18η Άσκηση

Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $(x-2)P(x)+(x-1)P(x+2)=x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι -2, τότε:

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-4$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το x^2-6x+8.

γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$.

δ) Αν το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού, τότε να βρεθεί.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι -2, ισχύει ότι: $P(2)=-2$.

Το ζητούμενο υπόλοιπο υ είναι: $\upsilon=P(4)$.

Για $x=2$ η δοθείσα σχέση γίνεται: $(2-2)P(2)+(2-1)P(2+2)=2^2 \Leftrightarrow P(4)=4$

β) Επειδή ο διαιρέτης είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $P(x):\left(x^2-6x+8\right)$ θα είναι το πολύ 1ου βαθμού. Έστω ότι $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$, τότε αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της προηγούμενης διαίρεσης, ισχύει ότι: $P(x)=\left(x^2-6x+8\right)\pi(x)+\kappa x+\lambda$.

Είναι $P(2)=-2 \Leftrightarrow \left(2^2-6\cdot 2+8\right)\pi(2)+2\kappa+\lambda=-2 \Leftrightarrow 2\kappa+\lambda=-2 \ (1)$

Είναι $P(4)=4 \Leftrightarrow \left(4^2-6\cdot 4+8\right)\pi(4)+4\kappa+\lambda=4 \Leftrightarrow 4\kappa+\lambda=4 \ (2)$

Από $(2)-(1) \Rightarrow 4\kappa+\lambda-2\kappa-\lambda=4+2 \Leftrightarrow 2\kappa=6 \Leftrightarrow \kappa=3$ και από την $(1) \Rightarrow 6+\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=-8$.

Άρα $\upsilon(x)=3x-8$

γ) Για $x=1$ η δοθείσα σχέση γίνεται: $(1-2)P(1)+(1-1)P(1+2)=1^2 \Leftrightarrow -P(1)=1 \Leftrightarrow P(1)=-1$.

δ) Έστω $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$

Η σχέση $(x-2)P(x)+(x-1)P(x+2)=x^2$ για $x=0$ γίνεται:

$-2P(0)-P(2)=0 \Leftrightarrow -2P(0)+2=0 \Leftrightarrow P(0)=1 \Leftrightarrow \delta=1$

$P(2)=-2 \Leftrightarrow 8\alpha+4\beta+2\gamma+\delta=-2 \Leftrightarrow 8\alpha+4\beta+2\gamma+1=-2 \Leftrightarrow 8\alpha+4\beta+2\gamma=-3 \ (3)$,

$P(4)=4 \Leftrightarrow 64\alpha+16\beta+4\gamma+1=4 \Leftrightarrow 64\alpha+16\beta+4\gamma=3 \ (4)$ και

$P(1)=-1 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma+1=-1 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=-2 \Leftrightarrow \gamma=-2-\alpha-\beta \ (5)$

Από $(3),(5) \Rightarrow 8\alpha+4\beta+2(-2-\alpha-\beta)=-3 \Leftrightarrow 8\alpha+4\beta-4-2\alpha-2\beta=-3 \Leftrightarrow 6\alpha+2\beta=1 \Leftrightarrow$

$\beta=\dfrac{1-6\alpha}{2} \ (6)$

Από $(4),(5) \Rightarrow 64\alpha+16\beta+4(-2-\alpha-\beta)=3 \Leftrightarrow 64\alpha+16\beta-8-4\alpha-4\beta=3 \Leftrightarrow 60\alpha+12\beta=11 \overset{(6)}{\Rightarrow}$

$60\alpha+\cancel{12}^{6}\dfrac{1-6\alpha}{\cancel{2}}=11 \Leftrightarrow 60\alpha+6-36\alpha=11 \Leftrightarrow 24\alpha=5 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{5}{24}$, τότε $(6) \Rightarrow \beta=\dfrac{1-6\frac{5}{24}}{2}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{2}=-\dfrac{1}{8}$

και από $(5) \Rightarrow \gamma=-2-\dfrac{5}{24}+\dfrac{1}{8}=-\dfrac{25}{12}$. Άρα $P(x)=\dfrac{5}{24}x^3-\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{25}{12}x+1$.