14η Άσκηση

Εφαπτομένη

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $x_0=1$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $A(1,1)$ και για τις οποίες ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)g(1+h)-f(1+h)-g(1+h)+h^2+1}{h^2}=0$.

α) Να δείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται εφαπτομένες κάθετες στο Α.

β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xg(x)-1}{x-1}=1+g'(1)$

γ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x f(x)-e}{x-1}=e(1+f'(1))$.

δ) Έστω $f(1+h)=h^2+2h+1$ για κάθε $h\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις εφαπτομένες των C_f, C_g στο Α.

ii. Να βρείτε την f.

iii. Αν $g(x)=\dfrac{\kappa}{x}+\lambda$ να βρείτε τα $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

iv. Αν $M(\alpha,\beta)$ με $\alpha^2>\beta$, να δείξετε ότι από το Μ άγονται δύο εφαπτομένες προς τη C_f.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=1$ ισχύει ότι:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-1}{h}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$$ και

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-1}{h}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}$$. Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)g(1+h)-f(1+h)-g(1+h)+h^2+1}{h^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)g(1+h)-f(1+h)-g(1+h)+1}{h^2}+\frac{h^2}{h^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)\big(g(1+h)-1\big)-\big(g(1+h)-1\big)}{h^2}+1\right)=0\Leftrightarrow\lim_{h\to 0}\left(\frac{\big(g(1+h)-1\big)\big(f(1+h)-1\big)}{h^2}+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(1+h)-1}{h}\cdot\frac{f(1+h)-1}{h}+1\right)=0\Leftrightarrow f'(1)g'(1)+1=0\Leftrightarrow f'(1)g'(1)=-1\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$$. Άρα οι C_f, C_g δέχονται εφαπτομένες κάθετες στο Α.

β) $$\lim_{x\to 1}\frac{xg(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{xg(x)-x+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\big(g(x)-1\big)}{x-1}+1\right)=1\cdot g'(1)+1=g'(1)+1$$

γ) $$\lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)-e^x+e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x\big(f(x)-1\big)}{x-1}+\frac{e^x-e}{x-1}\right)=ef'(1)+e$$ γιατί

αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=e^x$, είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\varphi'(1)=e$$.

δ) i. Είναι $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)}{h}=2$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=2x-2\Leftrightarrow y=2x-1$.

Είναι $f'(1)g'(1)=-1\Leftrightarrow 2g'(1)=-1\Leftrightarrow g'(1)=-\frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_g στο Α είναι η ευθεία

$\varepsilon_2: y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

ii. Είναι $f(1+h)=h^2+2h+1=(h+1)^2$ οπότε αν $1+h=x$ τότε $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

iii. Είναι $g(1)=1\Leftrightarrow\kappa+\lambda=1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $g'(x)=-\frac{\kappa}{x^2}$.

Είναι $g'(1)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\kappa=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\kappa=\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}+\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$.

iv. Έστω $K\big(x_1, f(x_1)\big)$. Η εφαπτομένη της C_f στο Κ είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=2x_1x-x_1^2$.

Επειδή διέρχεται από το Μ, είναι: $\beta = 2x_1\alpha - x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1\alpha + \beta = 0 \ (1)$.
$\Delta = 4\alpha^2 - 4\beta = 4\left(\alpha^2 - \beta\right) > 0$, οπότε η (1) έχει δύο ρίζες και η C_f δέχεται δύο εφαπτομένες που διέρχονται από το Μ.