Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

4ο Διαγώνισμα

22-3-2021

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, τότε η θέση του είναι μοναδική».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

β) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει:

i. μια, τουλάχιστον , ρίζα στο $(0,1)$.

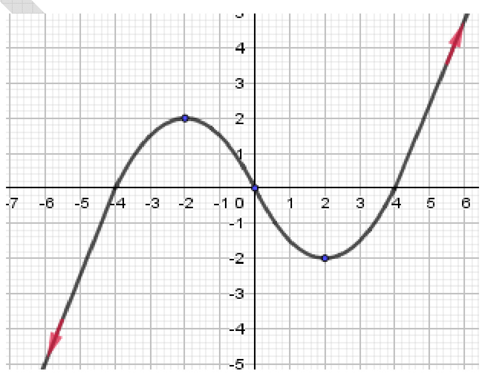
ii. μια, ακριβώς , ρίζα στο $(-1,0)$.

iii. τρείς πραγματικές ρίζες.

μονάδες 2+2+6

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας τρείς φορές παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



Β1. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f.

μονάδες 8

Β2. Γνωρίζοντας ότι η f' είναι περιττή, να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας δικές σας τιμές στην f, να σχεδιάσετε μια πιθανή γραφική της παράσταση.

μονάδες 3+4

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

μονάδες 3

Β4. Να αποδείξετε ότι $f''(-2) = f''(2) = 0$.

μονάδες 4

Β5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

μονάδες 3

Θέμα Γ

Δύο γλάροι Α, Β πετούν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι γλάροι βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο και απέχουν μεταξύ τους 100 μέτρα.

Γ1. Αν οι τροχιές τους είναι οριζόντιες και κινούνται με αντίθετη φορά με μέτρο της ταχύτητας 20m/min και έστω $x(t)$ η συνάρτηση θέσης του γλάρου Β, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η απόστασή τους τη χρονική στιγμή t είναι $d(t)=\sqrt{4x^2(t)+100^2}$.

β) Να βρείτε την απόσταση αυτών, όταν ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής τους είναι 10 m/min.

Μονάδες 5,5

Γ2. Έστω η τροχιά του γλάρου Α που είναι χαμηλότερα είναι οριζόντια και του γλάρου Β σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα γωνία 45 μοιρών και ο γλάρος πλησιάζει προς το έδαφος. Αν οι γλάροι κινούνται εκατέρωθεν της κατακόρυφου, με $-x(t)$ η συνάρτηση θέσης του γλάρου Α και η ταχύτητα απομάκρυνσης του Β από τη κατακόρυφο είναι $x'(t)=20$m/min και ίση κατά μέτρο με την ταχύτητα του γλάρου Α,

α) Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t η απόσταση των γλάρων είναι

$$d(t)=\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}$$

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης τους, όταν ο γλάρος Α έχει διανύσει απόσταση 100m.

Μονάδες 8,7

Μη φάτε, έχουμε γλαρόσουπα

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$, $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

Δ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

μονάδες 7

Δ2.Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $(1-\alpha)\ln x+\alpha+1=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$.

μονάδες 6

Δ3.Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να διέρχεται από το σημείο τομής της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x , δηλαδή από το σημείο $A(e,0)$.

μονάδες 7

Δ4.Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και να γίνει μια πρόχειρη γραφική της παράσταση.

μονάδες 5

Καλή Τύχη!

Θέμα Α

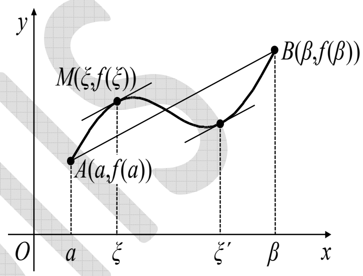
Α1. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)



τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

Α3. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστο, το y = 1, σε καθένα από τα σημεία 2κπ + π/2, $\kappa\in\mathbb{Z}$ και ελάχιστο, το y = −1, σε καθένα από τα σημεία 2κπ − π/2, $\kappa\in\mathbb{Z}$, αφού $-1\leq\eta\mu x\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α4. α) Λ β) Σ γ) i. Λ ii. Σ iii. Λ

Θέμα Β

Β1. Για κάθε $x\in(-\infty,-4)\cup(0,4)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty,-4]$ και $[0,4]$, είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.
Για κάθε $x\in(-4,0)\cup(4,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $[-4,0]$ και $[4,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.
Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-4)$, τοπικό μέγιστο το $f(0)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(4)$.
Στο διάστημα $(-\infty,-2]$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.
Στο διάστημα $[-2,2]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.
Στο διάστημα $[2,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.
Η f έχει σημεία καμπής τα $(-2,f(-2))$ και $(2,f(2))$.

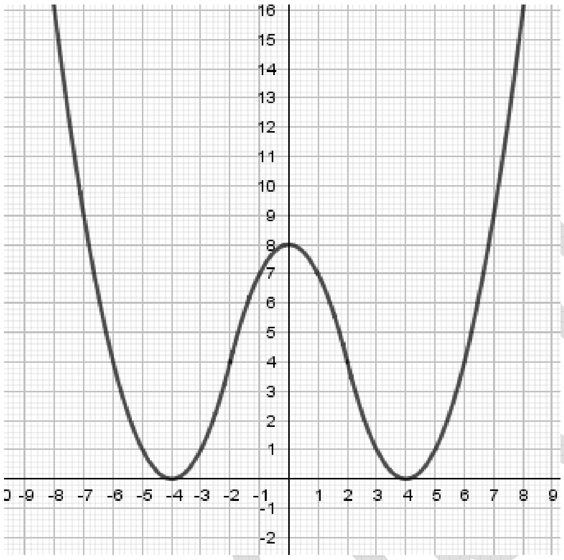
Β2. Επειδή η f' είναι περιττή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)\Leftrightarrow (f(-x))'=f'(x)\Leftrightarrow f(-x)=f(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Για x = 0 είναι $f(0)=f(0)+c\Leftrightarrow c=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x)=f(x)$, οπότε η f είναι άρτια.

x	$-\infty$ … -4	-4 … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … 4	4 … $+\infty$
f'	$-$ ↗	$+$ ↗	$+$ ↘	$-$ ↘	$-$ ↗	$+$ ↗
f	↘	↗	↗	↘	↘	↗

Έστω $f(-4)=f(4)=0$, $f(-2)=f(2)=4$ και $f(0)=8$



B3. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του De L' Hospital έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=+\infty$

B4. Η f έχει σημεία καμπής τα $(-2,f(-2))$ και $(2,f(2))$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά $f''(-2)=0$ και $f''(2)=0$.

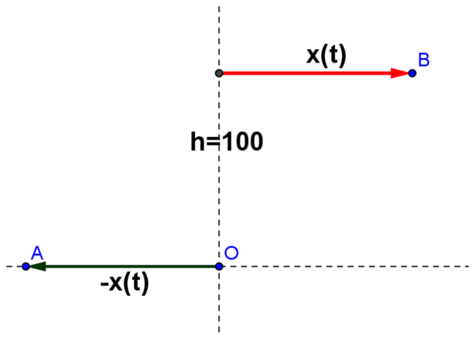
B5. Η f'' είναι συνεχής $[-2,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$. Επειδή $f''(-2)=f''(2)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$.

Θέμα Γ

Γ1. α) Α τρόπος: Θεωρούμε x΄x την ευθεία πάνω στην οποία κινείται ο γλάρος Α και y΄y την κατακόρυφο πάνω στην οποία βρίσκονται οι δυο γλάροι τη χρονική στιγμή t=0.

Αφού x(t) είναι η συνάρτηση θέσης του γλάρου Β τότε η συνάρτηση θέσης του γλάρου Α θα είναι –x(t) αφού οι ταχύτητές τους είναι κατά μέτρο ίσες και κινούνται κατά αντίθετη φορά.

Οι συντεταγμένες των Α και Β τη χρονική στιγμή t θα είναι αντίστοιχα A(-x(t),0) και B(x(t),100) οπότε η απόστασή τους θα είναι AB=$\sqrt{(2x(t))^2+100^2}$ ή $d(t)=\sqrt{4x^2(t)+100^2}$



β) $d(t)=\sqrt{4x^2(t)+100^2} \Leftrightarrow d^2(t)=4x^2(t)+100^2$ τότε $2d(t)d'(t)=8x(t)x'(t) \Leftrightarrow d(t)d'(t)=4x(t)x'(t)$ ή $d(t)d'(t)=80x(t)$ οπότε για $t=t_0$, $d(t_0)10=80x(t_0)$, $d(t_0)=8x(t_0)\Leftrightarrow\sqrt{4x^2(t_0)+100^2}=8x(t_0)\Leftrightarrow 4x^2(t_0)+100^2=64x^2(t_0)$

$\Leftrightarrow x^2(t_0)=\dfrac{100^2}{60}\Leftrightarrow x(t_0)=\dfrac{100}{\sqrt{60}}\,(x(t_0)>0)$ άρα $d(t_0)=\dfrac{800}{\sqrt{60}}=\dfrac{400}{\sqrt{15}}\,m/min$

Β τρόπος:

α) Αφού $x'(t)$ =20m/min θα είναι $x(t)$ =20t +c και αφού για t=0 είναι x(t)=0 το c=0 και άρα $x(t)$ =20t οπότε οι συντεταγμένες των Α και Β τη χρονική στιγμή t θα είναι αντίστοιχα A(-x(t),0) και B(x(t),100) οπότε η απόστασή τους θα είναι AB=$\sqrt{(2x(t))^2+100^2}$

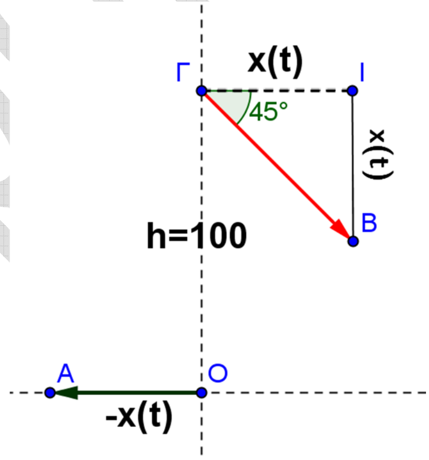
β) Είναι $d(t)=\sqrt{40^2t^2+100^2}$ και άρα $d'(t)=\dfrac{40^2t}{\sqrt{40^2t^2+100^2}}$ οπότε για t το t_0 $d'(t_0)=\dfrac{40^2t_0}{\sqrt{40^2t_0{}^2+100^2}}$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{40^2t_0{}^2+100^2}=40^2t_0\Leftrightarrow\sqrt{40^2t_0{}^2+100^2}=4.40t_0\Leftrightarrow 40^2t_0{}^2+100^2=16.40^2t_0{}^2\Leftrightarrow 100^2=15.40^2t_0{}^2$

$\Leftrightarrow\dfrac{100^2}{15.40^2}=t_0{}^2\Leftrightarrow\dfrac{100}{\sqrt{15.40}}=t_0$ και άρα $d(t_0)=\sqrt{40^2\dfrac{10^2}{16.15}+100^2}$

$\Leftrightarrow d(t_0)=\sqrt{100\dfrac{10^2}{15}+100^2}=100\sqrt{\dfrac{1}{15}+1}=100\sqrt{\dfrac{16}{15}}=\dfrac{400}{\sqrt{15}}\,m/min$

Γ2. Θεωρούμε x΄x την ευθεία πάνω στην οποία κινείται ο γλάρος Α και y΄y την κατακόρυφο πάνω στην οποία βρίσκονται οι δυο γλάροι τη χρονική στιγμή t=0.
Οι συντεταγμένες του γλάρου Β είναι B(x(t),100-x(t)) αφού η γωνία θ είναι 45^0 οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και τότε -x(t) θα είναι η συνάρτηση θέσης του γλάρου Α οπότε οι συντεταγμένες του Α θα είναι A(-x(t),0) .



α) AB=$\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}$,

$d(t)=\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}$ (1)

β) $(1)\Rightarrow d'(t)=\dfrac{8x(t)x'(t)-2(100-x(t))x'(t)}{2\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}}$

$\Rightarrow d'(t)=\dfrac{4x(t)x'(t)-(100-x(t))x'(t)}{\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}}\Rightarrow d'(t)=\dfrac{4x(t)20-(100-x(t))20}{\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}}$

$\Rightarrow d'(t_0)=\dfrac{4x(t)20-(100-x(t))20}{\sqrt{(2x(t_0))^2+(100-x(t_0))^2}}=\dfrac{8000}{\sqrt{40000}}$ οπότε $d'(t_0)=\dfrac{8000}{200}=40$ m/min

Β΄ τρόπος

AB=$\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}$, $d(t)=\sqrt{(2x(t))^2+(100-x(t))^2}$

Αφού $x'(t)$ =20m/min και x(0)=0 θα είναι x(t)=20 m και άρα $d(t)=\sqrt{4.20^2t^2+(100-20t)^2}$

$=20\sqrt{4t^2+(5-t)^2}=20\sqrt{5t^2-10t+25}\Rightarrow d'(t)=20\dfrac{10t-10}{2\sqrt{5t^2-10t+25}}\Rightarrow d'(t)=10\dfrac{10t-10}{\sqrt{5t^2-10t+25}}$

Όμως $x(t_0)=100$ οπότε $20t_0=100\Leftrightarrow t_0=5$ και άρα $\Rightarrow d'(t)=10\dfrac{40}{\sqrt{100}}=40\,m/min$

Θέμα Δ

Δ1.Αναζήτηση κατακόρυφης ασύμπτωτης

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$ άρα η ευθεία x=0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}-\lim\limits_{x\to e^-}\left[\dfrac{1}{\ln x-1}(\ln x+1)\right]=-\infty\cdot 2=-\infty$ διότι

$x\to e^-\Rightarrow x<e\Rightarrow \ln x<1\Rightarrow \ln x-1<0$ στην γειτονιά του e^-.

$\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=\lim\limits_{x\to e^+}\left[\dfrac{1}{\ln x-1}(\ln x+1)\right]=+\infty\cdot 2=+\infty$

διότι $x\to e^+\Rightarrow x>e\Rightarrow \ln x>1\Rightarrow \ln x-1>0$ στην γειτονιά του e^+.

Άρα η $x=e$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x+1)'}{(\ln x-1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Δ2. $(1-\alpha)\ln x+\alpha+1=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)\Leftrightarrow$

$\ln x-\alpha\ln x+\alpha+1=0\Leftrightarrow \ln x+1=\alpha\ln x-\alpha\Leftrightarrow \alpha(\ln x-1)=\ln x+1\Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$, $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f. Εξετάζουμε την f ως προς την μονοτονία.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,e)\cup(e,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{(\ln x+1)'(\ln x-1)-(\ln x+1)(\ln x-1)'}{(\ln x-1)^2}=\frac{\frac{1}{x}(\ln x-1)-(\ln x+1)\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2}=\frac{-2}{x(\ln x-1)^2}<0$$

για κάθε $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $A_1=(0,e)$ και $A_2=(e,+\infty)$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,e)$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to e^-}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=(-\infty,1)$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=(e,+\infty)$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to e^+}f(x)\right)=(1,+\infty)$. Οπότε $f(A)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Για $\alpha<1$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μια ακριβώς λύση ως γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,e)$ αφού το α ανήκει μόνο στο $f(A_1)$.

Για $\alpha=1$ η εξίσωση $f(x)=\alpha=1$ δεν έχει λύση διότι $1\notin f(A)$

Για $\alpha>1$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μια ακριβώς λύση ως γνησίως φθίνουσα στο $A_2=(e,+\infty)$, αφού το α ανήκει μόνο στο $f(A_2)$.

Δ3. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με σημείο επαφής $M(x_0,f(x_0))$, $x_0\in(0,e)\cup(e,+\infty)$ που διέρχεται από το $A(e,0)$.

Αν υπάρχει αυτή η εφαπτομένη θα έχει εξίσωση :

$y-f(x_0)=f'(x)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\dfrac{\ln x_0+1}{\ln x_0-1}=\dfrac{-2}{x_0(\ln x_0-1)^2}(x-x_0)$

Αυτή διέρχεται από το σημείο $A(e,0)$, οπότε

$$-\frac{\ln x_0+1}{\cancel{\ln x_0}-1}=\frac{-2}{x_0\left(\ln x_0-1\right)^{\cancel{2}}}\left(e-x_0\right)\Leftrightarrow x_0\left(\ln^2 x_0-1\right)=2e-2x_0 \Leftrightarrow\ x_0\left(\ln^2 x_0-1\right)+2x_0-2e=0$$

Έστω η συνάρτηση $h\left(x\right)=x\left(\ln^2 x-1\right)+2x-2e$, $x\in\left(0,e\right)\cup\left(e,+\infty\right)$.

Είναι $h'\left(x\right)=\ln^2 x-1+2x\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\Leftrightarrow h'\left(x\right)=\ln^2 x+2\ln x+1=\left(\ln x+1\right)^2\geq 0$

Η ισότητα ισχύει μόνο στο μεμονωμένο σημείο $x=\frac{1}{e}$,η h συνεχής στο $\left(0,e\right)\cup\left(e,+\infty\right)$,άρα h γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(0,e\right)$ και $\left(e,+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\left(\ln^2 x-1\right)\right]\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x-1}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}2x=0,$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}h\left(x\right)=-2e$, $\lim\limits_{x\to e^-}h\left(x\right)=\lim\limits_{x\to e^-}\left[x\left(\ln^2 x-1\right)+2x-2e\right]=0$, $\lim\limits_{x\to e^+}h\left(x\right)=0$,

$\lim\limits_{x\to +\infty}h\left(x\right)=\left[x\left(\ln^2 x-1\right)+2x-2e\right]=+\infty$.

Η h συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=\left(0,e\right)\Rightarrow h\left(A_1\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}h\left(x\right),\lim\limits_{x\to e^-}h\left(x\right)\right)=\left(-2e,0\right)$

Η h συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=\left(e,+\infty\right)\Rightarrow h\left(A_2\right)=\left(\lim\limits_{x\to e^+}h\left(x\right),\lim\limits_{x\to +\infty}h\left(x\right)\right)=\left(0,+\infty\right)$

Άρα $h\left(A\right)=\left(-2e,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$.

Όμως $0\notin h\left(A\right)$ οπότε η εξίσωση $h\left(x\right)=0$ δεν έχει λύση για $x\in\left(0,e\right)\cup\left(e,+\infty\right)$.

Άρα δεν υπάρχει $x_0\in\left(0,e\right)\cup\left(e,+\infty\right)$ που να ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ η οποία να διέρχεται από το σημείο $A\left(e,0\right)$

Δ4.Για κάθε $x\in\left(0,e\right)\cup\left(e,+\infty\right)$ έχουμε $f''\left(x\right)=\left(\frac{-2}{x\left(\ln x-1\right)^2}\right)'=2\frac{\left(x\left(\ln x-1\right)^2\right)'}{x^2\left(\ln x-1\right)^4}=$

$$2\frac{\left(\ln x-1\right)^2+2x\left(\ln x-1\right)\frac{1}{x}}{x^2\left(\ln x-1\right)^4}=2\frac{\ln^2 x-1}{x^2\left(\ln x-1\right)^4}=\frac{2\left(\ln x+1\right)}{x^2\left(\ln x-1\right)^3}$$

$f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

$\ln x+1\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq -1\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{e}$,$\left(\ln x-1\right)^3\geq 0\Leftrightarrow \ln x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq e$

x	0	1/e	e +∞
$\ln x+1$	-	+	+
x^2	+	+	+
$(\ln x-1)^3$	-	-	+
$f''(x)$	+	-	+
f(x)	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Άρα η f είναι κυρτή στα (0, 1/e] ,$\left(e,+\infty\right)$ και f κοίλη στο [1/e,e)

Το σημείο A(1/e,f(1/e)) ή A(1/e,0) είναι σημείο καμπής.

Οπότε ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	0	1/e	e	+∞

$f'(x)$	-	-	-
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Και η γραφική της παράσταση είναι: