ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2015

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)=\left(f(x+h)-f(x)\right)+\left(g(x+h)-g(x)\right),$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$ Άρα

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

Α2. Αν το όριο $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός , τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Α3.
$$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\ldots+w_\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}$$

Α4. Λ Σ Λ Λ Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0\Leftrightarrow\left(3x-1=0\Leftrightarrow 3x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\right)$ ή $\left(8x^2-6x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{ ή } x=\frac{1}{4}\right)$

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot 8\cdot 1=36-32=4\ ,\ x_1=\frac{6+2}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\quad x_2=\frac{6-2}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4},$$

$$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B\Rightarrow P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B).$$

Άρα $P(A\cap B)=\frac{1}{4},P(A)=\frac{1}{3},P(A\cup B)=\frac{1}{2}\quad\left(\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\right)$

Β2. Είναι $A-B=A\cap B'\Rightarrow A'-B'=A'\cap B=B-A$ άρα

$$P(A'-B')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

β΄ τρόπος

$$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P\left[(A\cup B)'\right]=\cancel{1}-P(A)-\cancel{1}+P(A\cup B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(\Delta)=P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

B3. $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] \overset{A-B,B-A \text{ ασυμβίβαστα}}{=} P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B-A)=$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

B4. $9x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{2}{3}\right)$ ή $\left(x=-\frac{1}{3}<0 \text{ απορρίπτεται}\right)$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 9\cdot(-2)=9+72=81$, $x_1=\frac{3+9}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$ $x_2=\frac{3-9}{18}=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}$, άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{6}=P(B)-\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B)=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$.

Έστω Β,Γ ασυμβίβαστα. Τότε $P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{5}{12}+\frac{8}{12}=\frac{13}{12}>1$

άτοπο . Άρα τα Β,Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε: $f_1\%=10\% \Rightarrow f_1=0,1$, $f_5\%=30\% \Rightarrow f_5=0,3$

$\alpha_3=108^\circ \Leftrightarrow 360^\circ\cdot f_3=108^\circ \Leftrightarrow f_3=\frac{108^\circ}{360^\circ} \overset{(:36)}{\Leftrightarrow} f_3=\frac{3}{10}=0,3 \Rightarrow f_3\%=30\%$

$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1 \Leftrightarrow 0,1+f_2+0,3+f_4+0,3=1 \Leftrightarrow f_2+f_4=0,3$ (1)

$\bar{x}=\sum_{i=1}^{k}x_i f_i \Leftrightarrow 14=9\cdot 0,1+11f_2+13\cdot 0,3+15f_4+17\cdot 0,3 \Leftrightarrow 14=0,9+3,9+5,1+11f_2+15(0,3-f_2) \Leftrightarrow$

$14=9,9+11f_2+4,5-15f_2 \Leftrightarrow 4f_2=0,4 \Leftrightarrow f_2=0,1 \Rightarrow f_2\%=10\%$

και $f_4=0,3-0,1=0,2 \Rightarrow f_4=20\%$

Γ2. $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i=\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 f_i=$

$$0,1\cdot(14-9)^2+0,1\cdot(14-11)^2+0,3\cdot(14-13)^2+0,2\cdot(14-15)^2+0,3\cdot(14-17)^2=$$

$$0,1\cdot 25+0,1\cdot 9+0,3\cdot 1+0,2\cdot 1+0,3\cdot 9=2,5+0,9+0,3+0,2+2,7=6,6$$

$s=\sqrt{6,6}=2,57$ οπότε $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2,57}{14}\cong 0,18>0,1$.Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. $\sum_{i=1}^{4}x_i f_i=x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+x_3\cdot f_3+x_4\cdot f_4=9\cdot 0,1+11\cdot 0,1+13\cdot 0,3+15\cdot 0,2=0,9+1,1+3,9+3=8,9$

$$\sum_{1}^{4}x_i f_i=\sum_{i=1}^{4}x_i\frac{\nu_i}{\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}=\frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow 8,9=\frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow \nu=\frac{1780}{8,9}=200$$

β΄ τρόπος: $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow 14=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i+x_5\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14=\frac{1780}{\nu}+x_5 f_5 \Leftrightarrow 14=\frac{1780}{\nu}+5,1 \Leftrightarrow$

$$8,9=\frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow \nu=\frac{1780}{8,9}=200$$

Γ4. $\beta_i = \dfrac{a_i - \bar{a}}{S_a} = \dfrac{1}{S_a} a_i - \dfrac{1}{S_a} \cdot \bar{a}$

$\bar{\beta} = \dfrac{1}{S_a}\bar{a} - \dfrac{1}{S_a}\cdot\bar{a} = \dfrac{\bar{a}}{S_a} - \dfrac{\bar{a}}{S_a} = 0$ και $s_\beta = \dfrac{1}{S_a} S_a = 1$

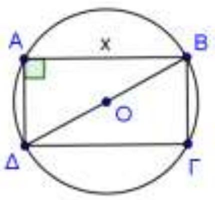
β΄ τρόπος:

$\beta_i = \dfrac{a_i - \bar{a}}{S_a} = \dfrac{1}{S_a} a_i - \dfrac{1}{S_a}\cdot\bar{a}$. Θεωρούμε $\gamma_i = \dfrac{1}{S_a}\cdot a_i, i = 1,2,3,4,5$.

Από γνωστή παρατήρηση $\bar{\gamma} = \dfrac{1}{s_a}\cdot\bar{a}$ και $s_\gamma = \left|\dfrac{1}{s_a}\right|\cdot s_\alpha = 1$.Είναι $\beta_i = \gamma_i - \dfrac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha}$ άρα

$\bar{\beta} = \bar{\gamma} - \dfrac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha} = \dfrac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha} - \dfrac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha} = 0$ και $s_\beta = s_\gamma = 1$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Επειδή κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη από τη διάμετρο, ισχύει ότι: 0< x< 2ρ =10 **.**
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$A\Delta^2 = \Delta B^2 - AB^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{100 - x^2}$

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι: $(AB\Gamma\Delta) = (A\Delta)\cdot(AB) = x\sqrt{100 - x^2}$

Άρα $f(x) = x\sqrt{100 - x^2},\ 0 < x < 10$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \ge 0 \overset{\sqrt{100 - x^2} > 0}{\Leftrightarrow} 100 - 2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 50 \overset{x \in (0,10)}{\Leftrightarrow} x \le \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Για κάθε $x \in (0, 5\sqrt{2})$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f γνησίως αύξουσα στο $(0, 5\sqrt{2}]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (5\sqrt{2}, 10)$,άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[5\sqrt{2}, 10)$. Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$ **,** τότε

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗		↘
		Ο.Μ.	

$A\Delta = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2} = x$,οπότε το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. 1ος τρόπος

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{98x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{98}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{98}\cdot f'(1)=\frac{1}{\cancel{98}}\cdot\frac{\cancel{98}}{\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)\sqrt{99-x^2-2x}-\sqrt{99}}{98x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)^2\left(\sqrt{99-x^2-2x}\right)^2-99}{98x\left((x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+2x+1)(99-x^2-2x)-99}{98x\left((x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{99x^2-x^4-2x^3+198x-2x^3-4x^2+99-x^2-2x-99}{98x\left((x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-x^4-4x^3+94x^2+196x}{98x\left((x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\left(-x^3-4x^2+94x^2+196\right)}{98\cancel{x}\left((x+1)\sqrt{99-x^2-2x}+\sqrt{99}\right)}=\frac{196}{98\cdot2\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

3ος τρόπος $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}\overset{1+x=u}{=}\lim_{u\to1}\left(\frac{1}{98}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}\right)=\frac{1}{98}f'(1)=\frac{\sqrt{99}}{99}$

Δ4. $A-B\subseteq A\Rightarrow P(A-B)\le P(A)$ και

$$0<P(A-B)\le P(A)\le1\overset{f\nearrow(0,1]\subseteq(0,5\sqrt{2}]}{\Rightarrow}f\left(P(A-B)\right)\le f\left(P(A)\right)\Leftrightarrow$$

$$P(A-B)\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\cdot\sqrt{100-P^2(A)}\Leftrightarrow\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\ (1)$$

$P(A)\le1$ (2) και $P(A-B)\le1\Leftrightarrow P^2(A-B)\le1\Leftrightarrow-P^2(A-B)\ge-1\Leftrightarrow100-P^2(A-B)\ge99\Leftrightarrow$

$$\sqrt{100-P^2(A-B)}\ge\sqrt{99}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le\frac{1}{\sqrt{99}}\ (3)$$

$$(2),(3)\Rightarrow\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le\frac{1}{\sqrt{99}}<1$$

Άρα $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}<1$ και (1) $\overset{f\nearrow(0,1)}{\Rightarrow}f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$