

Επανάληψη Παραγώγων

1. Δίνεται παραγωγήσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι: $8f'(x) = f(x)(f^2(x) - 4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \sqrt{2}$.

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2}{\sqrt{e^x + 1}}$.

b) Αν συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγήσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $g'(x) + f(x)g^2(x) = 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x\sqrt{2} < \frac{1}{g(0)} - \frac{1}{g(-x)} < xe^{\frac{x}{2}}f(x)$ για κάθε $x > 0$.

c) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $\sqrt{e^x + 1} = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

2. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγήσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν:

$f''(x) = f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2$ και $f'(0) = -1$.

a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x) - f'(x) - 1)e^x$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

b) Να αποδείξετε ότι $f'(x) - f(x) = -1 - 2e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Να βρεθεί ο τύπος της f .

d) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της.

e) Να αποδείξετε ότι $e^{-\alpha}(\alpha - \beta) \leq e^{-\beta} - e^{-\alpha} \leq e^{-\beta}(\alpha - \beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

b) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ και $\frac{4}{3}$.

c) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x(x-1)} > \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$.

d) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = \frac{4x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$.

4. Δίνεται δύο φορές παραγωγήσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $6x < f''(x) < 12x^2$ για κάθε $x > 0$ και $f'(0) = f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

a) $x^3 < f(x) < x^4$ για κάθε $x > 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$

d) Η εξίσωση $f(x) = 1 - e^x$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

5. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $2f^3(x) + 3f(x) = x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

b) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγήσιμη στο \mathbb{R} .

c) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

- δ)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .
στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-5,0)$.
ζ) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.
η) Να αποδείξετε ότι $9f(x) \leq x+8$ για κάθε $x \geq 1$

6. Δίνεται συνάρτηση $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ για την οποία ισχύει ότι:
 $f(2)=2$, $f'(2)=0$ και $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = -1$ για κάθε $x \in (0,4)$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,4)$.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{4x-x^2}$.
γ) Α, Β δύο τυχαία σημεία της γραφικής παράστασης της f , να αποδείξετε ότι $(AB) \leq 4$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να αποδείξετε ότι $a^\beta > \beta^a$ για κάθε $a < \beta$.
γ) Να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x$ για κάθε $x > 0$.
δ) Άν υπάρχει $a > 0$ για τον οποίο ισχύει ότι $x^e \leq a^x$, να αποδείξετε ότι $a \geq e$.

8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $2f(x) - 2x \geq f(2) + f(-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $f(2) - f(-2) = 4$
β) υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = f(-2) + 3$.
γ) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2,2)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 2$.
δ) υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 1$.
ε) Η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ρίζες.

9. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει: $f'(x) = \frac{4e^x + 3}{e^x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $g(x) = f(x) - 4x$.
β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 4x$ το πολύ σ' ένα σημείο.
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .
δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$.

10. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3x}{x - 2} = 1$ και $f(4) = 6$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(2) = 6$.
β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 3$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (2, 4)$.

δ) Αν η f είναι κοίλη, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (2,4)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

11. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} , με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 2$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) - 4x + 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) \geq 0$.

12. Εστω πορσγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \rightarrow (0,+\infty)$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $h(x) = \ln(f(x)) + \frac{1}{2}x^2$, $x > 0$.

α) Αν για κάθε $x > 0$ είναι $h''(x) > 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Αν $e^6 f(4) = f(2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = -x_0 f(x_0)$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2014$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\ln x)}{x}$.

13. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $xf'(x) - 2f(x) = 2x$ για κάθε $x > 0$ και $f(2) = 0$.

α) Μα μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

β) Να βρείτε την f .

γ) Αν συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x) = f(x)$ και $h(2) = 0$, να

υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{\ln^2(x-1)}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(\ln x - \lambda)$, $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = -2x + \frac{1}{2}$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, f(1))$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{3}{2}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = 2014$ ακριβώς σε ένα σημείο στο διάστημα $(e, +\infty)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2)$, $x > -1$, $\lambda \geq -1$.

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Εστω ότι $\lambda = -1$

- να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

iii. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + a^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε $a \neq 0$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{2}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f καθώς και το σημείο τομής τους.
- δ) Να προσδιορίσετε τη θέση της C_f ως προς τις ασύμπτωτες.

17. Δίνονται συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} με $f'(x) - g'(x) = 2$ και $f'(x) \neq 2$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$, τότε:

- α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3}{f(x) - 2x + 1}$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στο $+\infty$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) - g(x) = 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha-2)x+9}{x+\beta}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει

ασύμπτωτες τις ευθείες $y = 3$ και $x = -1$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{3x+9}{x+1}$.

β) Να βρείτε συνάρτηση την αρχική συνάρτηση G της f στο διάστημα $(1, +\infty)$, αν $n C_G$ διέρχεται από το σημείο $M(0, 3)$.

γ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{G(x)}{x+1}, x > -1.$$

19. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

- β) Να αποδείξετε ότι: $f(\sqrt[50]{50}) > f(\sqrt[60]{60})$.

γ) Υλικό σημείο κινείται επί της C_f και η τετμημένη του αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

20. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ με $f'(2) > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει μέγιστο στο $x_0 = 2$.

Εστω ότι $f(2) = 5, f(4) = 9$

- β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 7$.
- γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_2, x_3 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε $f'(x_3) + f'(x_2) = f'(x_3)f'(x_2)$.
- δ)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 4 - \frac{f(x)-1}{x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2, 4)$.
- ε)** Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 4)$, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- στ)** Αν $f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in (2, 4)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x + 1$, $x \in [2, 4]$.

Στέλιος Μιχαήλογλου – Ευάγγελος Τόλης

Λύσεις

$$\begin{aligned}
 1. \quad \text{a)} \quad & 8f'(x) = f^3(x) - 4f(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 8f'(x)f(x) = f^4(x) - 4f^2(x) \Leftrightarrow \\
 & 4 \cdot 2f(x)f'(x) = f^4(x) - 4f^2(x) \stackrel{4f^4(x)}{\Leftrightarrow} \frac{2f(x)f'(x)}{f^4(x)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{f^2(x)} \Leftrightarrow \\
 & -\frac{2f'(x)}{f^3(x)} = \frac{1}{f^2(x)} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f^2(x)} \right)' - \frac{1}{f^2(x)} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \\
 & \left(\frac{1}{f^2(x)} \right)' e^{-x} - e^{-x} \frac{1}{f^2(x)} = -\frac{1}{4} e^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f^2(x)} e^{-x} \right)' = \left(\frac{e^{-x}}{4} \right)' \Leftrightarrow \\
 & \frac{1}{f^2(x)} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{4} + C \stackrel{x=0}{\Rightarrow} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{4} \text{ άρα} \\
 & \frac{1}{f^2(x)} e^{-x} = \frac{e^{-x} + 1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = \frac{1 + e^{-x}}{4} \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{4}{1 + e^{-x}}
 \end{aligned}$$

Είναι $f(x) \neq 0$ και η f είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο και επειδή $f(0) = \sqrt{2}$ είναι

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } f(x) = \frac{2}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$\text{b)} \quad \text{Είναι } g'(x) = -f(x)g^2(x) \Leftrightarrow -\frac{g'(x)}{g^2(x)} = f(x) \Rightarrow \left(\frac{1}{g(x)} \right)' = f(x)$$

$$\text{Εστω } \varphi(x) = \frac{1}{g(x)} \text{ τότε } \varphi'(x) = f(x)$$

Από το ΘΜΤ για τη φ στο $[-x, 0]$ υπάρχει $\xi \in (-x, 0)$:

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(0) - \varphi(-x)}{-x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{g(0)} - \frac{1}{g(-x)} \right)$$

$$\text{όμως } -x < \xi < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < e^\xi < 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{e^{-x} + 1} < \sqrt{e^\xi + 1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{e^\xi + 1}} < \frac{2}{\sqrt{e^{-x} + 1}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} < f(\xi) < \frac{2\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{2} < \frac{1}{x} \left(\frac{1}{g(0)} - \frac{1}{g(-x)} \right) < f(x) \sqrt{e^x} \Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{2} < \frac{1}{g(0)} - \frac{1}{g(-x)} < xf(x)\sqrt{e^x}$$

$$\text{γ)} \quad \sqrt{e^x + 1} = 2\lambda \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\sqrt{e^x + 1}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda} (1)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \left[2(e^x + 1)^{\frac{1}{2}} \right]' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (e^x + 1)^{-\frac{1}{2}} (e^x + 1)' = -\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ άρα το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι: } f(A) = (0, 2)$$

$$\text{Άν } \frac{1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda < 0 \text{ ή } \frac{1}{\lambda} > 2 \Leftrightarrow 0 < \lambda < \frac{1}{2} \text{ τότε } \eta(1) \text{ είναι αδύνατη.}$$

Αν $0 < \frac{1}{\lambda} < 2 \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{2}$, τότε η (1) έχεις ακριβώς μία ρίζα.

2. a) $g(x) = (f'(x) - f''(x))e^x + (f(x) - f'(x) - 1)e^x = (f(x) - f''(x) - 1)e^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$

b) $g(0) = 2 \Leftrightarrow f'(0) - f(0) = -1 - 2e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

γ) $f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = -e^{-x} - 2e^{-2x} \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = (e^{-x} + e^{-2x})' \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = e^{-x} + e^{-2x} + c \Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{-x} + ce^x, f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 0, \text{άρα } f(x) = 1 + e^{-x}$

δ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ είναι

$-x_1 \neq -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} \neq e^{-x_2} \Leftrightarrow 1 + e^{-x_1} \neq 1 + e^{-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται. $f(x) = y \Leftrightarrow 1 + e^{-x} = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$.

Τότε $-x = \ln(y-1) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y-1)$, άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x-1), x > 1$

ε) Αν $\alpha < \beta$, τότε εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο

ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow -e^{-\xi} = \frac{e^{-\beta} - e^{-\alpha}}{\beta - \alpha}$. Είναι:

$$\begin{aligned} \alpha < \xi < \beta &\Leftrightarrow -\alpha > -\xi > -\beta \Leftrightarrow e^{-\alpha} > e^{-\xi} > e^{-\beta} \Leftrightarrow -e^{-\alpha} < -e^{-\xi} < -e^{-\beta} \Leftrightarrow \\ -e^{-\alpha} < \frac{e^{-\beta} - e^{-\alpha}}{\beta - \alpha} &< -e^{-\beta} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)e^{-\alpha} < e^{-\beta} - e^{-\alpha} < e^{-\beta}(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Όμοια αν $\alpha > \beta$.

Αν $\alpha = \beta$, τότε προφανώς ισχύει η ισότητα.

3. a) $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και αφού f συνεχής, είναι $f \uparrow \mathbb{R}$.

b) $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ οπότε $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{4} > \frac{e^{\sqrt{2}}}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{2}}} > \frac{4}{3} \Leftrightarrow e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > \frac{4}{3}$

γ) $e^{x^2-x} > \frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^x} > \frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4+1} > \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x^2) > f(x) \Leftrightarrow x^2 > x \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

δ) $e^x = \frac{4x^2+4x+1+1}{x^2+2x+1+1} \Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x+1)} = \frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}} = \frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{(2x+1)^2+1} = \frac{e^x+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow f(2x+1) = f(x+1) \Leftrightarrow 2x+1 = x+1 \Leftrightarrow x = 0$

4. a) Εστω $g(x) = f(x) - x^3, x \geq 0$.

Είναι $g'(x) = f'(x) - 3x^2$, $g''(x) = f''(x) - 6x > 0 \Rightarrow g' \uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f(x) > x^3$. Όμοια για την $h(x) = f(x) - x^4$

β) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Είναι $g'(x) > g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(x) > 3x^2$ και $h'(x) < h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(x) < 4x^3$

Είναι $3x^2 < f'(x) < 4x^3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$, άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

γ) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

Είναι $3\xi^2 < f'(\xi) < 4\xi^3$ και επειδή $x < \xi < x+1$, όταν $x \rightarrow +\infty$ είναι $\xi \rightarrow +\infty$, οπότε και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3\xi^2) = +\infty$, άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$

δ) Εστω $t(x) = f(x) - 1 + e^x$, $x \geq 0$. Είναι $t'(x) = f'(x) + e^x > 0 \Rightarrow t \uparrow [0, +\infty)$.

Είναι $t(0) = 0$ και για $x > 0$ είναι $t(x) > t(0) = 0$, άρα η $x=0$ είναι μοναδική.

5. **α)** Είναι $2f^3(x) + 3f(x) = x + 4$ και για $x = x_0$ είναι $2f^3(x_0) + 3f(x_0) = x_0 + 4$ και με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε: $2f^3(x) - 2f^3(x_0) + 3f(x) - 3f(x_0) = x - x_0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (f(x) - f(x_0))(2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3) = x - x_0$
Είναι $2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) \geq 0$, αφού $\Delta = -12f^2(x_0) \leq 0$,

$$\text{άρα } f(x) - f(x_0) = \frac{x - x_0}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3} \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } |f(x) - f(x_0)| &= \frac{|x - x_0|}{|2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3|} \leq \frac{|x - x_0|}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{|x - x_0|}{3} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{|x - x_0|}{3}. \end{aligned}$$

Από το ΚΠ είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα f συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

β) (1) $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3}$ και
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3} = \frac{1}{6f^2(x_0) + 3}$,
άρα $f'(x_0) = \frac{1}{6f^2(x_0) + 3}$.

γ) Εστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε $2f^3(x_1) \geq 2f^3(x_2)$ και
 $2f^3(x_1) + f(x_1) \geq 2f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 4 \geq x_2 + 4 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1) < f(x_2)$ και
 $f \uparrow \mathbb{R}$.

δ) Επειδή η f είναι \uparrow είναι και 1-1 και αντιστρέφεται. Για $f(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$ είναι
 $2y^3 + 3y = f^{-1}(y) + 4 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 2y^3 + 3y - 4, y \in \mathbb{R}$.

ε) Επειδή $f \uparrow$, τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην $y = x$, άρα, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x$. Η σχέση $2f^3(x) + 3f(x) = x + 4$, γίνεται: $2x^3 + 3x = x + 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Κοινό σημείο το $(1,1)$.

στ) $2f^3(-5) + 3f(-5) = -1 \Leftrightarrow f(-5)(2f^2(-5) + 3) = -1 \Rightarrow f(-5) < 0$
 $2f^3(0) + 3f(0) = 2 \Leftrightarrow f(0)(2f^2(0) + 3) = 2 \Rightarrow f(0) > 0$ και Θ.Β....

ζ) $f^{-1}(1) = 1$ και $(f^{-1})'(x) = 6x^2 + 3, (f^{-1})'(1) = 9$

$$\varepsilon: y - f^{-1}(1) = (f^{-1})'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 9x - 8$$

η) Εστω $g(x) = 9f(x) - x - 8, x \geq 1$. Είναι $g'(x) = 9f'(x) - 1 = \frac{6(1-f^2(x))}{6f^2(x)+3} < 0$, αφού για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 1$. Άρα $g \downarrow [1, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 1$ είναι $g(x) \leq g(1) = 0$

6. **α)** Είναι $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = -1 \Leftrightarrow f(x)f''(x) = -1 - (f'(x))^2 < 0$. Αν $f''(x) > 0$ τότε $f' \uparrow$,

οπότε για $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < f'(2) = 0 \Rightarrow f \downarrow [0, 2]$, άρα $f(x) > f(2) = 2 > 0$

Για κάθε $2 < x < 4 \Rightarrow f'(x) > f'(2) = 0 \Rightarrow f \uparrow [2, 4]$, άρα $f(x) > f(2) = 2 > 0$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$ που είναι άτοπο γιατί $f''(x) \cdot f(x) > 0$.

Οπότε $f''(x) < 0$ άρα $f(x) > 0$.

β) Είναι $(f'(x)f(x))' = (-x)' \Leftrightarrow f'(x)f(x) = -x + C_1 \Rightarrow C_1 = 2$

Άρα $2f'(x)f(x) = -2x + 4 \Rightarrow (f^2(x))' = (4-x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = 4x - x^2 + C_2$

Για $x=2 \quad C_2=0$ άρα $f^2(x) = 4x - x^2$ και αφού $f(x) > 0$ τότε $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

γ) Εστω $f(x) = y$ τότε $y = \sqrt{4x - x^2} \Rightarrow y^2 = 4x^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

Οπότε η C_f είναι το ημικύκλιο του κύκλου με διάμετρο $\Gamma\Delta$, όπου $\Gamma(2, 0)$ και $\Delta(0, 4)$.

Για οποιαδήποτε χορδή AB του ημικυκλίου, ισχύει: $|AB| \leq |\Gamma\Delta|$. Άρα $|AB| \leq 4$

x	0	e	$+\infty$
---	---	---	-----------

7. a) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
 $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

f'	Φ	+	-
f		O.M.	

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, e)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$.

Για κάθε $x \in (e, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Έχει ολικό μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

b) $e < a < \beta \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(a) > f(\beta) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln \beta}{\beta} \Leftrightarrow \beta \ln a > a \ln \beta \Leftrightarrow \ln a^\beta > \ln \beta^a \Leftrightarrow a^\beta > \beta^a$.

c) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e \ln x \leq x \Leftrightarrow \ln x^e \leq x \Leftrightarrow x^e \leq e^x$.

d) $x^e \leq a^x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln a^x \Leftrightarrow e \ln x \leq x \ln a \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln a}{e} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\ln a}{e}$.

Είναι $f(x) \leq \frac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$, άρα πρέπει $\frac{1}{e} \leq \frac{\ln a}{e} \Leftrightarrow \ln a \geq 1 \Leftrightarrow a \geq e$.

8. a) Για $x=2$ είναι $2f(2)-4 \geq f(2)+f(-2) \Leftrightarrow f(2)-f(-2) \geq 4$ (1)

Για $x=-2$ είναι $2f(-2)+4 \geq f(2)+f(-2) \Leftrightarrow f(2)-f(-2) \leq 4$ (2)

Από τις (1), (2) είναι $f(2)-f(-2)=4$.

b) Εστω $g(x) = f(x)-f(-2)-3$, $x \in [-2, 2]$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} είναι και συνεχής, οπότε και η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$.

Είναι $g(-2) = f(-2)-f(-2)-3 = -3 < 0$ και $g(2) = f(2)-f(-2)-3 = 4-3=1>0$.

Δηλαδή $g(-2)g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει

$x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε: $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(-2) + 3$.

c) Για την f εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσος Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[-2, 0]$ και $[0, 2]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (-2, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 2)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0)-f(-2)}{2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(0)}{2}.$$

$$\text{Είναι } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{f(0)-f(-2)}{2} + \frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{f(2)-f(-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

d) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[-2, 2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(2)-f(-2)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

e) Μια λύση της εξίσωσης $f'(x) = 1$ είναι το ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

$$\text{Είναι } 2f(x)-2x \geq f(2)+f(-2) \Leftrightarrow 2f(x)-2x-f(2)-f(-2) \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Εστω } h(x) = 2f(x)-2x-f(2)-f(-2), x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } h(2) = 0 \text{ και } h(-2) = 0,$$

και η (3) γίνεται $h(x) \geq h(-2)$ και $h(x) \geq h(2)$.

Δηλαδή η h παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.

Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = 2f'(x) - 2$, λόγω του

$$\text{θεωρήματος Fermat ισχύει: } \begin{cases} h'(-2) = 0 \\ h'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f'(-2) - 2 = 0 \\ 2f'(2) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-2) = 1 \\ f'(2) = 1 \end{cases}.$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει τουλάχιστον 3 ρίζες.

9. a) $g'(x) = f'(x) - 4 = \frac{4e^x + 3}{e^x + 4} - 4 = \frac{-13}{e^x + 4} < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

b) Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 4x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4x$ έχει το πολύ μία ρίζα.

c) Είναι $f''(x) = \left(\frac{4e^x + 3}{e^x + 4}\right)' = \frac{4e^x(e^x + 4) - (4e^x + 3)e^x}{(e^x + 4)^2} = \frac{13e^x}{(e^x + 4)^2} > 0$, $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

d) Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x+1]$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$.

Είναι $x < \xi < x+1$ και επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow \frac{4e^x + 3}{e^x + 4} < f(x+1) - f(x) < \frac{4e^{x+1} + 3}{e^{x+1} + 4}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + 3}{e^x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(4 + \frac{3}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{4}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{4}{e^x}} = 4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{x+1} + 3}{e^{x+1} + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} \left(4 + \frac{3}{e^{x+1}}\right)}{e^{x+1} \left(1 + \frac{4}{e^{x+1}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{3}{e^{x+1}}}{1 + \frac{4}{e^{x+1}}} = 4, \text{ οπότε λόγω του κριτηρίου}$$

παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 4$.

10. a) Εστω $g(x) = \frac{f(x) - 3x}{x-2}$, $x \neq 2 \Leftrightarrow f(x) = (x-2)g(x) + 3x$ (1)

$$f \text{ παραγωγίσιμη} \Rightarrow f \text{ συνεχής άρα } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 + 6 = 6$$

b) $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)g(x) + 3x - 6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) + 3] = 1 + 3 = 4$

οπότε η εφαπτομένη ε : $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 6 = 4(x-2) \Leftrightarrow y = 4x - 2$

c) Εστω $h(x) = f(x) - (x+3)$, $x \in [2, 4]$. $h(2) = f(2) - 5 = 1 > 0$, $h(4) = f(4) - 7 = -1 < 0$

και ή συνεχής, άρα από θ.Β υπάρχει $x_0 \in (2, 4) : h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 + 3$

δ) Επειδή $f(2) = f(4) = 6$ από το Θ.Rolle για την f στο $[2, 4]$ υπάρχει $\xi \in (2, 4)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Αφού f κοίλη είναι $f' \downarrow$ στο $[2, 4]$ οπότε ξ μοναδικό.

Για $2 < x < \xi$ είναι $f'(x) > f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [2, \xi]$

Για $\xi < x < 4$ είναι $f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \downarrow [\xi, 4]$. Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = \xi$.

11. **a)** Εστω $g(x) = \frac{f(x) - x^2}{x - 1}$, $x \neq 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$. Τότε $f(x) = g(x)(x - 1) + x^2$ και
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x - 1) + x^2] = 1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} είναι και
συνεχής στο $x_0 = 1$, οπότε: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x - 1) + x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x - 1) + (x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(g(x) + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + x + 1) = 4. \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία ε:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 3$$

β) Επειδή η f είναι κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη
της, δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ϵ , οπότε
 $f(x) \geq 4x - 3 \Leftrightarrow f(x) - 4x + 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Για $x = 2$ είναι $f(2) - 4 \cdot 2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow f(2) \geq 5$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, άρα λόγω του

θεωρήματος Μέσος Τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) \geq 5 - 1 = 4.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[1, \xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, \xi_1)$, άρα λόγω του Θ.Μ.Τ.

$$\text{υπάρχει } \xi \in (1, 2) \text{ τέτοιο, ώστε: } f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(1)}{\xi_1 - 1} = \frac{f'(\xi_1) - 4}{\xi_1 - 1} \geq 0.$$

12. **a)** $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + x$, $h''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} + 1$

Όμως $h''(x) > 1$ αρά $\frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} > 0 \Leftrightarrow f''(x)f(x) > f^2(x) \geq 0$ αρά

$f''(x)f(x) > 0 \stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} \text{τότε } f''(x) > 0$ αρά f κυρτή.

B) Είναι $\frac{f(4)}{f(2)} = e^{-6}$ οπότε $\ln \frac{f(4)}{f(2)} = \ln e^{-6} \Leftrightarrow \ln f(4) - \ln f(2) = -6 \Leftrightarrow$

$$\ln f(4) + 8 = \ln f(2) + 2 \Leftrightarrow \ln f(4) + \frac{1}{2}4^2 = \ln f(2) + \frac{1}{2}2^2$$

Άρα $h(4) = h(2)$ οπότε από Θ. Rolle $\exists x_0 \in (2, 4) : h'(x_0) = 0$

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} + x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = -x_0 f(x_0)$$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(\ln x)}{\ln x} \frac{\ln x}{x} \right] = 2014 \cdot 0$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\ln x)}{\ln x} \stackrel{\ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = 2014 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\ln x}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

13. **a) $g'(x) = \frac{f'(x)x^2 - f(x)2x}{x^4} = \frac{x(f'(x) - 2f(x))}{x^3} = \frac{2(xf'(x) - 2f(x))}{x^2} > 0 \Rightarrow g \uparrow (0, +\infty)$**

B) $xf'(x) - 2f(x) = 2x \Leftrightarrow x^2f'(x) - 2xf(x) = 2x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \left(-\frac{2}{x} \right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{2}{x} + C \Leftrightarrow f(x) = -2x + Cx^2, x > 0, C \in \mathbb{R}.$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow -4 + 4C = 0 \Leftrightarrow C = 1, \text{ άρα } f(x) = x^2 - 2x, x > 0.$$

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{\ln^2(x-1)} \stackrel{(0)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h'(x)}{2\ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-2x)(x-1)}{2\ln(x-1)} \stackrel{(0)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-2)(x-1) + x^2 - 2x}{x-1} = 0$

14. **a) Η f είναι παραγωγήσιμη στο $(0, +\infty)$ με: $f'(x) = 2x(\ln x - \lambda) + x$**

Επειδή η ευθεία $y = -2x + \frac{1}{2}$ εφάπτεται στη C_f στο A, ισχύει:

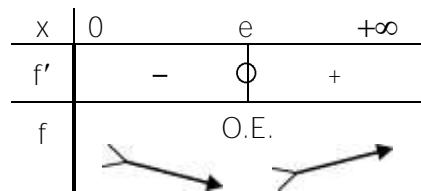
$$f'(1) = -2 \Leftrightarrow -2\lambda + 1 = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Tότε } f(1) = -2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{2} = 1^2(\ln 1 - \lambda) \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

B) Για $\lambda = \frac{3}{2}$ είναι $f(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right)$ και

$$f'(x) = 2x \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + x = 2x(\ln x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ που απορρίπτεται} \\ \text{ή } x = e.$$



Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e]$.

Για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$.

$$\text{Η } f \text{ έχει ολικό ελάχιστο το } f(e) = -\frac{e^2}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{\equiv} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) = +\infty, \text{ οπότε: Για το διάστημα } \Delta_1 = (0, e], \text{ έχουμε:}$$

$$f(\Delta_1) = \left[f(e), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = \left[-\frac{e^2}{2}, 0 \right] \text{ και για το διάστημα } \Delta_2 = [e, +\infty),$$

$$\text{έχουμε: } f(\Delta_2) = \left[f(e), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \left[-\frac{e^2}{2}, +\infty \right).$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{e^2}{2}, +\infty \right).$$

$$\delta) \text{ Επειδή } 2014 \in f(\Delta_2) = \left[-\frac{e^2}{2}, +\infty \right) \text{ και } 2014 \notin f(\Delta_1) = \left[-\frac{e^2}{2}, 0 \right),$$

υπάρχει $x_1 \in (e, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 2014$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(e, +\infty)$, το x_1 είναι μοναδικό.

$$15. \text{ a)} f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2) = \ln \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2}. \text{ Εστω } \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} = u.$$

$$\text{Αν } \lambda > -1, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^2}{x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty, \text{ οπότε}$$

$$\text{για να είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \text{ πρέπει } \lambda = -1. \text{ Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

$$\beta) \text{ i. } f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0 \Rightarrow f \uparrow (-1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [\ln(x+1) - \ln(x+2)] = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ οπότε } f(A) = (-\infty, 0).$$

$$\text{ii. Επειδή } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \text{ η ευθεία } x = -1 \text{ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της } C_f.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ η ευθεία } y = 0 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f$$

$$\text{iii. } f(x) + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\alpha^2.$$

Επειδή $-\alpha^2 \in f(A)$ και η f είναι \uparrow , η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

$$16. \text{ a)} \text{ Είναι } 1+e^{-x} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε } D_f = \mathbb{R}. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}$$

$$\text{με } f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{1}{2} = \frac{-2e^{-x} + 1 + e^{-x}}{2(1+e^{-x})} = \frac{1-e^{-x}}{2(1+e^{-x})}.$$

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [0, +\infty)$. Ελάχιστο το $f(0) = \ln 2$.

$$\text{Είναι } f''(x) = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0 \Rightarrow f \text{ κυρτή στο } \mathbb{R}.$$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \frac{e^x + 1}{e^x} + \frac{x}{2} \right] =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(e^x + 1) - x + \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(e^x + 1) - \frac{x}{2} \right] = +\infty$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{2} \right] = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(1+e^{-x}) \right] = 0$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ η f είναι συνεχής και \downarrow , άρα $f(\Delta_1) = [\ln 2, +\infty)$

Στο διάστημα $\Delta_1 = [0, +\infty)$ η f είναι συνεχής και \uparrow , άρα $f(\Delta_2) = [\ln 2, +\infty)$.

Άρα $f(A) = [\ln 2, +\infty)$.

γ) Η f συνεχής στο \mathbb{R} άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$
 οπότε δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1) - \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}}{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(1+e^{-x}) \right] = \ln 1 = 0. \text{ Άρα } y = \frac{1}{2}x \text{ πλάγια στο } +\infty.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1) - \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(1+e^{-x}) + x \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x} \right) + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(e^x + 1) - x + x \right] = 0.$$

Άρα $y = -\frac{1}{2}x$ είναι πλάγια στο $-\infty$. Οι ασύμπτωτες τέμνονται στο $(0, 0)$.

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) > \frac{x}{2} \Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{2} > \frac{x}{2} \Rightarrow \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x} \right) > 0 \Rightarrow \ln \frac{e^x + 1}{e^x} > 1 \Rightarrow \frac{e^x + 1}{e^x} > 1 \text{ που ισχύει.}$$

Για κάθε $x < 0$ είναι

$$f(x) > -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) + \frac{x}{2} > -\frac{x}{2} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{1+e^x}{e^x} \right) + x > 0 \Leftrightarrow \ln(1+e^x) - x + x > 0 \Leftrightarrow$$

$\ln(1+e^x) > 0$ που ισχύει. Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τις ασύμπτωτες για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17. a) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x)+3) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-2x+1) = 0$. Το κλάσμα $\frac{g'(x)}{f'(x)-2}$ ορίζεται σε διάστημα της μορφής $[\alpha, +\infty)$ αφού $f'(x) \neq 2$ οπότε από το θεώρημα DLH

$$\text{προκύπτει: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)+3}{f(x)-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)-2}{f'(x)-2} = 1$$

b) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x)+3) = 0$ áρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3 \Rightarrow y = -3$ οριζόντια στο $+\infty$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)-(2x-1)) = 0$ áρα $y = 2x-1$ πλάγια της C_f στο $+\infty$.

γ) Εστω ότι έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. Εφαρμόζουμε Rolle για τη g στο $[\rho_1, \rho_2]$ οπότε $\exists \xi \in (\rho_1, \rho_2) : g'(\xi) = 0$. Άρα $f'(\xi) - g'(\xi) = 2 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2$ áτοπο.

δ) $f'(x) - g'(x) = 2 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (2x)'$ áρα
 $f(x) - g(x) = 2x + c \Leftrightarrow f(x) - 2x = g(x) + c \Leftrightarrow f(x) - 2x + 1 = g(x) + c + 1 \Leftrightarrow$
 $f(x) - 2x + 1 = g(x) + 3 + c - 2$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(g(x) + 3) + c - 2]$
δηλαδή $0 = 0 + c - 2 \Leftrightarrow c = 2$. Άρα $f(x) - g(x) = 2x + 2$.

18. a) Πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x+9}{x+\beta} = 3$

Αν $\alpha = 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ áτοπο.

Αν $\alpha \neq 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{(\alpha-2)x}{x} = \alpha-2$ áρα $\alpha-2=3$ οπότε $\alpha=5$ και $f(x) = \frac{3x+9}{x+\beta}$.

Είναι $A_f = \mathbb{R} - \{-\beta\}$. Αν $n \in C_f$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, τότε αυτή θα είναι $n = -\beta$. Επειδή όμως η ασύμπτωτη είναι $n = -1$, ισχύει ότι $-\beta = -1 \Leftrightarrow \beta = 1$.

$$\text{Tότε } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+9}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[(3x+9) \frac{1}{x+1} \right] = +\infty$$

b) $f(x) = \frac{3x+9}{x+1} = \frac{3x+3+6}{x+1} = 3 + \frac{6}{x+1}$ áρα $G(x) = 3x + 6 \ln|x+1| + c$ επειδή $G(0) = 3$
τότε $c = 3$ áρα $G(x) = 3x + 6 \ln|x+1|$

γ) $g(x) = \frac{G(x)}{x+1} = 3 + 6 \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ για $x > -1$ οπότε

$$g'(x) = 6 \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq e \Leftrightarrow x \leq e-1$$

Για κάθε $x \in (-1, e-1)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow (-1, e-1]$ και για κάθε $x > e-1$ είναι

$$g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow [e-1, +\infty). \text{ Μέγιστο το } g(e-1) = 3 + \frac{6}{e}.$$

19. a) $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) + f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = 3x^2$, áρα

$$(f'(x)(x^2 + 1))' = (x^3)' \Leftrightarrow f'(x)(x^2 + 1) = x^3 + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 + C}{x^2 + 1}, C \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+C}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 0, \text{ áρα } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

b) Είναι $f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Είναι $\sqrt[50]{50} = 50^{\frac{1}{50}}$, $\sqrt[60]{60} = 60^{\frac{1}{60}}$.

Εστω $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \left(x^{\frac{1}{x}} \right)' = \left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} \right)' = \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = x^{\frac{1}{x}} \cancel{x} \frac{-\ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \frac{1-\ln x}{x^2} \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

Για κάθε $x > e$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow [e, +\infty)$. Είναι

$$e < 50 < 60 \stackrel{g \downarrow [e, +\infty)}{\Rightarrow} g(50) > g(60) \Leftrightarrow 50^{\frac{1}{50}} > 60^{\frac{1}{60}} \Leftrightarrow \sqrt[50]{50} > \sqrt[60]{60} \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(\sqrt[50]{50}) > f(\sqrt[60]{60})$$

γ) Εστω $M(x(t), y(t))$, οι συντεταγμένες του υλικού σημείου τη χρονική

σπιγμή t με $y(t) = f(x(t))$ και $x'(t) > 0$. Είναι $y(t) = \frac{x^3(t)}{x^2(t)+1}$ και $y'(t) = (f(x(t)))' = f'(x(t))x'(t)$.

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, ισχύει ότι: $y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow f'(x(t))x'(t) = x'(t) \Leftrightarrow f'(x(t)) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2(t)(x^2(t)+3)}{(x^2(t)+1)^2} = 1 \Leftrightarrow \cancel{x^4(t)} + 3x^2(t) = \cancel{x^4(t)} + 2x^2(t) + 1 \Leftrightarrow x^2(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = \pm 1.$$

Αν $x(t) = 1$ τότε $y(t) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, áρα $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$, ενώ αν $x(t) = -1$ τότε $y(t) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$,

áρα $M\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

20. a) Εστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2, τότε $f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) - f(2) \leq 0$.

Για κάθε $x \in (2, 4)$ είναι $x-2 > 0$, áρα $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq 0$, οπότε και $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \leq 0(1)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, ισχύει ότι $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \Leftrightarrow f'(2) \leq 0$ áτοπο.

Άρα η f δεν έχει μέγιστο στο 2.

β) Επειδή $f(2) < 7 < f(4)$ και η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 7$.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[2, x_1]$ και $[x_1, 4]$, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$\begin{aligned} f'(x_2) &= \frac{f(x_1) - f(2)}{x_1 - 2} = \frac{2}{x_1 - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{x_1 - 2}{2} \text{ και} \\ f'(x_3) &= \frac{f(4) - f(x_1)}{4 - x_1} = \frac{9 - 7}{4 - x_1} = \frac{2}{4 - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{4 - x_1}{2} \\ \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)} &= \frac{x_1 - 2}{2} + \frac{4 - x_1}{2} = \frac{\cancel{x_1} - 2 + 4 - \cancel{x_1}}{2} = 1 \Leftrightarrow \\ \frac{f'(x_3) + f'(x_2)}{f'(x_2)f'(x_3)} &= 1 \Leftrightarrow f'(x_3) + f'(x_2) = f'(x_2)f'(x_3) \end{aligned}$$

δ) $f'(x) = 4 - \frac{f(x) - 1}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = 4x - f(x) + 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) - 4x - 1 = 0$

Εστω $g(x) = xf(x) - 2x^2 - x$, $x \in [2, 4]$.

Η g είναι συνεχής στο $[2, 4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με $g'(x) = xf'(x) + f(x) - 4x - 1$

Επιπλέον $g(2) = 2f(2) - 8 - 2 = 10 - 10 = 0$, $g(4) = 4f(4) - 32 - 4 = 36 - 36 = 0$, δηλαδή $g(2) = g(4)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2, 4)$.

ε) Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 4)$ και η f' είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$. Για κάθε $2 < x < 4 \Rightarrow f'(2) < f'(x) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2, 4]$.
Επειδή $f(2) = 5$ και $f(4) = 9$, η f έχει σύνολο τιμών το $[5, 9]$.

στ) Εστω $x \in (2, 4)$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσος τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[2, x]$ και $[x, 4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (2, x)$ και $\xi_2 \in (x, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x) - 5}{x - 2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \frac{9 - f(x)}{4 - x}$$

$$\text{Είναι } f'(\xi_1) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{f(x) - 5}{x - 2} \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 2x + 1 \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{9 - f(x)}{4 - x} \leq 2 \Leftrightarrow 9 - f(x) \leq 8 - 2x \Leftrightarrow f(x) \geq 2x + 1 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) είναι $f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in (2, 4)$. Επειδή $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ και $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, είναι $f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in [2, 4]$