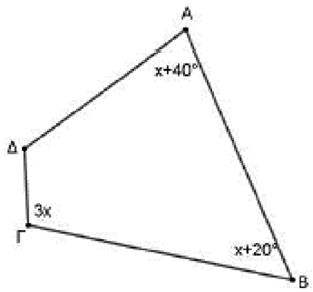
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΡΟ.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΟΡ.

12643. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ε. Αν η γωνία Α του τετραπλεύρου ισούται με 80^o και η γωνία Β ισούται με 110^o , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:



α) το μέτρο της γωνία ΕΓΒ.
β) το μέτρο της γωνία ΒΕΓ.

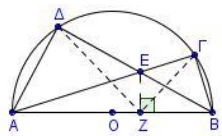
13818.Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες Α, Β, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα x + 40°, x + 20°, 3x. Να υπολογίσετε :
α) πόσες μοίρες είναι το x.
β) τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



4ο Θέμα

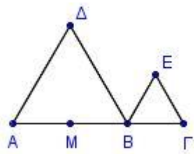
1712. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και έστω ΑΒ μια διάμετρός του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΒΕ = ΑΔ$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα. **ii.** Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.
β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

1769. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Φέρουμε $ΕΖ \perp ΑΒ$.
Να αποδείξετε ότι:



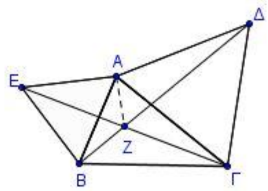
α) $\hat{ΔΑΓ} = \hat{ΔΒΓ}$
β) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα.
γ) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ΔΖΓ}$.

1774. Έστω Α,Β,Γ συνευθειακά σημεία με $ΑΒ = 2ΒΓ$. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο $(ΑΔ \parallel ΒΕ)$.



β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. **γ)** Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο.

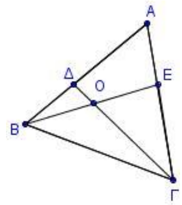
1776. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ , ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΔ, ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών.

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. **γ)** $\widehat{ΒΖΓ} = 120^\circ$.

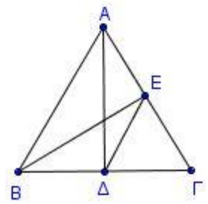
1779. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι $ΑΔ = ΑΕ$. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.



α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\widehat{ΒΕΓ} = \widehat{ΓΔΑ}$. **ii.** $\widehat{ΒΟΓ} = 120^\circ$.

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

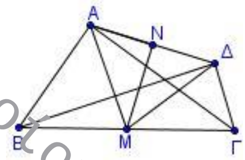
1799. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΒΓ = 2ΕΔ$ **β)** $\widehat{ΒΕΔ} = \frac{\hat{Α}}{2}$.

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. **δ)** $\widehat{ΑΒΕ} = \widehat{ΑΔΕ}$.

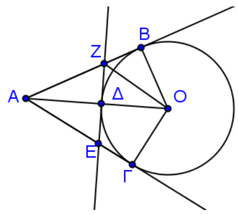
1807. Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^\circ$ και Μ,Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΜ = ΜΔ$ **β)** Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ.

γ) $\widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΓΑΔ}$.

1847. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $\widehat{ΒΑΓ} = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:

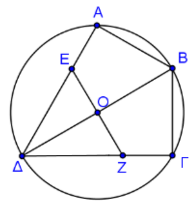
α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με $ΟΑ = 2ΟΒ$.

β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο.

γ) $2ΖΒ = ΑΖ$.

δ) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

1864. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.



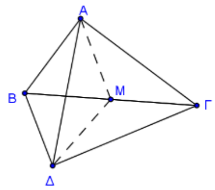
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

β) Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος.

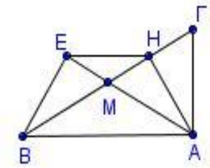
δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

1886. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^\circ\right)$ και ΔΒΓ $\left(\Delta=90^\circ\right)$ (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ.



Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.
β) $\mathrm{AM\Delta}=2\mathrm{A\Gamma\Delta}$ **γ)** $\mathrm{\Gamma B\Delta}=\mathrm{\Gamma A\Delta}$

1896. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^\circ\right)$ έχουμε ότι $\mathrm{B}=30^\circ$.

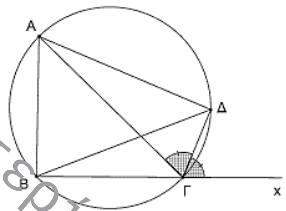


Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{BE}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$ **β)** $\mathrm{AH}=\mathrm{BE}$.

γ) το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο. **δ)** $\mathrm{EH}\parallel\mathrm{AB}$.

13444.Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ. Η γωνία ΔΓx είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΓx.

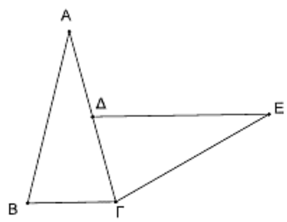


α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{BA\Delta}=\dfrac{1}{2}\mathrm{A\Gamma x}$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του.

γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες ΑΓΒ και ΒΔΓ είναι συμπληρωματικές.

13538.Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με ΑΒ = ΑΓ = ΕΓ = ΕΔ, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $\mathrm{B\Gamma}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα.
β) Αν η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:
i. Το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.)
ii. $\mathrm{EA\Gamma}=\mathrm{EZ\Gamma}$

13670.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα.

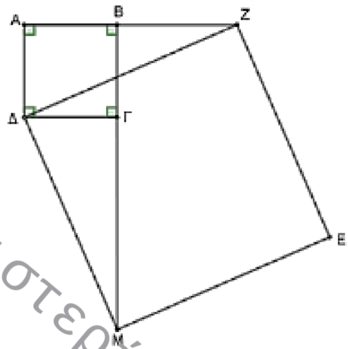
β) Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο.

γ) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E A \Gamma$.

13671.Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(B<\Gamma\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΗΕ = ΕΓ και ΗΖ = ΖΓ.
β) $Z\Delta E = ZHE$ **γ)** Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο.

13521.Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) ΚΛ // ΒΓ.
β) i. ΜΛ = ΚΔ **ii.** ΚΜ = ΔΛ.
γ) Το ΚΛΜΔ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο.

13847.Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ. Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο.
Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα.
β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.
γ) το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο.
δ) οι γωνίες ΒΜΖ και ΒΕΖ είναι ίσες.



13840.Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μία ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η
σχέση ΜΑ = ΜΒ, να αποδείξετε ότι:
α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R).
β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ.
γ) το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο.
δ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx.

14878. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Μ εξωτερικό του. Από το Μ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ευθεία ΜΒ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Να αποδείξετε ότι $B\Lambda \parallel M\Gamma$.

Επαναληπτικά διαγωνίσματα στη Γεωμετρία

1ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες.

β) Αν δύο απέναντι πλευρές τετραπλεύρου είναι παράλληλες τότε αυτό είναι τραπέζιο.

γ) Οι διαγώνιες του ρόμβου είναι ίσες.

δ) Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου είναι κάθετες τότε το τετράπλευρο αυτό είναι ρόμβος.

ε) Σε κάθε παραλληλόγραμμο δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

Α2. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα
$ΒΔ = ΑΒ$ και $ΓΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $ΒΕ = ΓΔ$

Γ2. Τα σημεία Δ,Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ.

Γ3. $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Ε}Δ$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{Α} = 40^\circ$ και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΜΕ // ΑΒ (Ε σημείο του ΑΓ) και ΜΔ//ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι:

Γ1. ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.

Γ2. $\hat{Β} = 70^\circ$

Γ3. Αν το Μ είναι μέσο του ΒΓ τότε η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

Γ4. $Α\hat{Ε}Δ = 70^\circ$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^\circ$ και $\hat{Β} = 30^\circ$. Στη προέκταση της ΑΓ προς το μέρος του Α θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΑΓ$. Έστω Κ,Λ τα μέσα των ΒΓ και ΒΔ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $Β\hat{Α}Κ = Β\hat{Α}Λ = 30^\circ$

Δ2. $ΑΚ = ΑΛ$

Δ3. Το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισόπλευρο.

Δ4. Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΚΛ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

2ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσός του είναι ύψος και διχοτόμος

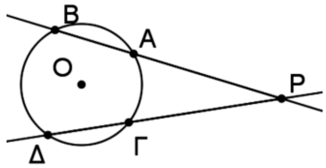
γ) Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες είναι ίσες.

δ) Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.

ε) Το τετράγωνο είναι και ρόμβος.

Θέμα Β

Έστω κύκλος κέντρου Ο και Ρ ένα σημείο στο εξωτερικό του. Από το Ρ φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Α,Β,Γ,Δ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα έτσι ώστε $\mathrm{PA}=\mathrm{P\Gamma}$.



Β1. Να δείξετε ότι η ΟΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{P}\Gamma}$.

Β2. Να δείξετε ότι το Ο ισαπέχει από τα ΑΒ και ΓΔ.

Β3. Να δείξετε ότι $\mathrm{AB}=\mathrm{\Gamma\Delta}$.

Β4. Έστω ότι η ΟΡ τέμνει το τόξο ΑΓ στο Κ. Θεωρούμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Κ που τέμνει τις δύο ευθείες στα Η και Θ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΡΗΘ είναι ισοσκελές.

Θέμα Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και έστω ΒΔ, ΓΕ ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $\mathrm{B\Delta}=\mathrm{\Gamma E}$

Γ2. Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

Γ3. $\hat{\mathrm{B}}=\mathrm{A\hat{E}\Delta}=90^\circ-\dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$

Θέμα Δ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και έστω Δ,Ε,Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΕ κατά ΕΘ=ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $\mathrm{A\Gamma}=2\mathrm{\Delta E}$

Δ2. Το τετράπλευρο ΑΔΘΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Δ3. Τα τμήματα ΑΘ, ΔΓ, ΕΖ συντρέχουν σε σημείο Κ.

Δ4. $\mathrm{KZ}=\dfrac{1}{4}\mathrm{A\Gamma}$.

3ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μικρότερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές.

β) Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι μεταξύ τους ίσα.

γ) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

δ) Κάθε ρόμβος που έχει ίσες διαγώνιες είναι τετράγωνο.

ε) Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Α2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Θέμα Β

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.Στις προεκτάσεις της ΒΓ προς τα Β και Γ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΒΔ = ΑΒ$ και $ΓΕ = ΑΓ$. Έστω Κ και Λ οι προβολές των Δ και Ε στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Β1. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Β2. Να δείξετε ότι τα Δ, Ε ισαπέχουν από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Β3. Να δείξετε ότι $ΒΛ = ΓΚ$.

Θέμα Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{Α} = 40°$. Έστω ότι οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $\hat{Β} = 70°$

Γ2. $Β\hat{Θ}Γ = 110°$

Γ3. ΔΕ//ΒΓ

Γ4. $Β\hat{Δ}Γ = 75°$

Θέμα Δ

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διάμεσός του. Έστω Ε το μέσο της ΑΒ και Ζ το σημείο τομής της παράλληλης από το Δ προς την ΑΒ με την ΑΓ.

Δ1. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο.

Δ2. Να δείξετε το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

Δ3. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος.

Δ4. Προεκτείνουμε τις ΔΕ και ΔΖ κατά τμήματα $ΕΗ = ΔΕ$ και $ΖΘ = ΔΖ$. Να δείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΗΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

β) τα σημεία Η, Α, Θ είναι συνευθειακά.

4ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Α

Α. Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, να γράψετε στη κόλλα σας τον αριθμό που αντιστοιχεί και δίπλα το γράμμα (Σ) αν θεωρείται τη πρόταση σωστή, ή το γράμμα (Λ) αν θεωρείται ότι η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου είναι ίσες

γ) Δύο ευθείες κάθετες προς μία τρίτη ευθεία είναι παράλληλες.

δ) Αν σε ένα τρίγωνο μία γωνία του είναι ίση με 60° ,τότε το τρίγωνο είναι και ισόπλευρο.

ε) ο βαρύκεντρο ισοπλεύρου τριγώνου είναι και ορθόκεντρο.

10 μονάδες

Β. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

15 μονάδες

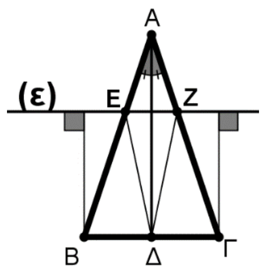
ΘΕΜΑ Β

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. Μονάδες 8

β) τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. Μονάδες 8

γ) τα σημεία Β και Γ ισαπέχουν από την ΕΖ. Μονάδες 9



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\hat{A}=90^\circ$ με $\hat{\Gamma}=30^\circ$ και Δ,Ε τα μέσα των ΑΓ,ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ=ΕΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ρόμβος. Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΕΒ είναι ρόμβος. Μονάδες 8

γ) Αν Η το σημείο τομής των ημιευθειών ΒΑ και ΓΖ ,να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΒΗΓ ως προς τις πλευρές του και να δείξετε ότι έχει διπλάσια περίμετρο από το τρίγωνο ΑΕΒ. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = AN$. Μονάδες 7

Αν Κ το σημείο τομής των ΔΜ,ΑΝ ,να αποδείξετε ότι :

β) τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΜ και ΑΝ είναι κάθετα. Μονάδες 6

γ) ΚΡ=ΒΡ όπου Ρ το μέσο του ΜΝ. Μονάδες 6

δ) Να δείξετε ότι $BP=\dfrac{B\Delta}{4}$. Μονάδες 6

5ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "Σωστό", αν η πρόταση είναι σωστή, και "Λάθος", αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο τρίγωνα έχουν από δύο πλευρές και μία γωνία μία προς μία ίσες τότε είναι πάντοτε ίσα.

β. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι πάντα ίσες.

γ. Ένα παραλληλόγραμμο με διαγώνιες ίσες και κάθετες είναι τετράγωνο.

δ. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, αν ισχύει δ = R - ρ, όπου δ διάκεντρος και R, ρ ακτίνες των κύκλων με R > ρ.

ε. Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

Μονάδες 10

Α2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Μονάδες 15

Θέμα Β

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα.. (Μονάδες 12)

β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $BM\Gamma$. (Μονάδες 13)

Θέμα Γ

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A = 60^\circ$.Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Ε και την ευθεία ΔΓ στο Ζ.

Γ1. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι $Z = 30^\circ$. Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι τραπέζιο. Μονάδες 5

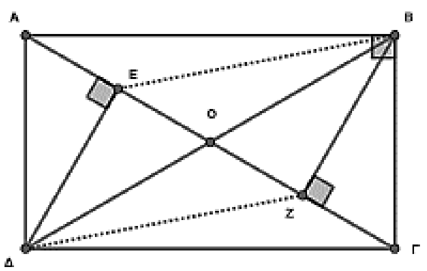
Θέμα Δ

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ >ΑΔ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\Delta AE = 60^\circ$ και ΟΕ= 5, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ. (Μονάδες 12)




14ο ΓΕ.Λ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ