

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Α' ΟΜΑΔΑ

1. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

$$i) \left(\frac{\mu}{\beta} + 1\right)^2 \quad ii) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y\right)^2 \quad iii) \left(\frac{1}{2}ax + \frac{5}{3}ay\right)^2$$

$$iv) \left(\frac{3}{4}a + 4\beta\right)^2 \quad v) (2x^2 + y^3)^2 \quad vi) (3xy + 1)^2$$

$$vii) \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}xy\right)^2 \quad viii) (5\alpha^2x + 3\beta^2xy)^2 \quad ix) \left(3x + \frac{1}{3x}\right)^2$$

$$x) (\beta - 2)^2 \quad xi) (3x - 7y)^2 \quad xii) (5\alpha x - 8\beta y)^2$$

$$xiii) (9 - 5x)^2 \quad xiv) (\alpha\beta - \gamma\delta)^2 \quad xv) (7\alpha x - 8\beta y^2)^2$$

$$xvi) (x^2 - 3y)^2 \quad xvii) (3x^3 - xy^2)^2 \quad xviii) (\alpha^3\beta^2 - 3\alpha\gamma^2)^2$$

$$xix) (-x - 3)^2 \quad xx) (-4x - 3y)^2 \quad xxi) (-2\alpha^2 + \alpha\beta)^2$$

$$xxii) (-\alpha^3 - \alpha)^2 \quad xxiii) (\alpha^x + \beta^y)^2 \quad xxiv) (\alpha^{x-1} + 2\alpha\beta)^2$$

2. Να βρείτε τα γινόμενα:

$$i) (\alpha\beta + 3)(\alpha\beta - 3) \quad ii) (3x + 2)(3x - 2) \quad iii) (\alpha^2\beta - \gamma)(\alpha^2\beta + \gamma)$$

$$iv) (3\alpha - 2\beta^2)(2\beta^3 + 3\alpha) \quad v) (x - y)(-x - y) \quad vi) (x + y - 1)(x + y + 1)$$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

$$i) (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \quad ii) (2\alpha - 3\beta)(4\alpha^2 + 9\beta^2)(2\alpha + 3\beta)$$

$$iii) (x - y)(-x - y)(-x^2 - y^2) \quad iv) (xy + 1)(x^2y^2 + 1)(1 + x^4y^4)$$

4. Να γίνουν οι πράξεις:

$$i) (3\alpha + 4\beta)(3\alpha - 4\beta) - (\beta - 5\alpha)(\beta + 5\alpha)$$

$$ii) (\mu + \nu)^2 - (\mu - \nu)^2 + (\mu + \nu)(\mu - \nu)$$

$$iii) (3x + y)^2 - (2y - 5x)^2 - (4x + y)(4x - y)$$

$$iv) 3(\alpha - 2x)^2 + 2(\alpha - 2x)(\alpha + 2x) + (3x - \alpha)(3x + \alpha) - (2\alpha - 3x)^2$$

5. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

$$i) (4x + 3y)^2 - (3x + 4y)^2 = 7(x + y)(x - y)$$

$$ii) (x + y)^2 - 2(x + y)(x - y) + (x - y)^2 = 4y^2$$

6. Να γίνουν οι πράξεις:

$$i) (x + 2)^2 - (x + 3)(x - 3) - 2(2x - 3)$$

$$ii) (2x + 1)^2 - (3x - 2)^2 - (2x + 5)(5 - 2x)$$

$$iii) 2(\alpha - 2\beta)^2 - 3(\alpha + 3\beta)^2 - (2\alpha + 3\beta)(3\alpha - 2\beta)$$

$$iv) (2x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 1) + (x - 3)(x + 1) - 4(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

7. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

$$i) (\alpha - \beta)^2 - (\beta - \alpha)^2 = 0 \quad ii) (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$iii) (\alpha^2 + 4)(x^2 + 1) - (\alpha x + 2)^2 = (2x - \alpha)^2 \quad iv) (\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 = 4\beta^2$$

v) $(kx+ky)^2=k^2(x+y)^2$

vi) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$

vii) $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2=2[\alpha^2+(\alpha+\beta)^2]$

viii) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$

8. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

i) $(2x-3)^3$

ii) $(2x^2+x)^3$

iii) $(3x+4y)^3$

iv) $(2\alpha\beta-3\beta\gamma)^3$

v) $(3\alpha x+\beta y)^3$

vi) $(2xy-3x^2y)^3$

9. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

i) $(3x-5)^3+(x-2)(x+2)(3x+1)-2x(3x-5)^2$

ii) $(x+y)^3+(x-y)^3+3(x+y)(x-y)^2+3(x-y)(x+y)^2$

10. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

i) $(x-1)^3-2(3x+2)^3-x(x+2)(x-2)$

ii) $(x+2)^3-3x(x-1)^2+(x-1)(x+1)(x-2)$

iii) $(\alpha+\beta)^3-\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\alpha(\alpha-\beta)^2$

11. Να γίνουν οι πράξεις:

$$(x-2)^3-3(4x+3)^2-x(x+3)(x-3)$$

12. Να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$(\alpha^3+1)^2-(\alpha^2+1)^3+3\alpha^2(\alpha+1)^2=8\alpha^3$$

13. Να γίνουν οι πράξεις:

$$(\alpha+2)^3+(\alpha-1)(\alpha+3)(\alpha-3)-2\alpha(3\alpha-2)^2$$

Β' ΟΜΑΔΑ

14. Να βρείτε τα γινόμενα:

i) $(x+y+z)(x+y-z)$

ii) $(2x+y+3z)(2x+y-3z)$

iii) $(2\alpha+\beta-3\gamma)(2\alpha-\beta+3\gamma)$

iv) $(\alpha-x+\beta-y)(\alpha+x+\beta+y)$

v) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

vi) $(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$

15. Να βρεθεί ποιων διωνύμων τέλεια τετράγωνα είναι τα τριώνυμα:

i) x^2-4x+4

ii) $25x^2+10x+1$

iii) $9x^4+4-12x^2$

iv) $x^6+y^2-2x^3y$

v) $\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2$

vi) $(\alpha+1)^2-6(\alpha+1)+9$

16. Αν για τα $x, y \in R$ ισχύει $(x+y)^2=2(x^2+y^2)$ να αποδειχθεί ότι $x=y$.

17. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

i) $(2\alpha-3\beta+4\gamma)^2$

ii) $(x^2-x+1)^2$

iii) $(3x^2-4x+2)^2$

18. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

i) $(2x^2-x+1)^2-(x^2+x+1)^2-2(x-1)^2$

ii) $(2\alpha-3\beta+1)^2-(\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)-\alpha(2\alpha-\beta)$

iii) $(x^2-3x+1)^2-(x^2+1)^2+3x(2x-1)(x-2)+6x^2$

19. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

i) $(\alpha+\beta)^3 = \alpha(\alpha-3\beta)^2 + \beta(\beta-3\alpha)^2$

ii) $(x^3+y^3)^2 - (x^2+y^2)^3 + 3x^2y^2(x+y)^2 = (2xy)^3$

iii) $2(2x-1)^3 - (x-2)(4x+1)^2 = 27x$

iv) $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)+1 = (\alpha^2+3\alpha+1)^2$

v) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 + (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

20. Αν $x+y=7$ και $xy=12$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης x^2+y^2 .

21. Αν $x + \frac{1}{x} = 7$ να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων :

i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

ii) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

22. Αν $x+y=\alpha$ και $xy=\beta$ να αποδειχθεί ότι $x^3+y^3=\alpha^3-3\alpha\beta$.

23. Αν $x+y=2$ και $xy=3$ να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$A=3x^3+12xy+3y^3$

$B=5x^2-4xy+5y^2$

24. Αν $x+y=7$ και $xy=2$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) x^2+y^2

ii) x^3+y^3

iii) x^4+y^4

25. Αν $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha, \beta > 0$ να δειχθεί ότι:

$$\sqrt{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

26. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$

ii) $(x+2y)(x-2y)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4)$

iii) $(x+\alpha)(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\beta^2)(x^2-\alpha x+\beta^2)$

27. Θεωρούμε τους αριθμούς x, y, ω για τους οποίους ισχύουν οι ισότητες $x+y+\omega=2$ και $x^2+y^2=4$. Να αποδείξετε ότι $2xy=\omega^2-4\omega$.

28. Να αποδείξετε ότι i) $\omega^2-6\omega+10 > 0$ για κάθε ω

ii) $x^2+xy+y^2 \geq 0$ για κάθε x, y

29. Αν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)$ να δειχθεί ότι $x=\alpha$ και $y=\beta$.

30. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y από τις παρακάτω ισότητες:

i) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$

ii) $x^2+y^2+10x+2y+26=0$

iii) $x^2+y^2+12y-14x+85=0$

31. Να υπολογισθούν τα $x, y \in R$ στις παρακάτω παραστάσεις:

i) $x^2+y^2-8x+10y+41=0$

ii) $3x^2+3y^2+18x+6y+30=0$

32. Αν $x^2+y^2+z^2+3=2x+2y+2z$ να βρείτε τα x, y, z .

33. Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha + \beta$, α , β από τις ισότητες $\alpha^2 - \beta^2 = 24$ και $\alpha - \beta = 4$

34. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α και β για τους οποίους ισχύει $37 + \alpha^2 = \beta^2$.

35. Αν είναι $\alpha = 8x$, $\beta = 3x^2 + 4$, $\gamma = 3x^2 + 4x - 4$ να δείξετε ότι $\beta^2 + 3\alpha\gamma = (\alpha + \gamma)^2$

36. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να δείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\gamma^2 - \alpha\beta)$

ii) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

37. Αν $x + y + \omega = 0$ να δειχθεί ότι $x^3 + y^3 + \omega^3 = 3xy\omega$.

38. Αν $\alpha + \beta = \gamma$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta\gamma = \gamma^3$.

39. Αν $\alpha + \beta = 1$ να δείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = 1$.

40. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$y = (3\alpha - 4\alpha^3)^2 + (3\beta - 4\beta^3)^2$$

41. Αν ο x είναι ακέραιος να δείξετε ότι:

$$(-1)^{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2} = 1$$

42. Αν $1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} = 5$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta$

43. Αν $x + y + z = \alpha$ και $x^2 + y^2 + z^2 = \beta$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $xy + yz + zx$.

44. i) Να επαληθεύσετε την ταυτότητα: $4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2$

ii) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών γράφεται πάντα ως διαφορά δύο τετραγώνων.

iii) Να κάνετε εφαρμογή στο γινόμενο 17.13

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΚΕΝΟΥ-ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ-ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

45. Να αντικατασταθούν οι παύλες έτσι ώστε να προκύψουν τριώνυμα, που να είναι τέλεια τετράγωνα διωνύμων.

i) $x^2 + 2x + \underline{\hspace{1cm}}$

ii) $x^2 - 6x + \underline{\hspace{1cm}}$

iii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \underline{\hspace{1cm}}$

iv) $9x^2 + 4y^2 + \underline{\hspace{1cm}}$

v) $25x^2 + 1 + \underline{\hspace{1cm}}$

vi) $x^2 + \frac{6}{5}x + \underline{\hspace{1cm}}$

46. Να προσδιορίσετε τους όρους A, B, Γ, Δ, Ε ώστε οι παρακάτω παραστάσεις να είναι τέλεια τετράγωνα:

i) $25κ^2+9λ^2+A$

ii) $B+16α^2-40αβ$

iii) $λ^6-20λ^3μ^3+Γ$

iv) $x^2+\frac{β}{a}x+Δ$

v) $(x+y)^2+ω^2+E$

47. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

i) $(7α^2+...)^2=...+...+4x^2$

ii) $(...+...)^2=...+70x^3y+49y^2$

iii) $\left(-\frac{2}{3}x+...\right)^2=...+\frac{3}{5}x+...$

iv) $(...-3x)^2=5x^2y-...+...$

v) $\left(\frac{1}{2}x-...\right)^2=...-...+\frac{1}{9}y^2$

48. Να αντικατασταθούν οι παύλες με κατάλληλα μονώνυμα έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

i) $(5x+4y)(\underline{\quad}-\underline{\quad}+\underline{\quad})=125x^3+64y^3$

ii) $(\underline{\quad}-\underline{\quad})(36α^2+\underline{\quad}+49β^2+216α^3-343β^3)$

49. Να αντιστοιχήσετε τις ταυτότητες της στήλης (A) με τα αναπτύγματα τους στη στήλη (B).

Στήλη A
(ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ)

Στήλη B
(ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ)

$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$

$α^3-9α^2+27α-27$

$16α^2+9β^2+24αβ$

$(4α+3β)^2$

$α^2+2α+\frac{1}{4}$

$α^3-6α^2+18α-9$

$(α-3)^3$

$α^2+α+\frac{1}{4}$

$16α^2+12αβ+9β^2$

$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

$α^2-2+\frac{1}{α^2}$

50. Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις:

i) Αν $α+β=-γ$ τότε η παράσταση $α^3+β^3+γ^3$ είναι ίση:

A. α

B. 0

Γ. 3αβγ

Δ. $(α+β-γ)^3$

ii) Αν $x-\frac{1}{x}=3$ τότε η παράσταση $x^2+\frac{1}{x^2}$ είναι ίση με:

A. 9

B. 11

Γ. 7

Δ. 12

E. -9

iii) Η παράσταση x^2+y^2 είναι ίση με:

A. $(x+y)^2$

B. $(x+y)^2+2αβ$

Γ. $(x-y)^2+2xy$

Δ. $2xy-(x+y)^2$

iv) Αν ισχύει $(α+β)^2=α^2+β^2$ τότε είναι:

A. $α=0$ μόνο

B. $β=0$ μόνο

Γ. $α=0$ ή $β=0$

Δ. $α=β=0$