

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ασκήσεις αντικειμενικού τύπου

1. Να φέρετε τις εξισώσεις της πρώτης στήλης του πίνακα στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Εξίσωση	a	β	γ
$2x^2 - x + 3 = 0$	2	-1	3
$-x^2 + 3x = 2$			
$(x-1)^2 = 3x^2 - x$			
$\lambda(x^2 - x) = \lambda^2 + x^2 - x$			
$\mu(2x^2 - 1) = (x-\mu)^2 - 3x$			

2. Να συμπληρώσετε στις παρακάτω προτάσεις τα κενά ώστε αυτές να είναι αληθείς

- i) Αν η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + 5x - \lambda = 0$ δεν είναι 2ου βαθμού τότε
- ii) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 3 = 0$ είναι 2ου βαθμού όταν
- iii) Το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ όταν
- iv) Το 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ όταν
- v) Η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 2 = 0$ είναι της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ με $a = \dots$, $\beta = \dots$ και $\gamma = \dots$
- vi) Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει ρίζες πραγματικές όταν
- vii) Αν $a\gamma < 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$
- viii) Αν δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε.....
- ix) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $ax^2 + bx + \gamma \neq 0$, $a \neq 0$ τότε.....
- x) Αν υπάρχει τιμή του x ώστε $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε.....

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ είναι δευτέρου βαθμού.
- ii) Αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ (1) τότε:
 - a. Αν $\Delta \geq 0$ τότε η (1) έχει ρίζες πραγματικές.
 - b. Αν η (1) έχει δυο ρίζες άνισες τότε $\Delta \geq 0$.
 - c. Αν $a\gamma < 0$ τότε η (1) έχει δυο ρίζες άνισες.
 - d. Αν $\Delta < 0$ τότε $ax^2 + bx + \gamma \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - e. Αν $\Delta = 0$ τότε η διπλή ρίζα της (1) είναι η $x_0 = -\frac{\beta}{\alpha}$
 - f. Αν $\Delta > 0$ και $\gamma = 0$ τότε η (1) έχει ρίζα το 0.
 - g. Αν το 1 είναι ρίζα της (1) τότε $a + \beta + \gamma = 0$.
 - h. Αν a, γ ομόσημοι τότε η (1) δεν έχει καμιά πραγματική ρίζα.
 - i. Αν η (1) δεν έχει δυο ρίζες άνισες τότε $\Delta < 0$.
 - j. Αν η (1) δεν έχει καμιά πραγματική ρίζα, τότε a, γ ομόσημοι.
 - k. Αν η (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα, τότε $\Delta \geq 0$.

- iii) Μια εξίσωση δεύτερου βαθμού μπορεί να έχει τρεις ρίζες
 iv) Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $a\lambda^2 + b\lambda + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε $\Delta \geq 0$
 v) Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ (1) έχει δυο τουλάχιστον ρίζες, τότε η (1) θα έχει δυο ακριβώς ρίζες.

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ τότε

a. $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$

b. $x_1 x_2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$

ii) Η εξίσωση $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς a και b .

iii) Αν $\gamma < 0$ τότε η εξίσωση $x^2 + bx + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

iv) Αν η εξίσωση $x^2 + bx + \gamma = 0$ (1) έχει διακρίνουσα $\Delta > 0$ και $\gamma > 0$ τότε έχει δύο ρίζες ομόσημες.

v) Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες:

a. αντίθετες τότε $\beta = 0$

b. αντίστροφες τότε $a = \gamma$

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης: $2x^2 - 6x - 1 = 0$ είναι 3.

ii) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $3x^2 - x - 6 = 0$ είναι -2.

iii) Η εξίσωση που έχει ρίζες τους 2, -3 είναι η $x^2 - x - 6 = 0$.

iv) Αν οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ είναι ετερόσημες τότε $a\gamma > 0$.

v) Υπάρχει εξίσωση της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ που έχει ρίζες συγχρόνως αντίθετες και αντίστροφες.

6. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

i) Η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + \lambda x + 5 = 0$ είναι δεύτερου βαθμού όταν:

A. $\lambda \neq 0$ B. $\lambda = 1$ Γ. $\lambda \neq 1$ Δ. $\lambda > 1$

ii) Αν η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ έχει ρίζα το 0, τότε ο λ ισούται με:

A. 0 B. 1 Γ. 2 Δ. 4

iii) Η εξίσωση $2x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$ έχει ρίζα το 1 όταν ο λ ισούται με:

A. 1 B. 2 Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. $-\frac{1}{2}$

iv) Η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \mu - 2 = 0$ έχει λύση μόνο το 0 όταν:

A. $\mu = 2$ B. $\lambda = 1$ Γ. $\mu = 2$ ή $\lambda = 1$ Δ. $\mu = 2$ και $\lambda = 1$

7. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Η εξίσωση $x^2 - 5x + 2 = 0$ έχει 2 ρίζες:

A. ετερόσημες B. αντίθετες Γ. αντίστροφες Δ. θετικές

ii) Η εξίσωση $x^2 + 3x - (\lambda^2 + 1) = 0$ έχει 2 ρίζες:

A. αρνητικές B. αντίθετες Γ. ετερόσημες Δ. θετικές

iii) Η εξίσωση που έχει ρίζες τις -3 και 4 είναι:

A. $x^2 + x - 12 = 0$

B. $x^2 + x + 12 = 0$

Γ. $x^2 - x + 12 = 0$

Δ. $x^2 - x - 12 = 0$

iv) Η εξίσωση που έχει ρίζες τις -1 και -2 είναι:

A. $x^2 + x + 2 = 0$

Γ. $x^2 + 3x + 2 = 0$

B. $x^2 - 3x + 2 = 0$

Δ. $x^2 + 2x + 3 = 0$

8. Να αντιστοιχίσετε τις εξισώσεις της στήλης Α που έχουν ρίζα το 1 με την άλλη ρίζα τους που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Εξίσωση με μια ρίζα το 1	η άλλη ρίζα
A. $x^2 + x - 2 = 0$	1. 2003
B. $x^2 - 3x + 2 = 0$	2. -2
Γ. $x^2 - 2004x + 2003 = 0$	3. 2004
Δ. $x^2 + 2003x - 2004 = 0$	4. -2004
	5. 2

9. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τον χαρακτηρισμό των ριζών της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Εξίσωση	Χαρακτηρισμός ριζών
A. $x^2 + 15x + 56 = 0$	1. ετερόσημες
B. $x^2 - 2x - 48 = 2$	2. θετικές
Γ. $x^2 - 11x + 30 = 0$	3. αρνητικές

10. Να συμπληρώσετε τους πίνακες.

i)

εξίσωση	Ρίζες
• $x^2 - 5x + 6 = 0$	•
• $x^2 + 5x + 6 = 0$	•
• $x^2 - 5x - 6 = 0$	•
• $x^2 + 5x - 6 = 0$	•

ii)

Εξίσωση	Ρίζες
• $x^2 - x - 2 = 0$	•
• $x^2 - 3x + 21 = 0$	•
• $x^2 + x - 12 = 0$	•
• $x^2 + x - 6 = 0$	•

iii)

Εξίσωση	Ρίζες
• $x^2 - (\alpha + 2)x + 2\alpha = 0$	•
• $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$	• ...
• $x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$	•
• $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - 9 = 0$	•

Ασκήσεις Εμπέδωσης

11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - 4 = 0$
iv) $3x^2 - x = 0$

ii) $2x^2 - 1 = 0$
iv) $x^2 - 81 = 0$

iii) $3x^2 + 1 = 0$
v) $2x^2 - 3x = 0$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - 16 = 0$
iv) $2x^2 + 8 = 0$
vii) $-9x^2 + 25 = 0$

ii) $2x^2 - 18 = 0$
v) $4x^2 - 9 = 0$
viii) $36 - 16x^2 = 0$

iii) $-3x^2 + 12 = 0$
vi) $-3x^2 - 27 = 0$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 + 3x = 0$
iv) $-4x^2 - 16x = 0$
vii) $\sqrt{2} \cdot x^2 - \sqrt{8} \cdot x = 0$

ii) $2x^2 - 8x = 0$
v) $5x^2 - 30x = 0$
viii) $-\sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{27} \cdot x = 0$

iii) $-3x^2 + 12x = 0$
vi) $-7x^2 + 35x = 0$

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 + 2x - 3 = 0$
iv) $x^2 - 3x + 4 = 0$
vii) $x^2 + 6x + 5 = 0$

ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$
v) $-x^2 + 5x - 6 = 0$
viii) $x^2 + 5x + 7 = 0$

iii) $-x^2 + 2x + 8 = 0$
vi) $x^2 + 6x + 9 = 0$

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2x^2 + 8x - 10 = 0$
iv) $3x^2 - 5x + 4 = 0$
vii) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

ii) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
v) $-3x^2 + 5x - 2 = 0$
viii) $-2x^2 + 6x - 11 = 0$

iii) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$
vi) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

16. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $6x^2 + 3x - 2 = 0$
iv) $5x^2 + 3 = 0$
vii) $3 - x(x-1) = 5$

ii) $-3x^2 + 1 = 0$
v) $(2x-1)^2 = x+1$
viii) $2x^2 = x$

iii) $x^2 - 3x + 5 = 0$
vi) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
ix) $6x - (x-1)^2 = 8$

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $6x^2 - x - 1 = 0$

ii) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

iii) $x(x-1) = 1$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $0,3x^2 + 0,9x - 3 = 0$
iv) $x^2 + 0,6x - 0,4 = 0$

ii) $-0,1x^2 + x - 2,5 = 0$
v) $0,1x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$

iii) $0,4x^2 + 2x + 2,5 = 0$
vi) $2x^2 - 0,5x - 1,5 = 0$

19. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$.

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

ii) $4x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{5})x - \sqrt{10} = 0$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$
iii) $5x^2 - (\sqrt{2} - 10)x - 2\sqrt{2} = 0$
v) $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

ii) $2x^2 + (2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$
iv) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$
vi) $x^2 - (3 - 2\sqrt{2})x + 2 - 3\sqrt{2} = 0$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\sqrt{5}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + \sqrt{2} = 0$
iii) $\sqrt{6}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 1 = 0$

ii) $4x^2 - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$
iv) $4x(x-2) = 11 + (4-x)^2$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$iii) \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{27}{4} = 0$$

$$v) -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$ii) \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$$

$$iv) -2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$vi) -\frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 = 0$$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) (x-2)(x^2+5x+4) = 0$$

$$iii) (x^2+4x)(x^2-7x+6) = 0$$

$$v) (9x^2-6x+1)(x^2-x+2) = 0$$

$$ii) (3x^2-48)(-x^2-4x+32) = 0$$

$$iv) (x^2-9x+8)(-x^2+5x-7) = 0$$

$$vi) (x^2-2x+4)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) = 0$$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x(3x+10) = 3(x+2)$$

$$iii) 2x(2x-3) = 4-5(x^2+1)$$

$$v) 3-2(x-2)(x+2) = 7(1-x)$$

$$ii) 1-x(3-5x) = x(x+2)$$

$$iv) 2x-1 = (x-6)(x+6)$$

$$vi) 4(x+2) = 4-(x-3)(x+3)$$

26. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) (x-1)^2 = 4x-5(2x+1)$$

$$iii) (x-1)^3 - x(x-2)(x+2) = 1$$

$$v) (x-2)^2 - (x-1)(x+1) = (x+3)^2 - 6x$$

$$ii) (2x-1)^2 - (3-x)^2 = (x+1)(2x-1)$$

$$iv) (3x+2)^2 - (x-2)(3-x) = 6-4(x-1)^2$$

$$vi) (x+2)^3 - x(x-3)^2 = 15-(3x+1)(1-3x)$$

27. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) \frac{2x}{3} - \frac{10-3x}{4} = \frac{x^2}{6}$$

$$iii) \frac{x-2}{2} - \frac{x(6-x)}{6} = \frac{x(x-2)}{6} - \frac{x^2-2}{3}$$

$$v) \frac{4(1-7x)^2}{25} - \frac{3x(7x-1)}{5} = 2x^2 + 10$$

$$ii) \frac{2x+3}{6} - \frac{(x+1)(x-1)}{3} = \frac{3-x}{2}$$

$$iv) \frac{5}{6} - \frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{2-x}{3} - \frac{(x-4)^2}{6}$$

$$vi) \frac{x(3x-2)}{3} - \frac{(2x-1)^2+2}{6} = 1 - \frac{x-6}{2}$$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) |x^2-5x+5| = 1$$

$$iii) |x^2+3x-5| = |2x^2-4x+5|$$

$$ii) |x^2+2x-9| = 6$$

$$iv) |x-3| = x^2-x-6$$

Επίλυση παραμετρικών εξισώσεων και πλήθος ριζών

29. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x^2-2\alpha x+\alpha^2-1=0$$

$$ii) \alpha x^2-(1-2\alpha\beta)x-2\beta=0, \alpha \neq 0$$

30. Να λυθεί η εξίσωση : $\alpha\beta x^2-(\alpha-\beta)x-1=0, \alpha \cdot \beta \neq 0$

31. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x^2-3ax+2a^2=0$$

$$iii) x^2-\sqrt{ax}-2a=0$$

$$v) (a-x)(\beta-x)+x^2=4a^2+(x-2a)(x+2a)$$

$$vii) 2x+(2\sqrt{\beta}-x)^2-x=2\sqrt{\beta}$$

$$ix) (x-a)^2+(x-\beta)^2=(\alpha-\beta)^2$$

$$ii) x^2-4ax+4a^2=0$$

$$iv) 8x^2-2(2a+3\beta)x+3a\beta=0$$

$$vi) x^2-(a+\beta)x=a\beta(x-a-\beta)$$

$$viii) a^2\beta^2x^2-(a^3+\beta^3)x+a\beta=0, \alpha\beta \neq 0$$

$$x) \beta\left(\frac{x}{a}-1\right) = \frac{1}{\beta}\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)$$

$$\text{xi) } \frac{x^2}{\sqrt{a\beta}} + \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)x = \alpha, \alpha, \beta > 0$$

32. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i) } x^2 + (a + \beta)x + a\beta = 0$$

$$\text{ii) } x^2 - (2a + 3\beta)x + 6a\beta = 0$$

$$\text{iii) } -2x^2 + (\alpha - 3)x + a - 1 = 0$$

$$\text{iv) } 2x^2 - (3a - 2)x + a(\alpha - 2) = 0$$

$$\text{v) } 2x^2 + (\alpha - 2\beta)x - a(\alpha + 2\beta) = 0$$

$$\text{vi) } -x^2 + (2a + \beta)x - a(a + \beta) = 0$$

33. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i) } \lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2 = 0$$

$$\text{ii) } (\lambda - 3)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 3 = 0$$

$$\text{iii) } (\lambda + 1)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3 = 0$$

$$\text{iv) } (\lambda - 2)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 4 = 0$$

34. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να βρείτε.

$$\text{i) } x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta - 1 = 0$$

$$\text{ii) } \alpha x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 9\beta = 0, \alpha \neq 0$$

$$\text{iii) } x^2 + (2\alpha - \beta)x + \alpha^2 - \alpha\beta - 2\beta^2 = 0$$

$$\text{iv) } (\alpha^2 - \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta^2x - \alpha^2\beta^2 = 0, \alpha^2 \neq \beta^2$$

35. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να βρείτε.

$$\text{i) } \alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0, \alpha, \beta \neq 0$$

$$\text{ii) } x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1 = 0, \alpha \neq 0$$

$$\text{iii) } (\alpha + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta + 2\gamma)x + \beta + \gamma = 0, \alpha \neq \gamma$$

$$\text{iv) } (\alpha + \beta - \gamma)x^2 + 2\beta x + \beta + \gamma - \alpha = 0, \alpha \neq \gamma - \beta$$

36. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

$$\text{i) } 4x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{ii) } 4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$\text{iii) } (x+1)(x+2) = -6$$

$$\text{iv) } x(x+2)(x-2) - (x^2-1)(x-3) = 123$$

$$\text{v) } x^2 - (a^2 - \beta^2)x - \alpha^2\beta^2 = 0, \alpha, \beta \neq 0.$$

37. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

$$\text{i) } x^2 + (\alpha - 2)x - \alpha = 0$$

$$\text{ii) } \alpha x^2 - (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta = 0, \alpha \neq 0$$

$$\text{iii) } \frac{1}{2}x^2 + (\alpha + 1)x + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\text{iv) } x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$$

38. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του λ :

$$\text{i) } x^2 - (2\lambda - 4)x - \lambda(3 - \lambda) = 0$$

$$\text{ii) } (\lambda - 3)x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$$

39. Δίνεται η εξίσωση $\mu^2 x^2 + \mu(1 + 5\mu)x - (2 + 5\mu) = 0, \mu \neq 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες στο \mathbb{R} για κάθε $\mu \neq 0$

ii) Να λυθεί η εξίσωση

40. Αν η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει μία διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (\mu + 1)x + \frac{\lambda^2}{4} = 0$ έχει πραγματικές ρίζες.

41. Αν η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + \frac{9}{4} = 0$ είναι αδύνατη.

42. Δίνεται η εξίσωση $(2a - 1)x^2 + 2(a + 5)x + \frac{a}{2} + 1 = 0$.

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης όταν το a διατρέχει το \mathbb{R} .

43. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 - \lambda^3 x - (|\lambda| + 1) = 0$ (1) έχει 2 ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
44. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x - \lambda^2 = 0$ (1) δεν μπορεί να έχει 2 ρίζες ίσες για κάθε πραγματικό αριθμό λ .
- Προσδιορισμός παραμέτρου
45. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση $(\alpha + 2)x^2 + (\alpha + 1)x - |\alpha| = 0$ να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το -1 .
46. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x + 2\Delta = 0$ (1) όπου Δ η διακρίνουσα της (1).
47. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - \Delta x - \Delta = 0$ όπου Δ η διακρίνουσα της.
48. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 + \Delta x + \Delta - 1 = 0$ όπου Δ η διακρίνουσα της.
49. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 - \beta x + \Delta = 0$ όπου Δ η διακρίνουσα της έχει ρίζες πραγματικές.
50. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - \Delta x + 2\Delta = 0$ (1) όπου Δ η διακρίνουσα της.
51. Να βρεθεί για ποια τιμή του λ η εξίσωση $(1+\lambda)^2 x^2 + (\lambda+3)x + 2(\lambda-10) = 0$ έχει ρίζα το 2;
Ποια είναι η άλλη ρίζα της εξίσωσης ;
52. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $(\lambda-1)x^2 + |\lambda|x - \lambda = 0$ (1) να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το 1.
53. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση $(\alpha + 2)x^2 + (\alpha + 1)x - |\alpha| = 0$ να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το -1 .
54. Η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0$ (1) έχει διπλή ρίζα. Να βρείτε:
i) το λ
ii) τη διπλή ρίζα της (1).
55. Η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα. Να βρείτε:
i) το λ
ii) τη διπλή ρίζα της (1).
56. Η εξίσωση $2x^2 + 2(\alpha + \beta)x + (\alpha - 2)(\beta + 4) - 2 = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα. Να βρείτε:
i) τους αριθμούς α και β
ii) τη διπλή ρίζα της (1).
57. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + (2\lambda - 4)x + \lambda = 0$ (1).
i) Να εξετάσετε αν η εξίσωση μπορεί έχει μία διπλή ρίζα για κάποια τιμή του λ .
ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αδύνατη.
58. Η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + \lambda^2 x - \lambda = 0$ (1) έχει δύο ρίζες άνισες, από τις οποίες η μία είναι η $x = 1$.
i) Να βρείτε το λ
ii) Να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης (1).
59. Αν η εξίσωση $x^2 - 2(2\alpha - \beta)x - |\alpha - 1| = 0$ (1) έχει διπλή ρίζα να βρείτε τους α και β .
60. Η εξίσωση $\lambda^2 x^2 + (5\lambda - 2)x + \lambda + 2 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό -1 .
i) Να βρείτε το λ
ii) Να δείξετε ότι το -1 είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης (1).
61. Η εξίσωση $x^2 + (4\lambda - 12)x + \lambda^2 - 12 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό 2.

- i) Να βρείτε το λ
 ii) Να δείξετε ότι το 2 είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης (1).
62. Η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό -3. Να βρείτε:
 i) το λ
 ii) την άλλη ρίζα της εξίσωσης (1).
63. Η εξίσωση $(\lambda^3 + 10)x^2 + (2\lambda^3 + 4)x + \mu^2 + 4\mu + 22 = 0$ (1) έχει διπλή ρίζα το 3.
 Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .
64. Η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 - 7 = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό -2.
 i) Να βρείτε το λ
 ii) Για κάθε τιμή του λ που προέκυψε, να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης (1).
65. Η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 3)x - \lambda + 6 = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.
 i) Να βρείτε τις τιμές του λ
 ii) Για κάθε τιμή του λ που προέκυψε, να βρείτε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης (1).
66. Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2 + (2\lambda + 1)x + |6 - 3\lambda| = 0$ (1).
 i) Να βρείτε το λ , αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζα το -1
 ii) Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα θεωρούμε την εξίσωση:
 $x^2 - \lambda x + \mu^2 = 0$ (2). Να βρείτε το μ , ώστε η εξίσωση (2) να έχει διπλή ρίζα.
67. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$
 i) να έχει δυο ρίζες άνισες
 ii) να έχει μια ρίζα διπλή
 iii) να έχει πραγματικές ρίζες
 iv) να μην έχει καμιά πραγματική ρίζα.
68. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - 1 = 0$ (1)
 i) να έχει δυο ρίζες άνισες
 ii) να έχει μια ρίζα διπλή
 iii) να έχει ρίζες πραγματικές
 iv) να μην έχει καμιά ρίζα πραγματική.
69. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ (1)
 i) να έχει δυο ρίζες άνισες
 ii) να έχει μια διπλή ρίζα
 iii) έχει λύση
 iv) είναι αδύνατη
70. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda + \frac{9}{4} = 0$, $\lambda \neq 0$ (1)
 i) να έχει δυο ρίζες άνισες
 ii) να έχει μια ρίζα διπλή
 iii) να έχει ρίζες πραγματικές
 iv) να μην έχει καμιά ρίζα πραγματική.
71. Η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$ (1) έχει διακρίνουσα 4.
 i) Να βρείτε τις τιμές του λ
 ii) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

72. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 6\lambda x + 9\lambda^2 - 1 = 0$ (1)
 i) να λυθεί η εξίσωση (1)
 ii) να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης (1) να ανήκουν στο διάστημα $[0,3]$
73. Αν $\alpha^2 < 3\beta$ και $\beta > 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ (1) δεν έχει καμιά πραγματική ρίζα.
74. Αν υπάρχει λ ώστε να ισχύει η ισότητα: $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$ (1) να δείξετε ότι: $\alpha^2 > 4\beta$.
75. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση $(\alpha + 2)x^2 + (\alpha + 1)x - |\alpha| = 0$ να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα το -1 .
76. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις δεν μπορούν να έχουν διπλή ρίζα:
 i) $x^2 - (\lambda + 1)x - \lambda^2 = 0$ ii) $x^2 - \lambda x - \lambda - 2 = 0$
77. Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση: $x^2 - (2\lambda - 1)x + 1 - 2\lambda = 0$ να έχει διπλή ρίζα και μετά να βρείτε τη διπλή ρίζα.
78. Να βρείτε τα λ και μ ώστε η εξίσωση: $x^2 - (2x - \lambda) - |\lambda + 2| = 2\mu x$ να έχει μια ρίζα διπλή.
79. Να βρείτε το α ώστε η εξίσωση: $\alpha^2 x^2 + 2\alpha x + 1 = 0$ (1) να έχει ρίζα το $-\frac{1}{2}$ και μετά να δείξετε ότι η (1) έχει διπλή ρίζα το $-\frac{1}{2}$.
80. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 4\lambda x + 4\lambda^2 - 1 = 0$ (1)
 i) Να λυθεί η εξίσωση (1)
 ii) Να βρείτε για ποιες του λ οι ρίζες της (1) ανήκουν στο διάστημα $(-1,3]$
81. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (4\lambda - 2)x + (2\lambda - 1)^2 = 0$ (1)
 i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό λ
 ii) Να βρείτε για ποιες του λ η διπλή ρίζα της (1) βρίσκεται στο διάστημα $(-3,5)$
82. Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 - x - 12 = 0$ (1) και $x^2 + (2\lambda - 9)x + \lambda^2 - 6\lambda = 0$ (2). Η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι και ρίζα της εξίσωσης (2). Να βρείτε:
 i) το λ
 ii) τις ρίζες της εξίσωσης (2)
83. Δίνονται οι εξισώσεις: $x^2 + (\lambda + 3)x - 4\lambda + 2 = 0$ (1) και $x^2 + (1 - 2\lambda)x - 3\lambda - 4 = 0$ (2).
 i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν την ίδια διακρίνουσα
 ii) Για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2)
84. Καθεμία από τις εξισώσεις: $x^2 + (\lambda - 2)x + 1 - 2\lambda = 0$ και $x^2 - \lambda x + \lambda + 8 = 0$ έχει μία διπλή ρίζα.
 i) Να βρείτε το λ
 ii) Να λύσετε τις παραπάνω εξισώσεις.
85. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο ρίζες άνισες:
 i) $x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 5)x - (\lambda^2 + 1) = 0$
 ii) $13x^2 - 7x - (3|\lambda| + 2) = 0$
86. Αν υπάρχει λ ώστε να ισχύει η ισότητα: $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \beta = 0$ (1) να δείξετε ότι $\beta \leq \alpha^2$.
87. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 2(\beta - 3\gamma) - (\gamma^2 + 2)$. Να βρείτε τα β , γ και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.

88. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = \gamma$. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.

89. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (1). Αν $\beta = \alpha + \gamma$ να δείξετε ότι η (1) έχει ρίζες πραγματικές.

90. Αν η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + 2\gamma = 0$ δεν έχει καμία ρίζα να δείξετε ότι:

i) $\gamma > 0$

ii) η εξίσωση $x^2 + 3\beta x + 5\gamma = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

91. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1) και $\alpha\gamma \neq 0$. Αν $|\alpha - \gamma| = |\alpha| + |\gamma|$ να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

92. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων :

i) $x^2 + 3x - 2 = 0$

ii) $x^2 - 5x - 4 = 0$

iii) $2x^2 - 7x + 4 = 0$

iv) $-3x^2 + 12x + 15 = 0$

v) $-3x^2 - 3x - 1 = 0$

vi) $2x^2 + 4x + 6 = 0$

93. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών των παρακάτω εξισώσεων :

i) $\sqrt{2} \cdot x^2 + \sqrt{8} \cdot x - \sqrt{18} = 0$

ii) $-\sqrt{3} \cdot x^2 - \sqrt{27} \cdot x + \sqrt{12} = 0$

iii) $\sqrt{6} \cdot x^2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$

iv) $-\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot x^2 + \sqrt{15} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{15}} = 0$

94. Έστω η εξίσωση $(\sqrt{7} + 1)x^2 + 2x - 3 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης (1) και να τα γράψετε σαν κλάσματα με ρητό παρονομαστή.

95. i) Μια εξίσωση 2ου βαθμού έχει ρίζα το 4. Αν ισχύει $P = -4$, να βρείτε τον λόγο $-\frac{\beta}{\alpha}$.

ii) Μια εξίσωση 2ου βαθμού έχει ρίζα το -2. Αν ισχύει $S = -3$, να βρείτε τον λόγο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

96. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης: $\alpha x^2 - 18x + 21 = 0$, με $\alpha \neq 0$, είναι 6. Να βρείτε :

i) τον αριθμό α

ii) το γινόμενο των ριζών της παραπάνω εξίσωσης.

97. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης: $\alpha x^2 + 16x - 20 = 0$, με $\alpha \neq 0$, είναι 10. Να βρείτε :

i) τον αριθμό α

ii) το άθροισμα των ριζών της παραπάνω εξίσωσης.

98. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 8 = 0$ (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 για τους οποίους ισχύει $x_1 + x_2 = 6$ και $x_1 \cdot x_2 = 4$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Να λύσετε την εξίσωση (1).

99. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - x - 5 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 x_2$

iii) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$

iv) $2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2$

100. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 3 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 x_2$

iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $x_1^3 + x_2^3$

101. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $x_1^3 + x_2^3$

v) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$

vi) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

102. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 5x - 4 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$

v) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

vi) $(x_1 - x_2)^2$

103. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 4x + 2 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

v) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

vi) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$

104. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 + 3x - 4 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

iv) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

v) $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3)$

vi) $(x_1^2 - x_1 x_2)(x_1 x_2 - x_2^2)$

105. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 6x + 3 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2$

v) $\frac{1}{x_1 - 3} + \frac{1}{x_2 - 3}$

vi) $x_1^3 x_2 + 2x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3$

106. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + 7x - 9 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$

v) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

vi) $|x_1 - x_2|$

107. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x - 1 = 0$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $x_1^3 + x_2^3$

v) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

vi) $|x_1 - x_2|$

vii) $|x_1^2 - x_2^2|$

108. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 5x + 3 = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της. Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

A = $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

B = $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Γ = $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$

109. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3x - 5 = 0$ να υπολογιστεί η τιμή της

$$\text{παράστασης : } E = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1}{2+x_2} + \frac{x_2}{2+x_1} - \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2$$

110. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες
 α) αντίθετες β) αντίστροφες

111. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $x^2 - 6x - 3(2 - \lambda) = 0$ έχει ρίζες :

- i) ομόσημες ii) ετερόσημες

112. Να βρείτε τον πραγματικό λ , ώστε η εξίσωση $x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$ να έχει :

- i) μία διπλή ρίζα ii) δύο ρίζες ετερόσημες iii) δύο ρίζες αρνητικές
 iv) δύο ρίζες θετικές v) δύο ρίζες αντίστροφες

113. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 5)x - \lambda + 4 = 0$ έχει :

- i) μία διπλή ρίζα ii) δύο ρίζες ετερόσημες iii) δύο ρίζες αρνητικές
 iv) δύο ρίζες θετικές v) δύο ρίζες αντίστροφες iv) δύο ρίζες αντίθετες

114. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση : $-x^2 + (\lambda - 7)x + \lambda - 6 = 0$ έχει :

- i) μία διπλή ρίζα ii) δύο ρίζες ετερόσημες iii) δύο ρίζες αρνητικές
 iv) δύο ρίζες θετικές v) δύο ρίζες αντίστροφες iv) δύο ρίζες αντίθετες

115. Δίνεται η εξίσωση $-2x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda - 3 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Να βρείτε το λ ώστε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με το γινόμενο τους.

116. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2x - \lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ :
 α) η εξίσωση (1) έχει αντίστροφες ρίζες
 β) το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) είναι τετραπλάσιο από το άθροισμα τους

117. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$\alpha) x_1^2 + x_2^2 = 10 \quad \beta) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{5}$$

118. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ (1) .

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = 20$

119. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ (1) .

- i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες..
 ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ ώστε να ισχύει : $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -\frac{2}{3}$

120. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$ (1) .

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ ώστε να ισχύει:

$$\alpha) x_1(3-2x_1) = -3(x_1-1)$$

$$\beta) x_1(x_2-x_1) = (x_1+3)(3-x_1)$$

121. Δίνεται η εξίσωση $2x^2-4x+\lambda-3=0$ (1) .

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) , να βρείτε το λ ώστε να ισχύει:

$$\alpha) x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 = 8$$

$$\beta) \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$$

122. Δίνεται η εξίσωση $x^2-10x+\lambda+8=0$ (1) .

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) , να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $2x_1 = 3x_2$

123. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda+1)x+\lambda=0$ (1) .

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

ii) Να βρείτε το λ , ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι διπλάσια από την άλλη.

124. Δίνεται η εξίσωση $x^2+\lambda x-27=0$ (1) .

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

ii) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) ισούται με το τετράγωνο της άλλης να βρείτε τις ρίζες της και το λ .

125. Δίνεται η εξίσωση $x^2+\lambda x+\lambda-1=0$ (1) .

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $3x_1 + 2x_2 = -\lambda$

126. Δίνεται η εξίσωση $(\mu-1)x^2+\mu x+1=0$, $\mu \neq 1$ με ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$. Για ποια τιμή του μ η εξίσωση :

i) έχει ρίζες αντίθετες

ii) έχει ρίζες αντίστροφες

iii) $\rho_1 = 2\rho_2$

127. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\lambda^3 + 8)x - 1 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το λ ώστε οι ρίζες της (1) να είναι αντίθετες.

128. Δίνεται η εξίσωση $\mu x^2 + 2(\mu+1)x + \mu + 2 = 0$, $\mu \neq 0$

i) Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση έχει ρίζες στο \mathbb{R}

ii) Για ποια τιμή του μ η εξίσωση

α) έχει ρίζες αντίθετες

β) η μία ρίζα είναι διπλάσια της άλλης

129. Δίνεται η εξίσωση $(3\lambda - 1)x^2 - x - 1 = 0$ (1)

α) Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση (1)

i) να είναι δευτέρου βαθμού.

ii) να έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες,

β) Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε:

i) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -1$

ii) $2x_1 + 2x_2 < 1$

130. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + \lambda - 1 = 0$ (1)

i) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές,

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και ισχύει $x_1 = 2x_2$ να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και το λ .

131. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - (\lambda^2 + 1) = 0$

i) Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αν x_1, x_2 ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

132. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει δύο ρίζες άνισες.

ii) Αν $\lambda \in (1, +\infty)$ να δείξετε ότι η (1) δεν έχει ρίζες αντίστροφες.

iii) Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της (1) και $2x_1 + 2x_2 < 5$ να βρείτε το λ .

133. Έστω η εξίσωση $3x^2 - (\lambda^2 - 5)x - 2 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

134. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + x - 2 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Αν x_1, x_2 οι πραγματικές και άνισες ρίζες της (1) να βρείτε το λ ώστε: $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = \frac{1}{2}$

135. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1).

i) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

ii) Αν x_1, x_2 ρίζες της (1) και ισχύει $x_1 = 3x_2$ να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και το λ .

136. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + 5\lambda + 4 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

ii) Αν $\lambda \leq 1$ και οι ρίζες της (1) x_1, x_2 είναι ανάλογες του 2 και 4 να βρείτε το λ .

137. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + |\lambda| - 1 = 0$ (1) με ετερόσημες ρίζες τις x_1 και x_2 .

i) Να βρείτε το λ .

ii) Αν $3x_1 + 3x_2 > 1$ να βρείτε το λ .

138. Οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$ (1) είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης

$\lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2 = 0$ (2) με $\lambda \neq 0$ είναι αντίστροφες.

i) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ και μ

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2).

139. Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (1) με $a, b, \gamma \neq 0$. Αν $||a| - |\gamma|| = |a + \gamma|$ να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

140. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + bx + \gamma = 0, \gamma \neq 0$, τότε η εξίσωση $\gamma x^2 + bx + 1 = 0$ έχει ρίζες τις $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$.

141. Δίνεται η εξίσωση $9x^2 + 6x + \gamma = 0$ με ρίζες ρ_1, ρ_2 . Αν γνωρίζουμε ότι $\rho_1 - \rho_2 = 2$

i) να βρείτε τις ρίζες ρ_1, ρ_2

ii) να βρείτε το γ

Κατασκευή εξίσωσης β' βαθμού

142. Να βρεθεί η εξίσωση που έχει ως ρίζες τους αριθμούς: $1 - 3\sqrt{2}$ και $1 + 3\sqrt{2}$

143. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) 3, -2

ii) 2, -1/3

iii) 2, -2

iv) 3, 0

v) $\lambda - 1, \lambda + 1$

vi) 3, $\sqrt{2}$

vii) 1, $-\sqrt{2}$

144. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) 2, 4

ii) -3, 5

iii) -6, 1

iv) -4, -1

v) $\frac{1}{2}$, -2

vi) $-\frac{2}{3}$, 6

145. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$

ii) $\sqrt{3}+2$, $2-\sqrt{3}$

iii) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

iv) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

146. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν για ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) -1, 2,

ii) -3, 0

iii) $-1, \frac{2}{3}$

147. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών:

i) $\lambda-2$, $\lambda+2$

ii) $1+\alpha$, $1-\alpha$

iii) μ , 2μ

iv) $\frac{\alpha}{3}$, -3α

148. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 5 = 0$ είναι οι x_1 και x_2 . Να βρείτε την εξίσωση που έχει ρίζες τα ζεύγη.

i) x_1-1 , x_2-1

ii) $\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$

149. Αν x_1 , x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 1 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $2x_1$, $2x_2$

ii) $\frac{x_1}{2}$, $\frac{x_2}{2}$

iii) x_1^2 , x_2^2

iv) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$

150. Αν x_1 , x_2 ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + 5x - 2 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $3x_1$, $3x_2$

ii) $-x_1$, $-x_2$

iii) x_1^2 , x_2^2

iv) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$

151. Αν x_1 , x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $x_1 + 2$, $x_2 + 2$

ii) $2x_1 - 3$, $2x_2 - 3$

iii) x_1^2 , x_2^2

iv) x_1^3 , x_2^3

152. Αν x_1 , x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 3 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $x_1 + 3$, $x_2 + 3$

ii) $2x_1 - 1$, $2x_2 - 1$

iii) x_1^2 , x_2^2

iv) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$

153. Αν x_1 , x_2 ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + x + 3 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $x_1^2 x_2$, $x_2^2 x_1$

ii) $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_1}$

iii) $\frac{1}{x_1 - 1}$, $\frac{1}{x_2 - 1}$

iv) $\frac{x_1}{x_1 + 2}$, $\frac{x_2}{x_2 + 2}$

154. Αν x_1 , x_2 ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x - 2 = 0$ να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τα ζεύγη:

i) $\frac{1}{x_1^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$

ii) $\frac{x_1^2}{x_2}$, $\frac{x_2^2}{x_1}$

iii) $x_1^2 - x_1 x_2$, $x_2^2 - x_1 x_2$

iv) $\frac{3x_1 + 1}{x_1 - 3}$, $\frac{3x_2 + 1}{x_2 - 3}$

155. Έστω x_1 , x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x - 5 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τους αριθμούς: $|x_1|$, $|x_2|$

156. Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων (χωρίς να λυθούν):

i) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ii) $x^2 + 4x - 5 = 0$

iii) $x^2 - (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

157. Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων χωρίς να λυθούν:

i) $x^2 - 3x + 2 = 0$

ii) $x^2 + 5x + 6 = 0$

iii) $x^2 - (1 - \sqrt{5})x - \sqrt{5} = 0$

iv) $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολωνυμικές

158. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$

ii) $x^4 - x^2 + 1 = 0$

159. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

ii) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

iii) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

iv) $6y^4 + 17y^2 = -12$

v) $x^4 - 2(a^2 + \beta^2)x^2 + (a^2 - \beta^2)^2 = 0$

160. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

ii) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

iii) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

iv) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$

v) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

vi) $x^4 - x^2 - 20 = 0$

161. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

ii) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

iii) $3x^4 + x^2 + 1 = 0$

iv) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

v) $2x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + 1 = 0$

162. Να σχηματίσετε διτετράγωνη εξίσωση που να έχει ρίζες $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}$

163. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

ii) $x^6 - 16x^3 + 64 = 0$

iii) $x^6 + 28x^3 + 27 = 0$

iv) $-8x^6 + 7x^3 + 1 = 0$

v) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

vi) $-16x^8 - 15x^4 + 1 = 0$

164. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

ii) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$

iii) $x^{10} - 1025x^5 + 1024 = 0$

iv) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

165. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$

ii) $x^2 - 6|x| + 8 = 0$

iii) $-x^2 + |x| + 6 = 0$

iv) $x^2 + 5|x| + 4 = 0$

$$v) 2x^2 - 5|x| - 3 = 0$$

$$vi) -3x^2 + 10|x| - 8 = 0$$

166. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) x^2 - 4 = 3|x|$$

$$iii) 4|x| - 3 = x^2$$

$$v) 2x^2 = |x| + 10$$

$$ii) x^2 = 8 - 2|x|$$

$$iv) 3|x| = x^2 - 10$$

$$vi) 3x^2 + |x| - 2 = -3(|x| + 1)$$

167. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) x^2 + |4x| - 5 = 0$$

$$iii) x^2 + |-6x| - 40 = 0$$

$$v) -3x^2 + |-5x| - 2 = 0$$

$$ii) x^2 - |5x| + 6 = 0$$

$$iv) x^2 - |-3x| + 2 = 0$$

$$vi) -x^2 - |-x| + 20 = 0$$

168. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) x^2 + 2|x| + 1 = 0$$

$$iii) (2x+1)^2 - 4|2x+1| + 3 = 0$$

$$ii) |x-1|^2 - 4 = 3|x-1|$$

$$iv) x^2 = |2x| + 3$$

169. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) 2(x-3)(x+3) + 9|x| = 0$$

$$iii) |x| = \frac{(2x-3)(2x+3)}{9}$$

$$v) (x-1)^2 - 8 = |x| - (x+1)^2$$

$$ii) 3|x| = (2-x)(2+x)$$

$$iv) (x-2)^2 = 7|x| + 1 - x(x+4)$$

$$vi) 5|x| = 1 - \frac{(x-3)(x+3)}{2}$$

170. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - |x| - 2 = 0$.

171. Να λυθεί η εξίσωση: $(x-3)^2 + |x-3| - 6 = 0$.

172. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) (2x-1)^2 - 3(2x-1) - 4 = 0$$

$$ii) (x^2-1)^2 + 2(x^2-1) - 3 = 0$$

173. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(2x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

$$ii) \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 2 = 0$$

174. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) x^2 - |x| - 6 = 0$$

$$iii) x^2 - 2x + |x-1| - 5 = 0$$

$$ii) (2x-1)^2 + 3|2x-1| - 4 = 0$$

$$iv) (x-3)^2 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 7$$

175. Να λυθεί η εξίσωση $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$ (1)

176. Να λύσετε την εξίσωση: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ (1).

177. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 4) = -8$$

$$iii) (x-5)^4 - 6(x-5)^2 = 27$$

$$ii) (x+1)^4 - (x+1)^2 = 1260$$

$$iv) \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{10}{9}$$

178. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) + \frac{75}{16} = 0$$

$$iii) (x^2 + 5x - 4)^2 + (x^2 + 5x) = 10$$

$$ii) (x-3)^2 + \frac{5}{(x-3)^2} = \frac{126}{5}$$

$$iv) (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x + 4) = 120$$

179. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$$

$$iii) x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$$

$$v) x - \sqrt{x} = 20$$

$$ii) x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$iv) x + 5\sqrt{x} + 4 = 0$$

$$vi) \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 3$$

180. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) (x^3 - 1)^2 - \sqrt{x^6 - 2x^3 + 1} - 2 = 0$$

$$ii) (x^5 - 1)^2 + \sqrt{x^{10} - 2x^5 + 1} - 2 = 0$$

181. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x+5)^2 - 2(x+5) - 3 = 0$$

$$iii) (3x-5)^2 + 7(3x-5) - 8 = 0$$

$$v) (x-4)^2 - 3(4-x) - 10 = 0$$

$$ii) (2x-1)^2 + 2(2x-1) - 15 = 0$$

$$iv) \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x-3}{2} - 18 = 0$$

$$vi) (2x-3)^2 - 6(3-2x) - 7 = 0$$

182. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$$

$$iii) (x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$$

$$ii) (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = 0$$

$$iv) (x^2 + 2x - 6)^2 + 3(x^2 + 2x - 6) - 10 = 0$$

183. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$$

$$iii) (x-1)^2 - 4 = 3|x-1|$$

$$v) -(x-3)^2 + 5|3-x| - 6 = 0$$

$$ii) (2x-1)^2 - 8|2x-1| + 15 = 0$$

$$iv) (x-5)^2 - 3|5-x| - 10 = 0$$

$$vi) 5 - (2x-1)^2 = 4|1-2x|$$

184. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) (2x-1)^4 - (2x-1)^2 - 12 = 0$$

$$ii) (x-1)^6 + 5(x-1)^3 - 6 = 0$$

185. Αν λ ακέραιος, να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) 4\lambda - 9 \cdot 2\lambda + 8 = 0$$

$$ii) 3 \cdot 9\lambda - 4 \cdot 3\lambda + 1 = 0$$

186. Αν λ ακέραιος, να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) 5 \cdot 25\lambda - 7 \cdot 10\lambda + 2 \cdot 4\lambda = 0$$

$$ii) 4 \cdot 9\lambda - 13 \cdot 6\lambda + 9 \cdot 4\lambda = 0$$

187. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) \left(\frac{x+5}{8-x}\right)^2 = 10 \left(\frac{x+5}{8-x}\right) + 24$$

$$iii) 3\sqrt[3]{x^2} = 5\sqrt[3]{x} + 78$$

$$v) 2(x^2 + x - 2)^2 - 5(x^2 + x - 2) = 0$$

$$ii) x + 5\sqrt{x} = 14$$

$$iv) \frac{\sqrt{x}}{27 - \sqrt{x}} + \frac{27 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

188. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) /x^2 - x/+ /x^2 - 11x + 10/ = 0$$

$$iii) /x^2 + x - 6/+ /x^4 - 13x^2 + 36/ = 0$$

$$ii) /x^2 + 3x/+ /x^4 - 8x^2 - 9/ = 0$$

$$iv) /x^2 - 4/x//+ /x^4 - 10x^2 + 9/ = 0$$

189. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x^2 - 5x + 3)^2 + 4(x^2 - 5x) + 15 = 0$

iii) $(x^2 + 3x + 1)^2 - 4(x^2 + 3x + 2) - 1 = 0$

ii) $(x^2 + 2x + 2)^2 + x^2 + 2x = 0$

iv) $(x^4 - 5x^2 + 2)^2 + 6(x^4 - 5x^2 - 1) + 26 = 0$

190. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x) = 8$

ii) $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 5x + 9) + 15 = 0$

191. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α και β :

i) $x^4 - (a^2 + 2)x^2 + 2a^2 = 0$

ii) $x^4 - 2(a^2 + \beta^2)x^2 + (a^2 - \beta^2)^2 = 0$

iii) $x^4 - 3a^2x^2 - 4a^4 = 0$

iv) $x^4 - 4\alpha\beta x^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$

192. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α , β και γ :

i) $\alpha^2x^4 - (1 - a^2\beta^2)x^2 - \beta^2 = 0$

ii) $\gamma^4x^4 + (a^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)x^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$

193. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α , να λύσετε την εξίσωση: $x^4 - (\alpha + 1)x^2 + \alpha = 0$

194. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x - 4)(x - 2)(x - 1)(x + 1) + 8 = 0$

ii) $(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 2) = 12$

Κλασματικές εξισώσεις

195. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{6}{x+2} - \frac{4}{x+3} = 1$

ii) $\frac{4}{x-5} = \frac{3}{x-6} - 1$

iii) $\frac{5}{x-1} = 2 - \frac{2}{x-4}$

iv) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+3} = -2$

196. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $1 - \frac{3}{x+2} = \frac{6}{x^2 + 2x}$

ii) $\frac{4}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

iii) $\frac{x-10}{x^2 - 4} - \frac{x}{2-x} = \frac{2}{x+2}$

iv) $\frac{x+2}{x-3} - \frac{3-x}{x} = \frac{x^2 + 6}{x^2 - 3x}$

197. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{2}{x}$

ii) $\frac{x}{3} - \frac{x^2 - 6}{3(x+4)} = \frac{6}{x}$

iii) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{x}{3x-9} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x+3} \right)$

iv) $\frac{2x}{x-1} - \frac{11}{x+1} = \frac{4}{x^2 - 1}$

198. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{x+2}{x} - \frac{3}{2} = 2 - \frac{x}{x-2}$

ii) $\frac{1-2x}{3x} + \frac{2x+1}{x+2} = \frac{11}{3x^2 + 6x}$

iii) $\frac{5+x}{3-x} - \frac{2x}{x-2} = \frac{8-3x}{x}$

iv) $\frac{5}{x+1} + \frac{12}{x+2} = \frac{5}{x}$

199. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } \frac{4x}{x^2-x} = \frac{4}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}$$

$$\text{iii) } \frac{x+2}{x-1} - \frac{7}{x^2-x} = \frac{x+3}{x^2+3x}$$

$$\text{ii) } \frac{6}{x^2+2x} - \frac{x-1}{x^2-x} = 1$$

$$\text{iv) } \frac{x}{x+2} - \frac{5x-20}{x^2-4x} = -\frac{14}{x^2+2x}$$

200. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 2x$$

$$\text{iii) } \frac{x}{1-\frac{1}{x}} - \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\text{ii) } \frac{1}{1-\frac{1}{x}} + \frac{4}{x-\frac{1}{x}} = \frac{5}{4}$$

$$\text{iv) } \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} - \frac{\frac{4}{x}-1}{2} = \frac{7}{3}$$

201. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } (x-1)^2 - 6\sqrt{x^2-2x+1} + 8 = 0$$

$$\text{iii) } (2x-1)^2 - 4\sqrt{4x^2-4x+1} + 3 = 0$$

$$\text{ii) } (x+2)^2 - 2\sqrt{x^2+4x+4} - 15 = 0$$

$$\text{iv) } (|x|-3)^2 - 3\sqrt{x^2-6|x|+9} - 4 = 0$$

202. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 5\left(x - \frac{2}{x}\right) + 4 = 0$$

$$\text{iii) } \left(\frac{x}{x-4}\right)^2 - \frac{x}{x-4} - 2 = 0$$

$$\text{ii) } \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 0$$

$$\text{iv) } \left(\frac{2x}{x-3}\right)^2 - 3\frac{2x}{3-x} - 4 = 0$$

203. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } 6\left(\frac{2x}{x-3}\right)^2 - \frac{10x}{x-3} - 6 = 0$$

$$\text{iii) } \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + \frac{12-6x}{x+1} + 8 = 0$$

$$\text{ii) } 4\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \frac{8x+8}{x-1} + 3 = 0$$

$$\text{iv) } \left(\frac{3x}{x-1}\right)^2 + \frac{6x}{1-x} - 8 = 0$$

204. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } \left(3x + \frac{2}{x}\right)^2 - 12\left(3x + \frac{2}{x}\right) + 35 = 0$$

$$\text{iii) } \left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - \frac{x^2+4}{x} - 20 = 0$$

$$\text{ii) } \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)^2 - \frac{4x^2+4}{x-1} - 5 = 0$$

$$\text{iv) } \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 + \frac{7x+14}{2x-4} + 3 = 0$$

205. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } \frac{1}{3x^2-2x} + 3x^2 - 2x = 2$$

$$\text{iii) } \frac{6}{x^2-x} - x^2 + x = 1$$

$$\text{ii) } \frac{8}{x^2+4x} - x^2 - 4x = 2$$

$$\text{iv) } \frac{12}{x^2-1} - 3x^2 + 3 = -5$$

206. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i) } \frac{x^2-3}{2x} + \frac{2x}{x^2-3} = 2$$

$$\text{ii) } \frac{2x^2}{x+2} - 4 \cdot \frac{x+2}{x^2} + 2 = 0$$

$$\text{iii) } x^2 + 3x - 8 = \frac{20}{x^2 + 3x}$$

$$\text{iv) } x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$$

207. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i) } \frac{1}{2x^2 - x} + 2x^2 - x = 2$$

$$\text{ii) } \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2 + 1}{2} = -1$$

208. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i) } \frac{2x-1}{x-2} + \frac{x-2}{2x-1} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\text{ii) } \frac{2x^2-1}{x^2} + \frac{x^2}{2x^2-1} - 2 = 0$$

209. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\text{i) } x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$$

$$\text{ii) } x^2 + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 6$$

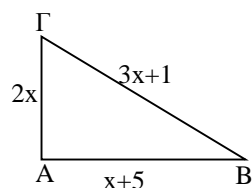
$$\text{iii) } x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{iv) } x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 8x + 1 = 0$$

Προβλήματα

210. Δύο αδέρφια είναι σήμερα 3 ετών και 7 ετών αντίστοιχα. Σε πόσα χρόνια το γινόμενο των ηλικιών τους θα είναι ίσο με 60;

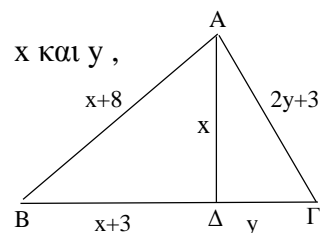
211. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.



212. Στο διπλανό σχήμα, το ABΓΔ είναι ορθογώνιο. Οι σημειωμένες διαστάσεις είναι σε cm. Αν το εμβαδόν του ABΓΔ είναι 24 cm^2 , να βρείτε τις διαστάσεις του.

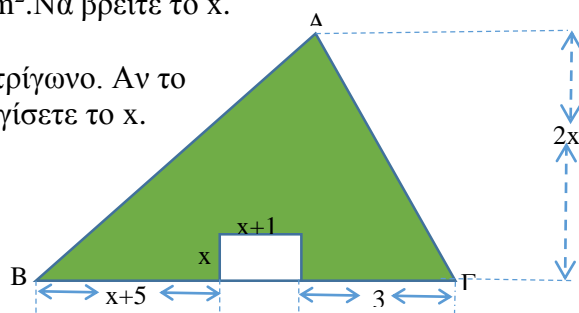


213. Στο διπλανό σχήμα, το AD είναι ύψος του τριγώνου ABΓ. Να βρείτε τα x και y, καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

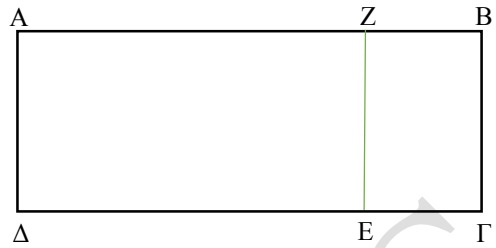


214. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος 8cm και πλάτος 4cm. Αν αυξήσουμε το μήκος και το πλάτος κατά x cm, το εμβαδόν του θα αυξηθεί κατά 28 cm^2 . Να βρείτε το x.

215. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο βρίσκεται μέσα σ' ένα τρίγωνο. Αν το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου είναι 9 τ.μ. , να υπολογίσετε το x.



216. Ένας κηπουρός θέλει να περιφράξει με σύρμα έναν κήπο ΑΒΓΔ που έχει σχήμα ορθογωνίου και εμβαδόν 576cm^2 . Στη συνέχεια θέλει να χωρίσει τον ορθογώνιο αυτό κήπο, σε δύο μικρότερους σχήματος ορθογωνίου, τους ΑΖΕΔ και ΖΒΓΕ. Αν το σύρμα έχει συνολικό μήκος 132m, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του κήπου αυτού.



217. Το 2010 η ηλικία ενός πατέρα είναι x^2 , ενώ η ηλικία της κόρης του είναι x . Όταν η ηλικία του πατέρα θα γίνει $13x$, τότε η ηλικία της κόρης του θα είναι x^2
- Να βρείτε την ηλικία που έχει ο πατέρας το 2010.
 - Πότε η ηλικία της κόρης θα είναι x^2 ;

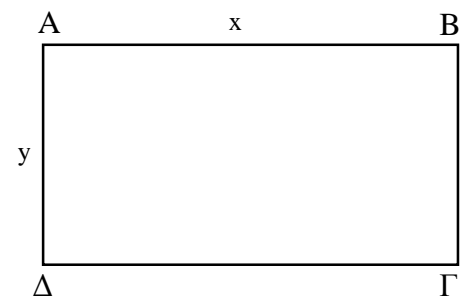
218. Τα μήκη των τριών πλευρών ενός τριγώνου είναι 4cm, 6cm και 8cm. Αν αυξήσουμε το μήκος κάθε πλευράς κατά x cm, το τρίγωνο γίνεται ορθογώνιο. Να βρείτε το x .

219. Ορισμένα άτομα θα μοιραστούν 3600 €. Αν τα άτομα ήταν 5 λιγότερα, ο καθένας θα έπαιρνε 24€ περισσότερα. Να βρείτε πόσα ήταν τα άτομα και πόσα χρήματα πήρε ο καθένας;

220. Ένα ποταμόπλοιο, όταν κινείται σε ήρεμα νερά, έχει μια σταθερή ταχύτητα v . Το ποταμόπλοιο ξεκινά από το σημείο Α του ποταμού, πηγαίνει στο σημείο Β που απέχει 24km από το Α και επιστρέφει στο Α. Κατά τη μετάβαση από το Α στο Β προστίθεται η ταχύτητα 2km/h που έχει το νερό του ποταμού, ενώ στην επιστροφή η ταχύτητα αυτή αφαιρείται. Αν ολόκληρο το ταξίδι διαρκεί συνολικά 5 ώρες, να βρείτε την ταχύτητα του ποταμόπλοιου.

221. Ένα αγρόκτημα οργώνεται από δύο τρακτέρ Α και Β, αν δουλέψουν συγχρόνως σε 6 ώρες. Αν οργώσει το αγρόκτημα μόνο το τρακτέρ Α, τότε χρειάζονται 5 ώρες περισσότερες απ' όσες χρειάζονται για να οργώσει το αγρόκτημα το τρακτέρ Β μόνο του. Να βρείτε σε πόσες ώρες καθένα τρακτέρ οργώνει μόνο του το αγρόκτημα.

222. Στο διπλανό ορθογώνιο ο λόγος της μεγαλύτερης διάστασης (x) προς τη μικρότερη διάσταση (y) είναι ίσος με τον λόγο του αθροίσματος των δύο διαστάσεων ($x+y$) προς τη μεγαλύτερη διάσταση (x). Σε αυτή την περίπτωση ο λόγος $\frac{x}{y}$ είναι ίσος με τον χρυσό αριθμό φ . Μπορείτε να βρείτε τον λόγο $\frac{x}{y} = \varphi$



Συνδυαστικά θέματα

223. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \sqrt{\lambda + 3} \cdot x + \lambda = 0$ (1)
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες.
 - Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \sqrt{\lambda^2 + 6\lambda + 9} + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1}$

224. i) Να βρείτε το ανάπτυγμα: $(2 - \sqrt{3})^2$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3 - 2(x - 2\sqrt{3}) = -(x - 3)(x + 3)$

iii) Αν x_1 είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης, να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{x_1}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

225. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\sqrt{3} + 1) \cdot x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta = (\sqrt{3} - 3)^2$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση (1)

iii) Αν ρ η άρρητη ρίζα της εξίσωσης (1), να αποδείξετε ότι ο αριθμός : $\alpha = \frac{1}{\rho} - \frac{\rho}{2}$ είναι ακέραιος.

226. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1) ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$

iii) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση :

$$A = \left(\sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 9} + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$
 έχει τιμή ανεξάρτητη του λ , την οποία και να βρείτε.

227. Η εξίσωση : $x^2 + \lambda\sqrt{2} \cdot x - \mu(\mu - \lambda) - \left(\mu + \frac{1}{2} \right) = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.

i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .

ii) Αν ρ η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1), τότε:

α) να λύσετε την εξίσωση $x^2 + (\rho - 1)x - \rho = 0$

β) να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

228. Η εξίσωση : $x^2 - (\lambda - 1)x + 2(\lambda - 3) = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.

i) Να βρείτε τον αριθμό λ .

ii) Αν ρ η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1), τότε να βρείτε τον αριθμό : $\kappa = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\rho}} \cdot \sqrt[12]{\rho^{37}}$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $|2x^2 + \lambda x - \sqrt{\kappa + \lambda}| + |2x^2 - (\kappa + \lambda)x + \kappa| = 0$

229. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\Delta - 2) \cdot x + \frac{\Delta - 5}{4} = 0$ (1), όπου Δ είναι η διακρίνουσα της.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ .

ii) Να λύσετε την εξίσωση (1)

iii) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{2\rho_1^2}$.

230. Η εξίσωση : $x^2 + 2\sqrt{\alpha + \beta} \cdot x - \gamma = 0$ (1), με $\alpha, \beta, \gamma > 0$ έχει μία διπλή ρίζα. Να αποδείξετε ότι :

i) $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

ii) η εξίσωση : $\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{4} x^2 + \sqrt{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3} \cdot x + 3\sqrt{\alpha\beta\gamma} = 0$ έχει μία διπλή ρίζα, την οποία και να βρείτε.

231. Δίνονται οι εξισώσεις : $x^2 - (2\lambda - 1)x - 3 = 0$ (1) και $x^2 - (\lambda - 2)x + 3\lambda = 0$ (2) με $\lambda \neq -1$. Αν οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν κοινή ρίζα τον αριθμό ρ , τότε:

i) να βρείτε τους αριθμούς ρ και λ .

ii) να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2)

iii) να λύσετε την εξίσωση : $|x + \rho| = x^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^\lambda \cdot x + \rho$.

232. Δίνεται ο δειγματικός χώρος : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) $A = \{\lambda \in \Omega / \text{η εξίσωση } x^2 + 4x + \lambda = 0 \text{ είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}\}$

ii) $B = \{\mu \in \Omega / \text{η εξίσωση } x^2 + \mu x + 2\mu - 3 = 0 \text{ έχει πραγματικές ρίζες}\}$

233. Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει :

$$6(P(A))^2 + 11P(A') = 8, P(A - B) = \frac{1}{12} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$

ii) Να βρείτε την πιθανότητα:

α) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B

β) να μην πραγματοποιηθεί το B

γ) να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A και B

δ) να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B

ε) να πραγματοποιηθεί το A ή να μην πραγματοποιηθεί το B.

234. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 3)x + 3\lambda - 2 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) , να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει :

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = (x_1 - x_2)^2 \text{ έχει τιμή ανεξάρτητη του } \lambda, \text{ την οποία και να βρείτε.}$$

235. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 4(\lambda + 1)x + 8\lambda - 1 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) .

α) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (x_1 - 2)(x_2 - 2)$ είναι ανεξάρτητη του λ

β) Να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει : $x_1^2 x_2 + x_1 + x_1 x_2^2 + x_2 = 64$

236. Έστω ρ_1 και ρ_2 (με $\rho_1 \neq \rho_2$) οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$. Να βρείτε συναρτήσει των α, β, γ τις παραστάσεις :

i) $|\rho_1 - \rho_2|$

ii) $|\rho_1^2 - \rho_2^2|$

iii) $|\rho_1| + |\rho_2|$

237. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda + 6 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Να βρείτε το λ , ώστε το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με 14.

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $x_1^2 + x_2^2$

ii) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

238. Δίνεται ο αριθμός : $\mu = (\sqrt{20} - 2)\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ και η εξίσωση : $x^2 + \mu^{\frac{1}{3}} \cdot \lambda \cdot x - \mu = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός μ είναι ακέραιος .

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες της και την τιμή του λ .

239. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 4 = 0$ (1) .

i) Να βρείτε τον αριθμό: $\alpha(1 + x_1)^{2011}(1 + x_2)^{2011}$

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = (ax_1 + 2)(ax_2 + 2)$

iii) Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{\alpha}{x_1}$ και $\frac{\alpha}{x_2}$

240. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 7 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τις οποίες ισχύει : $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -2$.

α) Να βρείτε το λ

β) Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$

241. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $10x^2 - 8x + 1 = 0$. Θεωρούμε και τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει : $P(A) = x_1 + x_2$, $P(B) = x_1 \cdot x_2$ και $P(A \cap B) = x_1^2 x_2 \cdot x_1 x_2^2$

Να βρείτε τις πιθανότητες :

i) $P(A), P(B)$ και $P(A \cap B)$

ii) $P(A \cup B)$

iii) $P(A - B)$

iv) $P((A - B) \cup (B - A))$

242. Η εξίσωση : $(x+1)^4 - (a^2 + 3a)(x^2 + 2x + 1) + 2a^2 - a + 3 = 0$ έχει ρίζα το -3.

i) Να βρείτε τον αριθμό a .

ii) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

243. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda + 1)x^4 - (\lambda^4 - 1)x^3 - \lambda x^2 - \lambda = 0$ (1)

i) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για $\lambda = 1$ να λυθεί η εξίσωση (1).

244. Δίνεται η εξίσωση $(2\alpha - \beta)x^4 - (\alpha - \beta)x^3 + 2x^2 + (\alpha - 1)x - 3\alpha = 0$ (1).

i) Να βρείτε τα α, β , ώστε η (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για $\alpha=1$ και $\beta=1$ να λυθεί η (1).

245. Δίνεται η εξίσωση: $(2\lambda + \mu)x^4 - |3\lambda + \mu - 1|x^3 - (\lambda - \mu)x^2 + 2(|\lambda| - 1)x - |3\lambda + \mu| = 0$ (1)

i) Να βρείτε τα λ και μ , ώστε η (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για $\lambda = -1$ και $\mu = 4$ να λυθεί η (1).

246. Δίνεται η εξίσωση : $x^4 + (\lambda^3 + 8)x^3 - 10x^2 + 5 - 2\lambda = 0$ (1) .

i) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα i) να λύσετε την εξίσωση (1).

247. Δίνεται η εξίσωση : $x^4 - 6x^2 + (\lambda^2 + \mu^2 - 6\lambda + 4\mu + 13)x - \mu^\lambda = 0$ (1) .

i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ , ώστε η εξίσωση (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για τις τιμές των λ και μ που βρήκατε στο ερώτημα i) να λύσετε την εξίσωση (1).

248. Δίνεται η εξίσωση : $x^4 + (\lambda^2 - 2\lambda - 3)x^3 - 5x^2 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x + \lambda + 1 = 0$ (1) .

i) Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (1) να είναι διτετράγωνη.

ii) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα i) να λύσετε την εξίσωση (1).

249. Η εξίσωση : $\frac{1}{4}x^2 + (\beta - 9)x - \alpha^2 + 6\alpha - 9 = 0$ (1) έχει μία διπλή ρίζα.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

ii) Να λύσετε την εξίσωση : $\alpha\beta^x - 28a^x + \beta = 0$.

250.i) Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει : $\alpha - \beta = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$ να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

ii) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x + 3} = \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 6x + 8} + \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 6x + 8}$

251. Έστω η εξίσωση $x^2 - (2\lambda + 4)x - \lambda^2 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το λ ώστε η (1) να έχει δύο ρίζες αντίθετες.

iii) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (ii), να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{\lambda^2} \cdot |x - 3| = x - \lambda$

252. Δίνονται οι εξισώσεις : $\frac{(x-1)^2}{x-2} - \frac{2(2-x^2)}{x^2-2x} = \frac{2}{x}$ (1) και $\lambda(x+3-\lambda) = 6 - 2(\lambda-x)$ (2).

i) Να λύσετε την εξίσωση (1).

ii) Έστω ρ η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης (1). Να βρείτε το λ , ώστε η εξίσωση (2) να έχει μοναδική λύση το ρ

253. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1) + 12 = 4(\lambda x - 1)$ (1). Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα, τότε:

i) να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 - |x| - 6 = 0$

β) $\frac{x-\lambda}{x+\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2+\lambda}{x^2-\lambda} = \lambda^{\frac{1}{2}} - \frac{7x-15}{x-2}$

254.i) Να βρείτε το ανάπτυγμα : $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} + 1)^2 \right]$

ii) Να βρείτε τον αριθμό : $\alpha = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\sqrt{3} + 2}$.

iii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x^2 + a^2x + 2a} = a$

β) $|x^2 + 3x - 10| - |x - a| = 0$

255. Δίνεται ο αριθμός : $\alpha = \sqrt{3^4} \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \sqrt{3^5} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3^5}}$.

i) Να βρείτε τον αριθμό α .

ii) Αν οι εξισώσεις : $x^3 + 9a = 0$ (1) και $\frac{3\beta^3}{8} \cdot x^2 - 1 = 0$ (2) έχουν κοινή λύση, τότε :

α) να βρείτε τον αριθμό β

β) να λύσετε την εξίσωση (2)

iii) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \sqrt{\frac{1}{\alpha\beta}} = 0$

256. Δίνονται οι αριθμοί : $\alpha = \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{7+3\sqrt{5}}$ και $\beta = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x^2 - a^2x + 2a} - \sqrt{x^2 + \beta x + 9} = \sqrt[3]{\alpha^\beta}$

β) $\frac{|x| + \frac{\beta}{\alpha}}{|x| - x} = (a + \beta)^{\frac{2}{3}}$

257. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 2x - 1 = 0$ (1).

i) Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$ και $\mu = (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $||x| + x| + ||x| - x| = |\lambda(x-1) + \mu|$

258. Έστω η εξίσωση $x^2 - 2(\mu+3)x + \mu^2 + 6\mu - 7 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = |\rho_1 - \rho_2|$

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $||2x-1| - 5| = A$

259. Δίνεται ο αριθμός: $\alpha = \sqrt[4]{\frac{1}{(5-\sqrt{7})^2} + \frac{1}{(5+\sqrt{7})^2}}$.

i) Να βρείτε τον αριθμό α .

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{a})x + \frac{11\sqrt{3}}{3} - 6\sqrt{a} = 0$

iii) Αν ρ είναι η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης, να λύσετε την εξίσωση: $|x - \sqrt{2}| = \rho$.

260. Έστω η εξίσωση $2x^2 + 4x + 3\lambda - 1 = 0$ (1).

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1). Να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 15$

iii) Να μετατρέψετε το παρακάτω κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή: $A = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2}}}$

261. Δίνονται οι αριθμοί: $\lambda = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}$ και $\mu = \sqrt[3]{3^8 \sqrt{3} \sqrt{3^3}} \cdot \sqrt[16]{3^9}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + \mu x + \lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} \quad \beta) B = |x_1 - x_2|$$

262. Έστω η εξίσωση $2x^2 + 2(\mu + \nu)x - \mu^2 - \nu^2 = 0$ (1).

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1).

α) Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1^2 + x_1x_2$ και $x_2^2 + x_1x_2$

β) Να βρείτε τους αριθμούς μ και ν , ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 - x_1x_2 = -1$

263. Δίνονται οι αριθμοί: $\alpha = 3(\sqrt{3+\sqrt{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2}})$ και $\beta = \sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[3]{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{4-\sqrt{7}}$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + \alpha x + 4 = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - \beta x - 5 = 0$.

Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1\rho_1 + x_2\rho_2$ και $x_2\rho_1 + x_1\rho_2$.

264. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 + ax + \beta = 0$ (1). Η εξίσωση: $x^2 - (a^2 - 1)x - 5\alpha\beta = 0$ (2) έχει ρίζες τους αριθμούς $2x_1 - 1$ και $2x_2 - 1$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - ax + \alpha + \beta = |x + \beta|$.

265. Η εξίσωση $x^2 - 2x + 5 - 2\beta(\alpha + 1) = 0$ (1) έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$.

i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β και να λύσετε την εξίσωση (1)

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 + (a + \beta)x + \beta - \alpha = 0$. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\gamma = 2x_1^3 - 13x_1x_2^2 - 13x_2x_1^2 + 2x_2^3$$

iii) Να μετατρέψετε το κλάσμα : $K = \frac{1}{(1-\sqrt{\beta})^3\sqrt{\gamma}}$

266. Η εξίσωση $x^2 - ax - a^2 = 0$ έχει ρίζες τις x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει : $x_1(x_2 + 4) + 4(x_2 - 1) = 0$

i) Να βρείτε τον αριθμό a

ii) Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $1 - \frac{1}{x_1}$ και $1 - \frac{1}{x_2}$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{x^2 + ax + 1} - \sqrt{(ax)^2 + a^2x + 1} = 0$

267. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + \lambda = 0$ (1).

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε το λ , ώστε να ισχύει : $5x_1^3x_2 - 2\lambda - 4x_1^2x_2 = 4x_1x_2^2 + 3 - 5x_1x_2^3$

iii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{\lambda^3} \sqrt[3]{5^2} \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\lambda^3}}$

268. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + (\lambda - 4)x - \lambda = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Έστω ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1) είναι τριπλάσιο από το γινόμενο τους.

α) Να βρείτε την τιμή του λ

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς x_1^2 και x_2^2

269. Δίνεται η εξίσωση $4x(x + \mu) = 8(1 - x) - \mu^2$ (1).

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες

ii) Να βρείτε το μ , ώστε το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με 2.

iii) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να λύσετε την εξίσωση : $\left| \mu^{\frac{1}{2}} \cdot x + |x| \right| = 35 - \mu x$

270. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(A \cup B)$ είναι ρίζες

της εξίσωσης: $8x^2 - 10x + 3 = 0$

i) Να βρείτε τις $P(A)$ και $P(B)$

ii) Αν επιπλέον ισχύει: $P(A - B) = (\sqrt{32} + \sqrt{8} - \sqrt{50})^{-6}$ τότε:

α) να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B

β) να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το B

γ) να λύσετε την εξίσωση : $P(\Omega) \cdot x^2 - 16^{P(B-A)} \cdot |x| = 3 + P(\emptyset)$