Κριτήριο αξιολόγησης στις Ανισώσεις A_1

Όνομα:..Επώνυμο:..νμ/νία:

Θέμα Α

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Εστω το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν:

Α) $\Delta > 0$ και $\alpha < 0$ Β) $\Delta \geq 0$ και $\alpha < 0$ Δ) $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$ Ε) $\Delta < 0$ και $\alpha < 0$

β) Αν οι αριθμοί -2 και 4 είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x)=x^2-\kappa x+\lambda$ ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;

Α) $f(5)<0$ Β) $f(-5)<0$ Γ) $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ Δ) $f(1000)\leq 0$ μ 2x5

2. Έστω το τριώνυμο x^2-4x+3 με ρίζες τους αριθμούς 1 και 3. Τι καταλαβαίνετε από την έκφραση:
$x^2-4x+3<0$ για κάθε $1<x<3$; μ 5

3. Να εντοπίσετε το <u>**λάθος**</u> στο παρακάτω συλλογισμό:

Η ανίσωση $(2x-6)(x-1)>0$ γράφεται ισοδύναμα:

$(2x-6)(x-1)>0 \Leftrightarrow (2x-6>0 \text{ και } x-1>0) \Leftrightarrow (x>3 \text{ και } x>1) \Leftrightarrow x>3$.

Όμως ο αριθμός 0 , αν και είναι μικρότερος του 3, <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση. μ 5

4. Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-5|\leq|x+3|$ και να βρείτε τις λύσεις της (μόνο γεωμετρικά). μ 10

Θέμα Β μ 4x5

Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $3|x|-6<0$ ii. $2|x|-12>0$ iii. $5|x|+20>0$ iv. $3|x|+9<0$

Θέμα Γ

Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $2x-1<x^2-4<12$ μ 15

Θέμα Δ

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+(\lambda-\lambda^2),\ \lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. μ 14

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες; μ 8

γ) Αν $\lambda\neq\frac{1}{2}$ και $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1<x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$ μ 5

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2),f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),f(x_2+1)$ μ 8

Καλή Επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

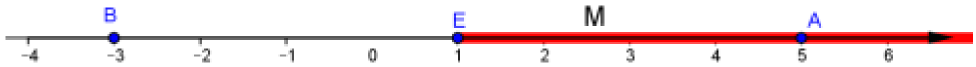
Θέμα Α

1. α) Δ) **β.** Γ)

2. Αν αντικάταστήσουμε στη θέση του x οποιδήποτε αριθό του διαστήματος (1,3), το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικός αριθμός.

3. Το γινόμενο $(2x-6)(x-1)$ είναι θετικό όταν $(2x-6>0 \text{ και } x-1>0)$ ή $(2x-6<0 \text{ και } x-1<0)$

4. Εστω Α,Β τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών που αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 και -3 αντίστοιχα και Μ το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό x.
Η σχέση $|x-5|\leq|x+3|$ γράφεται: $(MA)\leq(MB)$, δηλαδή η απόσταση του Μ από το Α δεν ξεπερνά την απόσταση του Μ από το Β.



Αν Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, τότε στο σημείο Ε αντιστοιχεί το 1 του άξονα. Αν το Μ βρίσκονταν στο Ε, τότε θα είχε ίσες αποστάσεις από τα Α και Β. Για να είναι η απόστασή του από το Α μικρότερη από την απόστασή του από το Β, πρέπει το Μ να είναι σημείο της ημιευθείας ΕΑ.

Θέμα Β

i. $3|x|-6<0 \Leftrightarrow 3|x|<6 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$

ii. $2|x|-12>0 \Leftrightarrow 2|x|>12 \Leftrightarrow |x|>6 \Leftrightarrow x<-6$ ή $x>6$

iii. $5|x|+20>0 \Leftrightarrow 5|x|>-20 \Leftrightarrow |x|>-4$ ταυτότητα

iv. $3|x|+9<0 \Leftrightarrow 3|x|<-9 \Leftrightarrow |x|<-3$ αδύνατη

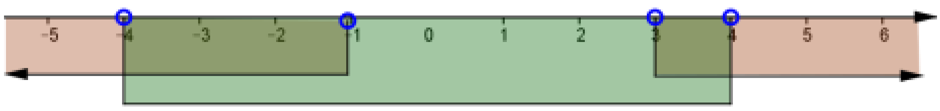
Θέμα Γ

$2x-1<x^2-4<12 \Leftrightarrow 2x-1<x^2-4\ (1)$ και $x^2-4<12\ (2)$

Από την (1) έχουμε: $2x-1<x^2-4 \Leftrightarrow 0<x^2-2x-3$.
Το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει ρίζες -1 και 3 και οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $x<-1$ ή $x>3$

x	$-\infty \quad -1$	3	$+\infty$
x^2-2x-3	$+$	$-$	$+$

Από τη (2) έχουμε: $x^2-4<12 \Leftrightarrow x^2<16 \Leftrightarrow |x|<4 \Leftrightarrow -4<x<4$



Με συναλήθευση των λύσεων των ανισώσεων (1) και (2) προκύπτει: $x\in(-4,-1)\cup(3,4)$. Όμως ο x είναι ακέραιος, άρα $x=-3$ ή $x=-2$

Θέμα Δ

α) $\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-\lambda^2)=1-4\lambda+4\lambda^2=(1-2\lambda)^2\geq0$.
Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Θα πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1-2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) i) $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2 \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow} 2x_1 < x_1+x_2 < 2x_2$

$2x_1 < x_1+x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ισχύει

$x_1+x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ ισχύει

ii) Επειδή $\alpha = 1 > 0$ το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

x	$-\infty$ $\quad x_1$	$\frac{x_1+x_2}{2}$ $\quad x_2$	x_2+1 $\quad +\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$	+	−	+

Επομένως $f(x_1) = 0$, $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$, $f(x_2+1) > 0$

Άρα $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2+1)$

Κριτήριο αξιολόγησης στις Ανισώσεις A_3

Όνομα:..Επώνυμο:...νμ/νία:

Θέμα Α

1.Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Εστω το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν:

Α) $\Delta>0$ και $\alpha<0$ Β) $\Delta\geq 0$ και $\alpha<0$ Δ) $\Delta<0$ και $\alpha>0$ Ε) $\Delta<0$ και $\alpha<0$

β) Αν οι αριθμοί -2 και 4 είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x)=x^2-\kappa x+\lambda$ ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;

Α) $f(5)<0$ Β) $f(-5)<0$ Γ) $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ Δ) $f(1000)\leq 0$ μ 2x5

2. Έστω το τριώνυμο x^2-4x+3 με ρίζες τους αριθμούς 1 και 3. Τι καταλαβαίνετε από την έκφραση: $x^2-4x+3<0$ για κάθε $1<x<3$; μ 5

3. Να εντοπίσετε το **λάθος** στο παρακάτω συλλογισμό:

Η ανίσωση $(2x-6)(x-1)>0$ γράφεται ισοδύναμα:

$(2x-6)(x-1)>0 \Leftrightarrow (2x-6>0 \text{ και } x-1>0) \Leftrightarrow (x>3 \text{ και } x>1) \Leftrightarrow x>3$.

Όμως ο αριθμός 0 , αν και είναι μικρότερος του 3, επαληθεύει τη δοθείσα ανίσωση. μ 5

4. Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-5|\leq|x+3|$ και να βρείτε τις λύσεις της (μόνο γεωμετρικά). μ 10

Θέμα Β μ 4x5

Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $3|x|-6<0$ ii. $2|x|-12>0$ iii. $5|x|+20>0$ iv. $3|x|+9<0$

Θέμα Γ

Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $2x-1<x^2-4<12$ μ 15

Θέμα Δ

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2-6x+\lambda-3$, με $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. μ 4

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. μ 10

γ) Αν $3<\lambda<12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. μ 10

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa<0$ και $x_1<\mu<x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. μ 11

Καλή Επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύσεις

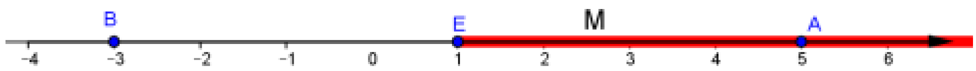
Θέμα Α

1. α) Δ) **β.** Γ)

2.Αν αντικάταστήσουμε στη θέση του x οποιδήποτε αριθό του διαστήματος (1,3), το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικός αριθμός.

3. Το γινόμενο $(2x-6)(x-1)$ είναι θετικό όταν $(2x-6>0 \text{ και } x-1>0)$ ή $(2x-6<0 \text{ και } x-1<0)$

4.Εστω Α,Β τα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών που αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 και -3 αντίστοιχα και Μ το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό x.
Η σχέση $|x-5|\le|x+3|$ γράφεται: $(MA)\le(MB)$, δηλαδή η απόσταση του Μ από το Α δεν ξεπερνά την απόσταση του Μ από το Β.



Αν Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, τότε στο σημείο Ε αντιστοιχεί το 1 του άξονα. Αν το Μ βρίσκονταν στο Ε, τότε θα είχε ίσες αποστάσεις από τα Α και Β. Για να είναι η απόστασή του από το Α μικρότερη από την απόστασή του από το Β, πρέπει το Μ να είναι σημείο της ημιευθείας ΕΑ.

Θέμα Β

i. $3|x|-6<0 \Leftrightarrow 3|x|<6 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$

ii. $2|x|-12>0 \Leftrightarrow 2|x|>12 \Leftrightarrow |x|>6 \Leftrightarrow x<-6$ ή $x>6$

iii. $5|x|+20>0 \Leftrightarrow 5|x|>-20 \Leftrightarrow |x|>-4$ ταυτότητα

iv. $3|x|+9<0 \Leftrightarrow 3|x|<-9 \Leftrightarrow |x|<-3$ αδύνατη

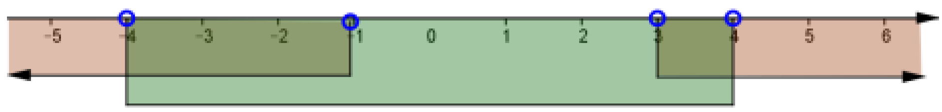
Θέμα Γ

$2x-1<x^2-4<12 \Leftrightarrow 2x-1<x^2-4\ (1)$ και $x^2-4<12\ (2)$

Από την (1) έχουμε: $2x-1<x^2-4 \Leftrightarrow 0<x^2-2x-3$.
Το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει ρίζες -1 και 3 και οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $x<-1$ ή $x>3$

x	$-\infty \quad -1$	3	$+\infty$
x^2-2x-3	+	−	+

Από τη (2) έχουμε: $x^2-4<12 \Leftrightarrow x^2<16 \Leftrightarrow |x|<4 \Leftrightarrow -4<x<4$



Με συναλήθευση των λύσεων των ανισώσεων (1) και (2) προκύπτει: $x\in(-4,-1)\cup(3,4)$. Όμως ο x είναι ακέραιος, άρα $x=-3$ ή $x=-2$

Θέμα Δ

α) $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot(\lambda-3)=36-4\lambda+12=48-4\lambda$.

β) Θα πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow 48-4\lambda>0 \Leftrightarrow 4\lambda<48 \Leftrightarrow \lambda<12$.

γ) i) Επειδή $\lambda<12$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
$P=x_1\cdot x_2=\lambda-3>0$.Άρα έχει ρίζες ομόσημες. $S=x_1+x_2=6>0$. Άρα έχει ρίζες θετικές .

γ) i)

x	$-\infty$ κ x_1 μ x_2 $+\infty$		
$f(x)$	+	-	+

Εχουμε : $\kappa<0$, $\mu>x_1>0$ ($x_1>0$, από γ)i) ερώτημα) Από τον πίνακα προσήμου έχουμε $f(\kappa)>0$, $f(\mu)<0$.

Άρα $\kappa\cdot f(\kappa)\cdot\mu\cdot f(\mu)>0$