20η Άσκηση

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ το οποίο έχει παράγοντα το $x^2 - 2x + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = -1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = P(-1821)P(0,41)P(-1,18)P(7)$.

Έστω ότι τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x) = x^3 - 3x^2 + \gamma x + 12$ διαιρούμενα με το $x - 2$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

δ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x - 1$.

ε) Δίνεται το πολυώνυμο $A(x) = x(x-2)^{1821} + (x-1)^{1453} + 2$.

i. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $A(x)$ με το $Q(x) - 12$.

ii. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $10 \cdot 8^{1821} + 9^{1453} - 89$ είναι πολλαπλάσιο του720.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Είναι $x^2-2x+1=(x-1)^2$

1	1	α	β	2	ρ=1
	1	2	α+2	α+β+2	
1	2	α+2	α+β+2	α+β+4	

Αρχικά πρέπει το $x-1$ να είναι παράγοντας του $P(x)$.
Αυτό συμβαίνει όταν το υπόλοιπο της μεταξύ τους διαίρεσης είναι μηδέν, άρα $\alpha+\beta+4=0$ (1).

Τότε $P(x)=(x-1)\pi(x)$, όπου $\pi(x)=x^3+2x^2+(\alpha+2)x+\alpha+\beta+2$.

Για να είναι το $(x-1)^2$ παράγοντας του $P(x)$ πρέπει το $x-1$ να είναι παράγοντας του $\pi(x)$, δηλαδή

$\pi(1)=0\Leftrightarrow 1+2+\alpha+2+\alpha+\beta+2=0\Leftrightarrow 2\alpha+\beta+7=0\Leftrightarrow \beta=-2\alpha-7$ (2)

Από $(1),(2)\Rightarrow \alpha-2\alpha-7+4=0\Leftrightarrow -\alpha-3=0\Leftrightarrow \alpha=-3$ και από τη $(2)\Rightarrow \beta=6-7=-1$

β) Για $\alpha=-3$ και $\beta=-1$ είναι

1	1	-3	-1	2	ρ=1
	1	2	-1	-2	
1	2	-1	-2	0	

$P(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$.

$P(x)=(x-1)(x^3+2x^2-x-2)\Leftrightarrow$

$P(x)=(x-1)\left[x^2(x+2)-(x+2)\right]=(x-1)(x+2)(x^2-1)\Leftrightarrow$

$P(x)=(x-1)\left[x^2(x+2)-(x+2)\right]=(x-1)^2(x+2)(x+1)$

$P(x)=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$ ή $x=-1$

γ) Αρχικά θα βρούμε το πρόσημο του $P(x)$.

x	$-\infty$	-2		-1		1		$+\infty$
$(x-1)^2$	+		+		+	0	+	
$x+1$	−		−	0	+		+	
$x+2$	−	0	+		+		+	
$P(x)$	+	0	−	0	+	0	+	

Επειδή $P(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$, είναι $P(-1821)>0$, $P(0,41)>0$, $P(7)>0$. Επειδή $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-2,-1)$ είναι $P(-1,18)<0$.

Με βάση τα ανωτέρω, είναι $A=P(-1821)P(0,41)P(-1,18)P(7)<0$.

δ) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ είναι το $P(2)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x-2)$ είναι το $Q(2)$. Επειδή οι δύο διαιρέσεις έχουν το ίδιο υπόλοιπο, ισχύει ότι:

$Q(2)=P(2)\Leftrightarrow \cancel{8}-\cancel{12}+2\gamma+\cancel{12}=\cancel{8}-4+6+2\Leftrightarrow 2\gamma=4\Leftrightarrow \gamma=2$

Για $\gamma=2$: $Q(x)=x^3-3x^2+2x+12$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x):(x-1)$ είναι το $Q(1)=1-3+2+12=12$

ε) i. $Q(x)-12=x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$

Επειδή το $Q(x)-12$ είναι 3ου βαθμού, το ζητούμενο υπόλοιπο θα είναι το πολύ 2ου βαθμού.

Έστω $\upsilon(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε $A(x)=(Q(x)-12)\pi'(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma\Leftrightarrow$

$x(x-2)^{1821}+(x-1)^{1453}+2=x(x-1)(x-2)\pi'(x)+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (1)

Για $x=0$ η (1) γίνεται: $-1+2=\gamma\Leftrightarrow\gamma=1$

Για $x=1$ η (1) γίνεται: $-1+0+2=\alpha+\beta+1\Leftrightarrow\beta=-\alpha$ (2)

Για $x=2$ η (1) γίνεται: $1+2=4\alpha+2\beta+1 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=2 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\alpha-\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=1$ και $\beta=-1$

ii. Για $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=1$ και $x=10$ η (1) γίνεται:

$10(10-2)^{1821}+(10-1)^{1453}+2=10(10-1)(10-2)\pi'(10)+10^2-10+1 \Leftrightarrow$

$10\cdot 8^{1821}+9^{1453}+2=720\pi'(10)+91 \Leftrightarrow 10\cdot 8^{1821}+9^{1453}-89=720\pi'(10)=$ πολλαπλάσιο του 720