ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και

$f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Α2. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$, αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$.

Α3. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-3i|+|\bar z+3i|=2\Leftrightarrow|z-3i|+|\overline{z-3i}|=2\overset{|\overline{z-3i}|=|z-3i|}{\Leftrightarrow}2|z-3i|=2\Leftrightarrow|z-3i|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Β2. $|z-3i|=1\Leftrightarrow|z-3i|^2=1\Leftrightarrow(z-3i)\overline{(z-3i)}=1\Leftrightarrow(z-3i)(\bar z+3i)=1$ (1)

Επειδή $z\ne 3i$ αφού $|3i-3i|=0\ne1$, η (1) γίνεται: $\bar z+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

Β3. Είναι $w = z - 3i + \dfrac{1}{z-3i} \overset{(1)}{\Rightarrow} w = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ άρα $w \in \mathbb{R}$

Εστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, τότε: $|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 1 - x^2$

Επειδή $(y-3)^2 \geq 0$ είναι

$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$

Β4. Επειδή $w = z + \bar{z}$, έχουμε: $|z - w| = |z - z - \bar{z}| = |-\bar{z}| = |z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = \left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow$

$\left(e^x f'(x) - e^x\right)' = \left(xf'(x)\right)' \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c \Leftrightarrow e^x f'(x) - xf'(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$ (1)

Για $x = 0$ η (1) γίνεται: $0 = 1 + c \Leftrightarrow c = -1$, άρα

$e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow \left(e^x - x\right)f'(x) = e^x - 1$ (2)

Εστω $g(x) = e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x - 1$.

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι

$g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0) = 1$, άρα

$g(x) \geq g(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g(x) \neq 0$ και η (2) γίνεται:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{\left(e^x - x\right)'}{e^x - x} \overset{e^x - x \geq 1 > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \ln\left(e^x - x\right) + c',\ c' \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c' \Leftrightarrow c' = 0$, άρα $f(x) = \ln\left(e^x - x\right),\ x \in \mathbb{R}$.

Γ2. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \geq 0 \overset{e^x - x > 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$, άρα

$f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

Γ3. $f''(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x - x}\right)' = \left(\dfrac{e^x - x + x - 1}{e^x - x}\right)' = \left(1 + \dfrac{x - 1}{e^x - x}\right)' = \dfrac{e^x - x - (x-1)\left(e^x - 1\right)}{\left(e^x - x\right)^2} \Leftrightarrow$

$$f''(x) = \frac{e^x - x - xe^x + x + e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}$$

Εστω $h(x) = 2e^x - xe^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x(1 - x)$.

$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Για κάθε $x < 1$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [0, +\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x - xe^x - 1\right) = -1$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x - xe^x - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x(2-x) - 1\right) = -\infty$ και $h(1) = e - 1$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$h(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} h(x), h(0)\right] = (-1, e-1]$.

Επειδή $0 \in (-1, e-1)$ υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$ και $h \nearrow (-\infty, 0]$ άρα το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της h στο $(-\infty, 0]$

Στο διάστημα $\Delta_2 = [0, +\infty)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$h(\Delta_2) = \left[h(0), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right) = [-1, +\infty)$.

Επειδή $0 \in (-1, +\infty)$ υπάρχει $x_2 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_2) = 0$ και $h \searrow [0, +\infty)$ άρα το x_2 είναι η μοναδική ρίζα της h στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x < x_1 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_1) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty, x_1]$.

Για κάθε $x_1 < x < 0 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x_1) < h(x) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[x_1, 0]$.

H f έχει σημείο καμπής το $(x_1, f(x_1))$.

Για κάθε $0 < x < x_2 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_2) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[0, x_2]$.

Για κάθε $x > x_2 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_2) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $[x_2, +\infty)$.

H f έχει σημείο καμπής το $(x_2, f(x_2))$.

Γ4. Εστω $\varphi(x) = \ln\left(e^x - x\right) - \text{συν}x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $\varphi(0) = -1 < 0$ και $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Από το Γ1 είναι $g \nearrow [0, +\infty)$ και

$\dfrac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > g(0) \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{\pi}{2} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{\pi}{2}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$

Επειδή $\varphi(0)\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$ και η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, λόγω του Θ.Bolzano υπάρχει

$x_3 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_3) = 0$.

H φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ με $\varphi'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} + \text{ημ}x > 0$, αφού $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} > 0$

και $\text{ημ}x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε η x_3

είναι η μοναδική ρίζα της $\varphi(x) = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $x+t=u \Leftrightarrow t=u-x$, οπότε $dt=du$.

Για $t=0$ είναι $u=x$ και για $t=-x$ είναι $u=0$, οπότε:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{\frac{e^{2u}}{e^{2x}}}{g(u)}du \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\frac{1}{e^{2x}}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow 1-f(x)=\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow$$

$f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$. Όμοια από τη σχέση $\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$ προκύπτει ότι

$g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du$.

Είναι $f'(x)=\left(1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\right)'=\frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x)=e^{2x}$ (1) και

$g'(x)=\left(1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du\right)'=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)g'(x)=e^{2x}$ (2)

Από τις (1), (2) είναι $f'(x)g(x)=f(x)g'(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c \Leftrightarrow f(x)=cg(x),\ c\in\mathbb{R}$$

Είναι $f(0)=1+\int_0^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du=1$ και $g(0)=1+\int_0^0\frac{e^{2u}}{f(u)}du=1$, άρα $f(0)=cg(0) \Leftrightarrow c=1$,

οπότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Επειδή $f(x)=g(x)$, η σχέση $f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$ γίνεται: $f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,

η συνάρτηση $\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du\right)'=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c,\ c\in\mathbb{R}$. Επειδή $f(0)=1$ είναι $c=0$, οπότε

$\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}=\left(e^x\right)^2$ και επειδή $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ3. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$ (1)

Θέτουμε $\dfrac{1}{x}=u$ με $\lim\limits_{x\to 0^-}u=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{u\to -\infty}\frac{\frac{1}{u}}{e^u}=\lim_{u\to -\infty}\frac{1}{ue^u}=\lim_{u\to -\infty}\frac{e^{-u}}{u}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{u\to -\infty}\frac{-e^{-u}}{1}=-\infty$$

Δ4. Είναι $f\left(t^2\right)=e^{t^2}>0$, άρα $F(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα

$$E(\Omega)=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 x'\cdot F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=-\cancelto{0}{F(1)}+\int_0^1 xf\left(x^2\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$$