ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018

Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1), \vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$ διανύσματα του επιπέδου Oxy να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

Μονάδες 10

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον τύπο που υπολογίζει τον συντελεστή διεύθυνσης λ μίας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ με $x_1 \neq x_2$.

Μονάδες 5

Α3. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, να γράψετε στο τετράδιό σας δίπλα από το κάθε γράμμα τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **ΛΑΘΟΣ,** αν είναι λανθασμένη.

(α) Αν $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ δύο σημεία του επιπέδου Oxy τότε οι συντεταγμένες (x,y) του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

(β) Αν $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1,λ_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

(γ) Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα του επιπέδου Oxy τότε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2$$

(δ) Αν $\vec{\alpha}//x'x$ τότε δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(ε) Η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι η $x = x_0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα:

$\vec{u} = (\sqrt{3}, \kappa)$, $\vec{v} = (3, -\sqrt{3})$ με $\kappa > 0$ τα οποία έχουν ίσα μέτρα.

Β1. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{u} + \vec{v}$ και $\vec{u}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,1)$, $B(2,3)$, $\Gamma(5,3)$

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

Μονάδες 8

Γ2. **(i)** Να αποδείξετε ότι το μέσο M της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει συντεταγμένες $(3,2)$. (Μονάδες 3)

(ii) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = -2x + 8$. (Μονάδες 7)

Μονάδες 10

Γ3. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ του επιπέδου Oxy για το οποίο το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y=|\vec{\alpha}|x+|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ η οποία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$. Αν για το διάνυσμα $\vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta}=\left(1,|\vec{\beta}|-1\right)$ να δείξετε ότι:

Δ1. (i) $|\vec{\alpha}|=1$ (Μονάδες 5)

(ii) $|\vec{\beta}|=1$ (Μονάδες 5)

Δ2. $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ (Μονάδες 8)

Δ3. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y=2x-\lambda+2$ και $\varepsilon_2: y=\lambda x-\lambda^2+\lambda+2$ με $\lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$ τέμνονται για κάθε $\lambda\neq 2$ σε σημείο το οποίο κινείται πάνω στην (ε). (Μονάδες 7)

Μονάδες 25

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018
Α΄ ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 43

Α2. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Α3. **(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ είναι αντίστοιχα

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \kappa^2} \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3 + \kappa^2}$$

και

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{12} \Leftrightarrow |\vec{u}| = 2\sqrt{3}$$

Εφόσον έχουν ίσα μέτρα θα ισχύει $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ επομένως

$$\sqrt{3 + \kappa^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + \kappa^2 = 12 \Leftrightarrow \kappa^2 = 9 \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} \kappa = 3$$

Β2. Για $\kappa = 3$ έχουμε $\vec{u} = \left(\sqrt{3}, 3\right)$ ενώ $\vec{v} = \left(3, -\sqrt{3}\right)$

Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\sqrt{3}, 3\right) \cdot \left(3, -\sqrt{3}\right) = 3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = 0$$

Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα.

Β3. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$ μπορεί να βρεθεί με δύο τρόπους

<u>Α-τρόπος</u>

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \left|\vec{v}\right|^2 \underset{\left|\vec{u}\right| = \left|\vec{v}\right|}{\overset{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}{=}} 2\left|\vec{v}\right|^2 = 2\left(\sqrt{12}\right)^2 = 24$$

Άρα $\left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

<u>Β-τρόπος</u>

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(\sqrt{3}, 3\right) + \left(3, -\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3} + 3, 3 - \sqrt{3}\right)$$

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{\left(3 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(3 - \sqrt{3}\right)2} = \sqrt{3 + 6\sqrt{3} + 3 + 9 - 6\sqrt{3} + 3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Β4. $$\text{συν}\left(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}\right) = \frac{\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{\vec{u}^2 + \vec{v} \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{\left|\vec{u}\right|^2 + \vec{v} \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{12}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως η γωνία των διανυσμάτων είναι 45° ή $\frac{\pi}{4}\text{rad}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι:

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{2-1}=2$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας AB είναι:

$$\varepsilon_{AB}: y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$$

Γ2.

(i) Οι συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι

$$x_M=\frac{x_A+x_\Gamma}{2}=\frac{1+5}{2}=3 \text{ και } y_M=\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

Επομένως $M(3,2)$.

(ii) Η μεσοκάθετος ευθεία (ε) της πλευράς $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο M και τέμνει την $A\Gamma$ κάθετα επομένως $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1$

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\frac{3-1}{5-1}=\frac{1}{2}$$

$$\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-2$$

Άρα η (ε) διέρχεται από το $M(3,2)$ και έχει κλίση $\lambda_\varepsilon=-2$ επομένως έχει εξίσωση $y-2=-2(x-3)\Leftrightarrow y-2=-2x+6\Leftrightarrow y=-2x+8$

Γ3. Έστω $\Delta(x,y)$ εφόσον $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο θα ισχύει:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(2-1,3-1)=(1,2)$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(x_\Gamma-x_\Delta,y_\Gamma-y_\Delta)=(5-x,3-y)$$

Άρα

$$\begin{cases}5-x=1\\3-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases} \text{ οπότε } \Delta(4,1)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

(α) Η $(\varepsilon)\ y=|\vec{\alpha}|x+|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$ επομένως $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\left(-\frac{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|},0\right)$ ή $B\left(-\frac{2}{|\vec{\alpha}|},0\right)$ το οποίο προκύπτει θέτοντας $y=0$ στην εξίσωση της(ε).

Εφόσον το τρίγωνο είναι ισοσκελές ισχύει:

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow |y_A|=|x_B|\Leftrightarrow 2=\frac{2}{|\vec{\alpha}|}\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=1$$

Β-τρόπος

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι θετικός επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα είναι η γωνία 45° επομένως $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=1$

(β) Εφόσον $\vec{\beta}=\left(1,|\vec{\beta}|-1\right)$ τότε

$$|\vec{\beta}|=\sqrt{1^2+\left(|\vec{\beta}|-1\right)^2}\Leftrightarrow |\vec{\beta}|=\sqrt{1+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\beta}|+1}\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2=2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\beta}|\Leftrightarrow |\vec{\beta}|=1$$

Δ2. Από τη σχέση $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$ έχουμε διαδοχικά:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=2^2\Leftrightarrow \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4\Leftrightarrow 1+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)+1=4$$

$$\Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=2\Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=1$$

Άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0^\circ$ δηλαδή τα διανύσματα είναι ομόρροπα και επειδή έχουν ίσα μέτρα θα είναι ίσα.

Δ3. Από τις εξισώσεις των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ έχουμε:

Α τρόπος

$$\varepsilon_1 : y = 2x - \lambda + 2 \ (1) \ \varepsilon_2 : y = \lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 \ (2)$$

Από τις $(1),(2)$ προκύπτει :

$$\lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 = 2x - \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x - 2x = \lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow (\lambda - 2)x = \lambda(\lambda - 2)$$

Επειδή $\lambda \neq 2$ από την τελευταία εξίσωση προκύπτει $x = \lambda$ οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε : $y = 2\lambda - \lambda + 2 \Leftrightarrow y = \lambda + 2$

Επομένως το κοινό τους σημείο είναι $M(\lambda, \lambda + 2)$

Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = x + 2$ που προφανώς το σημείο Μ ανήκει σε αυτήν για κάθε $\lambda \neq 2$.

Β τρόπος

$\varepsilon_1 : y = 2x - \lambda + 2 \Leftrightarrow 2x - y = \lambda - 2$

$\varepsilon_2 : y = \lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2$

Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda - 2 \\ \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2 \end{cases} \text{ με τη μέθοδο των οριζουσών}$$

$D = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + \lambda = \lambda - 2 \neq 0$ **(από υπόθεση)**

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 2 + \lambda^2 - \lambda - 2 = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \lambda - 2 \\ \lambda & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 - \lambda^2 + 2\lambda = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Εφόσον $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, δηλαδή οι ευθείες τέμνονται.

Άρα $x = \dfrac{D_x}{D} \Leftrightarrow x = \lambda$ και $y = \dfrac{D_y}{D} \Leftrightarrow y = \lambda + 2$

Επομένως το κοινό τους σημείο είναι $M(\lambda, \lambda+2)$

Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = x + 2$ που προφανώς το σημείο Μ ανήκει σε αυτήν για κάθε $\lambda \neq 2$