Συνάρτηση: από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία με την οποία ΚΑΘΕ στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ΕΝΑ ΑΚΡΙΒΩΣ στοιχείο του συνόλου Β

Α : πεδίο ορισμού Β ή $f(A)$: σύνολο τιμών

$x \in A$: ανεξάρτητη μεταβλητή $\boxed{y = f(x)}$

$y \in B$: εξαρτημένη μεταβλητή

Συμβολισμός: $f : A \to B$. Αν $A \subseteq \Re$ και $B \subseteq \Re$

Οι συναρτήσεις λέγονται πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ D_f

1. **Πολυωνυμικές συναρτήσεις:**
   $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ με $a_n \neq 0$ $D_f = \Re$ αφού $\forall\ x_0 \in \Re$ η $P_n(x_0)$ δίνει αποτέλεσμα.
2. **Ρητές συναρτήσεις :** $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $\dfrac{\text{πολ / μο}}{\text{πολ / μο}}$
   ΠΡΕΠΕΙ : $Q_m(x) \neq 0$ αφού όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής δεν έχει νόημα το κλάσμα. $D_f = \Re - \{Q_m(x) = 0\}$
3. **Συναρτήσεις με ρίζες :** $\sqrt[\nu]{f(x)}$
   ΠΡΕΠΕΙ : $f(x) \geq 0$
4. **Εκθετικές συναρτήσεις :**
   α) $f(x) = a^x$, ΠΡΕΠΕΙ : $a > 0,\ a \neq 1\ \forall x \in \Re$
   β) $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ ΠΡΕΠΕΙ : $f(x) > 0$
5. **Λογαριθμικές συναρτήσεις:** $\ln f(x)$:
   ΠΡΕΠΕΙ : $f(x) > 0$
6. **Τριγωνομετρικές:**
   α) $\eta\mu x$ $D_f = \Re$
   β) $\sigma\upsilon\nu x$ $D_f = \Re$
   γ) $\varepsilon\varphi x$ ΠΡΕΠΕΙ : $x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$
   δ) $\sigma\varphi x$ ΠΡΕΠΕΙ : $x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

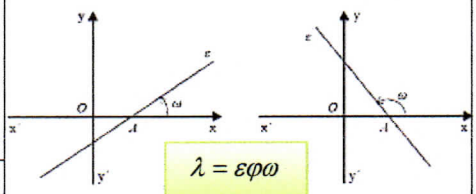
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

Ζητάμε το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων της συνάρτησης $f(x)$, όταν $x \in D_f$. Η εξίσωση $f(x) - y = 0$ θέλουμε να έχει πραγματική λύση ως προς x στο D_f.

- Όταν λύνεται ως προς x εξαιρούμε τα y για τα οποία προκύπτει απροσδιοριστία
- Όταν δε λύνεται ως προς x (π.χ τριώνυμο) γράφουμε τις κατάλληλες συνθήκες ως προς y για ύπαρξη πραγματικών λύσεων στο D_f.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ (γραμμική) $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ είναι ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\dfrac{\alpha}{\beta}$



Λύση γραμμικής εξίσωσης : (x_0, y_0)

α) Κάθε ζεύγος (x_0, y_0) αριθμών που την επαληθεύει ΔΛΔ $\alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma$

β) Ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ από το οποίο διέρχεται η ευθεία που περιγράφεται από την γραμμική εξίσωση.

ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΚΟΙΝΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΔΥΟ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ $\Leftrightarrow$ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (Σ) $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$

Η λύση (x_0, y_0) του (Σ) είναι ΚΑΘΕ ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις $\Leftrightarrow$ το $M(x_0, y_0)$ είναι το σημείο τομής των ευθειών.

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΤΟΥ (Σ) $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$

$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}$ $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}$

- Αν $D \neq 0$, το (Σ) έχει μοναδική λύση $x_0 = \dfrac{D_x}{D}$, $y_0 = \dfrac{D_y}{D}$
- Αν $D = D_x = D_y = 0$ το (Σ) είναι αόριστο $\Leftrightarrow$ έχει άπειρες λύσεις $\Leftrightarrow$ οι ευθείες ταυτίζονται
- Αν $D = 0$ και $D_x = 0$ ή $D_y = 0$ το (Σ) είναι αδύνατο $\Leftrightarrow$ οι ευθείες είναι παράλληλες

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα **Δ** του πεδίου ορισμού της αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα **Δ** του πεδίου ορισμού της αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν $f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in A$
4. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in A$
5. ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ λέγεται μια συνάρτηση η οποία είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα
6. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια,** όταν $\forall x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ *και* $f(-x) = f(x)$
7. Η C_f μιας ΑΡΤΙΑΣ έχει ΑΞΟΝΑ συμμετρίας τον $y'y$
8. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή ,** όταν $\forall x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ *και* $f(-x) = -f(x)$
9. Η C_f μιας ΠΕΡΙΤΤΗΣ έχει ΚΕΝΤΡΟ συμμετρίας $(0,0)$
10. Η C_f με $f(x) = \varphi(x) + c$, με c>0 προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω.**
11. Η C_f με $f(x) = \varphi(x) - c$, με c>0 προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω.**
12. Η C_f με $f(x) = \varphi(x - c)$, με c>0 προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της C_φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά.**

13. Η C_f με $f(x) = \varphi(x + c)$, με c>0 προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της C_φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά.**

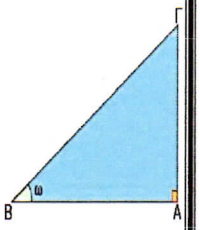
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

- Οξείας γωνίας $0^0 < \omega < 90^0$:

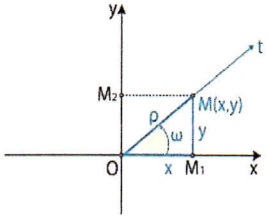
$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

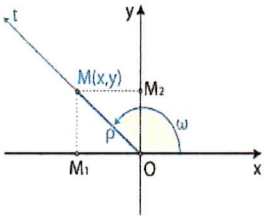
$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$



- Γωνίας ω με $0^0 \le \omega \le 360^0$



Σχήμα α΄



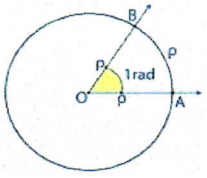
Σχήμα β΄

$$ημω = \frac{y}{\rho}, \quad εφω = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

$$συνω = \frac{x}{\rho}, \quad σφω = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Ακτίνιο (rad) Είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου.

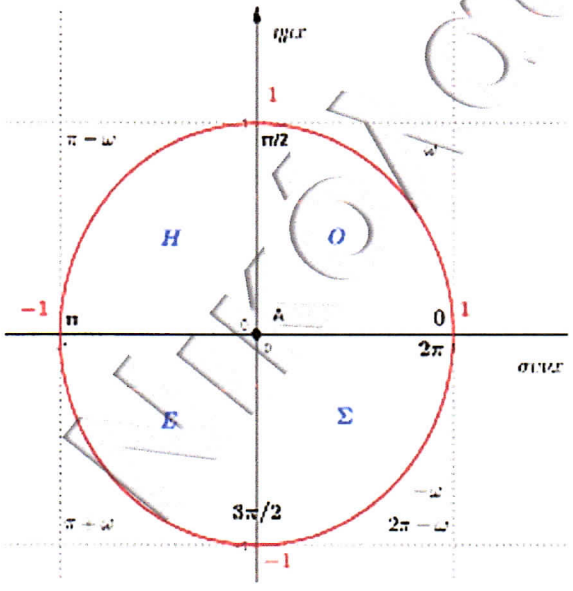


ΣΧΕΣΗ ΜΟΙΡΑΣ (μ) - ΑΚΤΙΝΙΟΥ(α)

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Μήκος τόξου: $S = \frac{\pi\rho\mu}{180} \Leftrightarrow S = \alpha \cdot \rho$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ



ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^{Ο} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Γωνία φ	Τεταρτημόριο	2°	3°	4°	1°	1°	2°	3°	4°
	Σε rad	π - θ	π + θ	2π - θ	2π + θ	$\frac{\pi}{2}$ - θ	$\frac{\pi}{2}$ + θ	$\frac{3\pi}{2}$ - θ	$\frac{3\pi}{2}$ + θ
	Σε μοίρες	180° - θ	180° +θ	360° - θ	360° + θ	90° - θ	90° + θ	270° - θ	270° + θ
Τριγωνομετρικοί αριθμοί	ημφ	ημθ	-ημθ	-ημθ	ημθ	συνθ	συνθ	-συνθ	-συνθ
	συνφ	-συνθ	-συνθ	συνθ	συνθ	ημθ	-ημθ	-ημθ	ημθ
	εφφ	-εφθ	εφθ	-εφθ	εφθ	σφθ	-σφθ	σφθ	-σφθ
	σφφ	-σφθ	σφθ	-σφθ	σφθ	εφθ	-εφθ	εφθ	-εφθ

Δεν αλλάζει ο τριγωνομετρικός αριθμός — Αλλάζει ο τριγωνομετρικός αριθμός

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $ημ^2\omega + συν^2\omega = 1$
- $εφω = \frac{ημω}{συνω}, \quad σφω = \frac{συνω}{ημω}$
- $εφω \cdot σφω = 1$
- $συν^2\omega = \frac{1}{1+εφ^2\omega}, \quad ημ^2\omega = \frac{εφ^2\omega}{1+εφ^2\omega}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

- $-1 \le ημx \le 1 \Leftrightarrow |ημx| \le 1$
- $-1 \le συνx \le 1 \Leftrightarrow |συνx| \le 1$

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **περιοδική** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει:

α) $x+T\in A,\ x-T\in A$

β) $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

ο $T\in\Re$ λέγεται περίοδος συνάρτησης

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

$f(x)=\eta\mu x$

α) η f έχει πεδίο ορισμού $A=\Re$

β) η f έχει σύνολο τιμών $f(A)=[-1,1]$

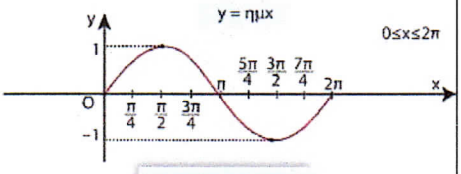
γ) η f περιττή άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

δ) η f περιοδική με περίοδο $T=2\pi$

ε) πίνακας μεταβολών:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0 ↗	1 ↘ μεγ.	0 ↘	−1 ↗ ελαχ.	0

στ) γραφική παράσταση:



$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$

α) η f έχει πεδίο ορισμού $A=\Re$

β) η f έχει σύνολο τιμών $f(A)=[-1,1]$

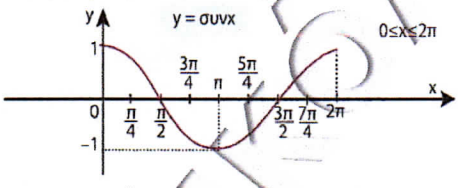
γ) η f άρτια άρα έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y

δ) η f περιοδική με περίοδο $T=2\pi$

ε) πίνακας μεταβολών:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1 ↘ μεγ.	0 ↘	−1 ↗ ελαχ.	0 ↗	1 μεγ.

στ) γραφική παράσταση:



Για την συνάρτηση $f(x)=\rho\eta\mu\omega x,\ \omega>0$

- $f_{max}=|\rho|\ ,\ f_{min}=-|\rho|,\quad T=\frac{2\pi}{\omega}$
- $\Sigma.T=[-|\rho|,|\rho|]$
- η $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x+\alpha),\omega>0$ περιοδική με περίοδο Τα

$f(x)=\varepsilon\varphi x$

α) η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο: $A=\{x\in\Re\ /\ \sigma\upsilon\nu x\neq 0\}$

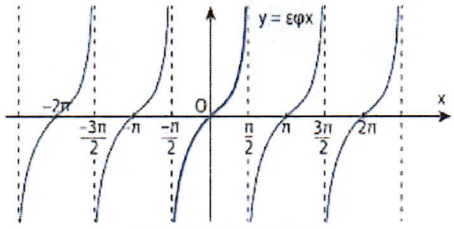
β) η f έχει σύνολο τιμών $f(A)=\Re$

γ) η f είναι περιττή

δ) η f είναι περιοδική με $T=\pi$

ε) η f είναι γν.αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

στ) γραφική παράσταση:



$f(x)=\sigma\varphi x$

α) η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο: $A=\{x\in\Re\ /\ \eta\mu x\neq 0\}$

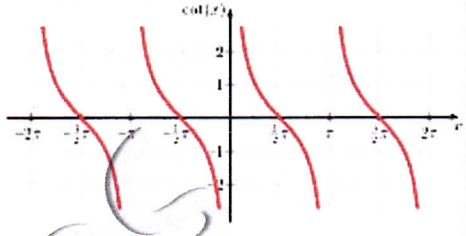
β) η f έχει σύνολο τιμών $f(A)=\Re$

γ) η f είναι περιττή .

δ) η f είναι περιοδική με $T=\pi$

ε) η f είναι γν.φθίνουσα στο $(0,\pi)$

στ) γραφική παράσταση:



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- $\eta\mu x=\eta\mu\theta\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\theta\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi+\pi-\theta\end{cases}\quad\kappa\in\mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi+\theta\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi-\theta\end{cases}\quad\kappa\in\mathbb{Z}$
- $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta,\quad\kappa\in\mathbb{Z}$
- $\sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta,\quad\kappa\in\mathbb{Z}$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$

$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$

$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$

$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$

$\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$

$=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$

$=1-2\eta\mu^2\alpha$

$\varepsilon\varphi2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

$\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$

$\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$

$\varepsilon\varphi^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$

$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)$

$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$

$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$

$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$

$\eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$

$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$

$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=-2\eta\mu\frac{A-B}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}$

Η $f(x)=\rho\eta\mu(x+\varphi)$ είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi$ και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με $-\rho$.

Αν $\alpha,\beta\neq0$, τότε για κάθε $x\in\Re$ ισχύει:

$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\rho\eta\mu(x+\varphi)$ όπου:

$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και $\varphi\in\Re$ με

$\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{\rho}\\ \eta\mu\varphi=\frac{\beta}{\rho}\end{cases}$

ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ

$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}=\frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}=2R$ όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ $(P(x),Q(x),...)$

Μονώνυμο του x:

α) κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν} όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.

β) κάθε πραγματικό αριθμό

Πολυώνυμο του x:

Κάθε παράσταση της μορφής $\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+.....+\alpha_1x+\alpha_0$ όπου ν φυσικός αριθμός και $\alpha_0,\ \alpha_1,\ ....,\ \alpha_{\nu}$ πραγματικοί αριθμοί

Όροι του πολυωνύμου: Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu},\ \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1},\ ...,\ \alpha_1x,\ \alpha_0$

Συντελεστές του πολυωνύμου: Οι αριθμοί $\alpha_{\nu},\ \alpha_{\nu-1},\ ...,\ \alpha_1,\ \alpha_0$

Σταθερά πολυώνυμα: Τα πολυώνυμα της μορφής α_0 $(\alpha_0\in\Re)$

Το 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

Δύο πολυώνυμα $\alpha_{\mu}x^{\mu}+.....+\alpha_1x+\alpha_0$ και $\beta_{\nu}x^{\nu}+.....+\beta_1x+\beta_0$ με $\mu\geq\nu$ λέμε ότι είναι **Ίσα**, όταν:

$\alpha_0=\beta_0,\ \alpha_1=\beta_1,.....,\ \alpha_{\nu}=\beta_{\nu}$

$$P(x)=\alpha_{\nu}x^{\nu}+....+\alpha_1x+\alpha_0$$

- Το $P(x)$ είναι **μηδενικό** όταν: $\alpha_{\nu}=...=\alpha_1=\alpha_0=0$
- Το $P(x)$ έχει **βαθμό** κ όταν είναι της μορφής: $P(x)=\alpha_{\kappa}x^{\kappa}+...+\alpha_1x+\alpha_0$ και $\alpha_{\kappa}\neq0$
- **Αριθμητική τιμή** ή τιμή του $P(x)$ για $x=\rho$: $P(\rho)=\alpha_{\nu}\rho^{\nu}+...+\alpha_1\rho+\alpha_0$
- Ο ρ **ρίζα** του $P(x)$ όταν $P(\rho)=0$
- Αν $P(x)$ μηδενικό $\Rightarrow$ $P(x)$ σταθερό
- Αν $P(x)$ μηδενικό $\Rightarrow$ δεν ορίζεται ο βαθμός του $P(x)$
- Αν $P(x)$ σταθερό $\Leftrightarrow$ ή βαθμός του $P(x)=0$ ή $P(x)=0$
- Αν $P(x)=c\Leftrightarrow P(x)=c\ \forall\ x\in\Re$

1. $\deg P(x)=0\Leftrightarrow P(x)=\alpha_0,\ \alpha_0\neq0$
2. $\deg P(x)=1\Leftrightarrow P(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha\neq0$
3. $\deg P(x)=2\Leftrightarrow P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

4 $\deg P(x)\cdot Q(x)=\deg P(x)+\deg Q(x)$

5.Αν το $P(x)+Q(x)$ είναι ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ τότε ο βαθμός του $P(x)+Q(x)$ είναι μικρότερος ή ίσος από το μέγιστο των βαθμών των $P(x)$ και $Q(x)$.

ΘΡΜ [**Ταυτότητα Διαίρεσης**]

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x)\neq0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε:

$\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$ όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

[Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ με $\delta\neq0$ υπάρχουν δύο φυσικοί αριθμοί π και υ τέτοιοι ώστε $\Delta=\delta\pi+\upsilon,\ \ 0\leq\upsilon<\delta$]

ΘΡΜ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$

ΘΡΜ Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$

ΘΡΜ [**Ακέραιων ριζών**]

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+.....+\alpha_1x+\alpha_0=0$ με ακέραιους συντελεστές.Αν ο ακέραιος $\rho\neq0$ είναι ρίζα της εξίσωσης τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0

ΘΡΜ Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+.....+\alpha_1x+\alpha_0$. Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha<\beta$ οι τιμές $f(\alpha),\ f(\beta)$ της συνάρτησης είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ μεταξύ των α και β

Υπενθύμιση:

- $\frac{A(x)}{B(x)}>0\Leftrightarrow A(x)B(x)>0$

$\frac{A(x)}{B(x)}\geq0\Leftrightarrow A(x)B(x)\geq0$ και $B(x)\neq0$

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

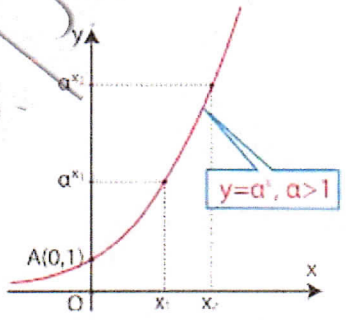
Υπενθύμιση - Ιδιότητες Δυνάμεων

Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $x,x_1,x_2\in\Re$ τότε:

1. $\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1+x_2}$ 2. $\alpha^{x_1}:\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1-x_2}$
3. $(\alpha^{x_1})^{x_2}=\alpha^{x_1x_2}$ 4. $(\alpha\cdot\beta)^x=\alpha^x\cdot\beta^x$
5. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x=\frac{\alpha^x}{\beta^x}$ 6. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ $\mu\in\mathbb{Z}$ και $\mu\in\mathbb{Z}^+$ 7. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-x}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x$ 8. $\alpha^0=1$

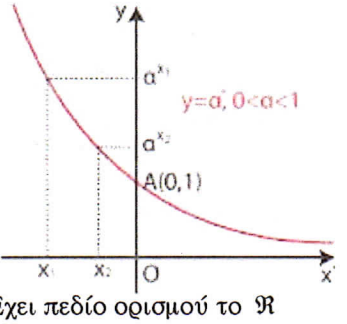
$$f:\Re\to\Re\ \ f(x)=\alpha^x,\ \alpha\neq1$$

- $f(x)=\alpha^x,\ \alpha>1$



- Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$
- Έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ δηλαδή αν $x_1<x_2\Leftrightarrow\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}$.
- Τέμνει τον y΄y στο $A(0,1)$
- Έχει ασύμπτωτο τον άξονα $0x'$

$$f:\Re\to\Re\ \ f(x)=\alpha^x,\ 0<\alpha<1$$



- Έχει πεδίο ορισμού το $\Re$
- Έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ δηλαδή αν $x_1<x_2\Leftrightarrow\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$.
- Τέμνει τον y΄y στο $A(0,1)$
- Έχει ασύμπτωτο τον άξονα $0x$

!!!!! ισχύει: $\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$

$$e=\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Η εξίσωση $\alpha^x=\theta$, όπου $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$ και $\theta>0$ έχει **μοναδική λύση** την οποία συμβολίζουμε με $\log_\alpha\theta$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση α.** Δηλαδή:

$$\alpha^x=\theta \Leftrightarrow x=\log_\alpha\theta$$

$$\alpha>0 \quad \alpha\neq 1 \quad \theta>0$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ:

α) $\log_{10}\theta=\log\theta$ β) $\log_e\theta=\ln\theta$

!! ο $\log_\alpha\theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ

!!! ΙΣΧΥΟΥΝ ΠΡΟΦΑΝΩΣ:

α) $\log_\alpha\alpha^x=x$ β) $\alpha^{\log_\alpha\theta}=\theta$

γ) $\log_\alpha 1=0$ δ) $\log_\alpha\alpha=1$

[ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ]

Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1,\theta_2,\theta>0$ και $\kappa\in\Re$:

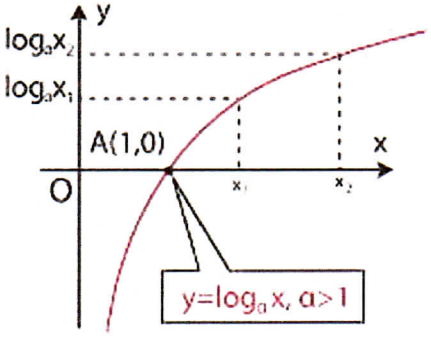
1. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$
2. $\log_\alpha\frac{\theta_1}{\theta_2}=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$
3. $\log_\alpha\theta^\kappa=\kappa\log_\alpha\theta$
4. $\log_\alpha\sqrt[\nu]{\theta}=\log_\alpha\theta^{\frac{1}{\nu}}$
5. Αν $\alpha,\beta>0$ με $\alpha,\beta\neq 1$ $\forall\theta>0$:
6. $\log_\beta\theta=\frac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$f:(0,+\infty)\to\Re$ με $f(x)=\log_\alpha x$

$f:(0,+\infty)\to\Re$

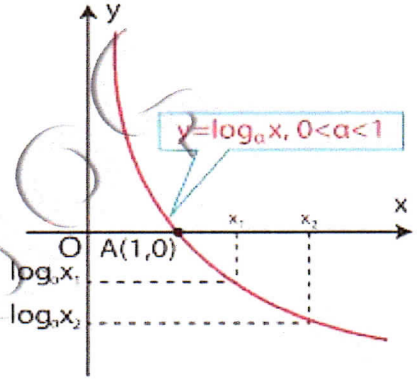
$f(x)=\log_\alpha x$ με $\alpha>1$



- Έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα : $x_1<x_2\Leftrightarrow\log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2$
- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον x΄x στο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον Oy΄.

$f:(0,+\infty)\to\Re$

$f(x)=\log_\alpha x$ με $0<\alpha<1$



- Έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως φθίνουσα : $x_1<x_2\Leftrightarrow\log_\alpha x_1>\log_\alpha x_2$

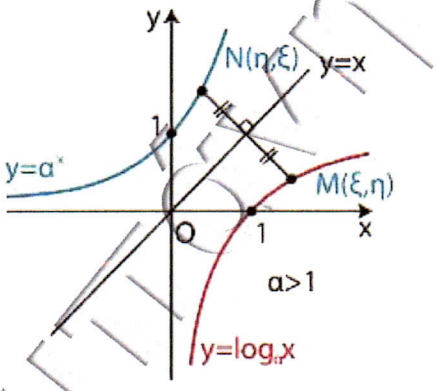
Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον x΄x στο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον Oy .

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Αν $\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2$ τότε $x_1=x_2$
2. Αν $x_1\neq x_2$ τότε: $\log_\alpha x_1\neq\log_\alpha x_2$

Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ $y=\log_\alpha x$ ΚΑΙ ΤΗΣ $y=\alpha^x$

α>1



0 < α < 1