32η Άσκηση

Έως κυρτότητα

Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[0,1]$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in [0,1]$.
- $f(1) = 2$
- $f(0) = 1$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $2f(x_0) = f(0,1) + f(0,01)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2e^x - 2x - 2$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

δ) Έστω επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο $[0,+\infty)$ εκτός του σημείου επαφής τους και $f'(x) \geq 2x$ για κάθε $x \geq 0$. Να δείξετε ότι:

i. η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$

ii. $f(x) - xf'(x) \leq 1 \leq f(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

iii. $(x+1)(f(x)-1) < x(f(x+1)-1)$ για κάθε $x > 0$.

iv. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Λύση

α) $f'(x) \geq 2x > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [1,2]$

β) Έστω $g(x) = 2f(x) - f(0,1) - f(0,01),\ x \in [0,1]$.

Είναι $0 < 0{,}01 < 0{,}1 < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(0{,}01) < f(0{,}1) < f(1)$

Είναι $g(0) = 2f(0) - f(0{,}1) - f(0{,}01) = (f(0) - f(0{,}1)) + (f(0) - f(0{,}01)) < 0$ και

$g(1) = 2f(1) - f(0{,}1) - f(0{,}01) = (f(1) - f(0{,}1)) + (f(1) - f(0{,}01)) > 0$, δηλαδή

$g(0)g(1) < 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, λόγω του Θ.Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) = f(0{,}1) + f(0{,}01)$

γ) Έστω $g(x) = f(x) - 2e^x + 2x + 2 = x^2 + 3 - 2e^x + 2x,\ x \in [0,1]$.

Είναι $g(0) = 1 > 0,\ g(1) = 6 - 2e < 0$ δηλαδή $g(0)g(1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x) = 2x - 2e^x + 2$ και $g''(x) = 2 - 2e^x$.

$0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 < e^x < e \Leftrightarrow -2 > -2e^x > -2e \Leftrightarrow 2 - 2e < 2 - 2e^x < 0 \Rightarrow g' \searrow [0,1]$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g'(0) > g'(x) > g'(1) \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [0,1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

δ) i. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Θεωρούμε τις εφαπτόμενες της C_f στα x_1, x_2 .

$\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ και

$\varepsilon_2 : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$

Επειδή η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, ισχύει ότι

$f(x) \geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ (1) και $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$ (2)

Η (1) για $x = x_2$ γίνεται: $f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \overset{x_1<x_2}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1)$ (3)

Η (2) για $x = x_1$ γίνεται: $f(x_1) > f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow$

$f(x_1) - f(x_2) > f'(x_2)(x_1 - x_2) \overset{x_1<x_2}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2)$ (4)

Από τις (3),(4) $\Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow f' \nearrow [0,+\infty) \Leftrightarrow f \cup [0,+\infty)$

ii. Για $x = 0$ παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα. Έστω $x > 0$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{f(x) - 1}{x}$

Είναι $0 < \xi < x \overset{f\cup \Leftrightarrow f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(0) < \dfrac{f(x) - 1}{x} < f'(x)$.

Είναι $\dfrac{f(x) - 1}{x} > f'(0) \geq 2 \cdot 0 = 0 \overset{x>0}{\Rightarrow} f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 1\ (1)$ και

$\dfrac{f(x) - 1}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f(x) - 1 < xf'(x) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) < 1\ (2)$.

Από τις (1),(2) $\Rightarrow f(x) - xf'(x) < 1 < f(x)$. Τελικά για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) - xf'(x) \leq 1 \leq f(x)$

iii. $(x+1)(f(x)-1) < x(f(x+1)-1) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-1}{x} < \dfrac{f(x+1)-1}{x+1}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)-1}{x}, \ x > 0$. Είναι $g'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x) + 1}{x^2}$.

Όμως για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) - xf'(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < f'(x)x - f(x) + 1$, άρα $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty)$.

Είναι $0 < x < x+1 \overset{g\nearrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-1}{x} < \dfrac{f(x+1)-1}{x+1}$.

iv. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = f'(1)x - f'(1) + 1$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα: $f(x) \geq f'(1)x - f'(1) + 1$ (3) για κάθε $x \geq 0$.

Από τη σχέση $f'(x) \geq 2x$ για $x = 1$ προκύπτει ότι $f'(1) \geq 2 > 0$, οπότε

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f'(1)x - f'(1) + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(1)x = +\infty$, οπότε λόγω της (3) είναι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$