

**Διάνυσμα:** Προσανατολισμένο εινθύγραμμό τημήμα του οποίου το πρώτο άκρο λέγεται αρχή ή σημείο εφαρμογής και το δεύτερο άκρο λέγεται πέρας Άν η αρχή και το πέρας συμπίπτουν τότε το διάνυσμα λέγεται μηδενικό. (π.χ.  $\overrightarrow{AA}$ )

**Μέτρο** ή μήκος διανύσματος: Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος. Ένα διάνυσμα με μέτρο 1 λέγεται μοναδιαίο. **Φορέας:** Η ενθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα

**Παραλληλή ή συνγραμμική** ή ότι έχουν την ίδια διεύθυνση: λέγονται Δύο μη μηδενικά διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παραλληλους φορείς. Τα συνγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε :

**ομόρροπα** (έχουν παραλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημεπίπεδο ως προς την ευθεία που ενώνει τις αρχές τους ή έχουν τον ίδιο φορέα και μια από τις ημιευθείες περιέχει την άλλη) ή

**αντίρροπα** (όταν δεν είναι ομόρροπα). **ΔΗΛΑΔΗ**

Ομόρροπα: ίδια κατεύθυνση

Αντίρροπα: αντίθετη κατεύθυνση

**Ισα:** λέγονται δύο μη μηδενικά διανύσματα τα οποία έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

ΙΣΧΥΕΙ: α) Αν  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$  τότε  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BD}$ ,

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{GA}$ ,  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DG}$

β) Αν  $M$  μέσο των  $\overrightarrow{AB}$

τότε  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$  και αντιστρόφως

**Αντίθετα:** Δύο διανύσματα όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ . Με αρχή ένα σημείο  $O$  παίρνουμε διανύσματα

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\beta}$ . Την κυρτή γωνία  $A\hat{O}B$  που ορίζουν οι ημιευθείες  $OA, OB$  την λέμε γωνία  $\theta$  των διανυσμάτων  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ . Ισχύει  $\theta \in [0, \pi]$  και

α)  $\theta = 0$   $\alpha \nu \overrightarrow{\alpha} \uparrow \uparrow \overrightarrow{\beta}$

β)  $\theta = \pi$   $\alpha \nu \overrightarrow{\alpha} \uparrow \downarrow \overrightarrow{\beta}$

γ)  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $\alpha \nu \overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta}$

### ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω δύο διανύσματα  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ . Με αρχή ένα σημείο

Ο παίρνουμε διανύσμα  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$  και μετά με αρχή το  $A$  παίρνουμε  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\beta}$ . Το διάνυσμα

$\overrightarrow{OM}$  λέγεται άθροισμα ή συνισταμένη των  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$  και συμβολίζεται ως  $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$

Iδιότητες

α)  $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\alpha}$

( $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} + (\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma})$  γ)  $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{\alpha}$

δ)  $\overrightarrow{\alpha} + (-\overrightarrow{\alpha}) = \overrightarrow{0}$

!!! Αν τα διανύσματα έχουν κοινή αρχή δηλαδή με αρχή ένα σημείο  $O$  πάρουμε  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$  και

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\beta}$  τότε το άθροισμα  $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$  ορίζεται από την διαγώνιο  $OM$  των παραλληλογράμμου με προσκέμενες πλευρές τις  $OA$  και  $OB$ .

(ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ)

### ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Η διαφορά  $\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$  ορίζεται ως το άθροισμα των  $\overrightarrow{\alpha}$  και  $-\overrightarrow{\beta}$ :  $\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha} + (-\overrightarrow{\beta})$

Αν έχουμε δύο διανύσματα  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$  τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα  $\overrightarrow{x}$  τέτοιο ώστε  $\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\alpha}$ . Πράγματι:  $\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\alpha}$   
 $\Leftrightarrow (-\overrightarrow{\beta}) + (\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{x}) = (-\overrightarrow{\beta}) + \overrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow$   
 $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\alpha} + (-\overrightarrow{\beta}) \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}$

### ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΕΩΣ

Έστω  $O$  ένα σταθερό σημείο. Τότε για κάθε σημείο  $M$  ορίζεται το διάνυσμα  $\overrightarrow{OM}$  το οποίο λέγεται διάνυσμα θέσεως του  $M$  ή διανυσματική ακτίνα του  $M$ . Το σημείο  $O$ , είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται σημείο αναφοράς ΙΣΧΥΕΙ  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ . Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής

### ΜΕΤΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$$\|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\| \leq \|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\| \leq \|\overrightarrow{\alpha}\| + \|\overrightarrow{\beta}\|$$

### ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Κάθε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή  $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{x}i + \overrightarrow{y}j$

Συντελεστής διεύθυνσης του  $\overrightarrow{\alpha} = (x, y)$

$\lambda = \frac{y}{x} = \text{εφφ} \quad \phi \in [0, 2\pi)$  όπου φ η γωνία που σχηματίζει το  $\overrightarrow{\alpha}$  με τον  $x'$

α) Αν  $y = 0$  ( $\overrightarrow{\alpha} // x'$ ) τότε  $\lambda = 0$

β) Αν  $x = 0$  ( $\overrightarrow{\alpha} // y'$ ) τότε ΔΕΝ ορίζεται λ

### ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥ ΤΩΝ $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, y_1), \overrightarrow{\beta} = (x_2, y_2)$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

### ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

### ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ $(x, y)$ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΚΡΑ $A(x_1, y_1)$

$$B(x_2, y_2) \quad \overrightarrow{AB} = (x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Έστω λ πραγματικός αριθμός με  $\lambda \neq 0$  και  $\overrightarrow{\alpha}$  ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το  $\overrightarrow{\alpha}$  και το συμβολίζοντας με  $\lambda \cdot \overrightarrow{\alpha}$  ή με  $\lambda\overrightarrow{\alpha}$  ένα διάνυσμα το οποίο :

α) Είναι ομόρροπο του  $\overrightarrow{\alpha}$ , αν  $\lambda > 0$  και αντίρροπο του  $\overrightarrow{\alpha}$  αν  $\lambda < 0$

β) Έχει μέτρο  $|\lambda||\overrightarrow{\alpha}|$

Αν  $\lambda = 0$  ή  $\overrightarrow{\alpha} = 0$  τότε ορίζουμε ως  $\lambda \cdot \overrightarrow{\alpha}$  το μηδενικό διάνυσμα  $\overrightarrow{0}$

### ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

α)  $\lambda(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) = \lambda\overrightarrow{\alpha} + \lambda\overrightarrow{\beta}$

β)  $(\lambda + \mu)\overrightarrow{\alpha} = \lambda\overrightarrow{\alpha} + \mu\overrightarrow{\alpha}$

γ)  $\lambda(\mu\overrightarrow{\alpha}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{\alpha}$

δ)  $\lambda\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$  ή  $\overrightarrow{\alpha} = 0$

ε)  $(-\lambda)\overrightarrow{\alpha} = \lambda(-\overrightarrow{\alpha}) = -(\lambda\overrightarrow{\alpha})$

στ) Αν  $\lambda\overrightarrow{\alpha} = \lambda\overrightarrow{\beta}$  και  $\lambda \neq 0$ , τότε  $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta}$

ζ) Αν  $\lambda\overrightarrow{\alpha} = \mu\overrightarrow{\alpha}$  και  $\overrightarrow{\alpha} \neq 0$ , τότε  $\lambda = \mu$

Γραμμικός συνδυασμός των  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$  λέγεται

κάθε διάνυσμα της μορφής  $\overrightarrow{v} = \kappa\overrightarrow{\alpha} + \lambda\overrightarrow{\beta}$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  Ανάλογα ορίζεται ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσοτέρων διανυσμάτων

### ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$  είναι δύο διανύσματα με  $\overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$  τότε

$$\overrightarrow{\alpha} // \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha} = \lambda\overrightarrow{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$$



Κωνσταντίνος

Καραθεοδωρή

1873 - 1950

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες

Μέτρο του  $\overrightarrow{\alpha} = (x, y) \quad |\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Απόσταση δύο σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$   $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

### ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

$$\overrightarrow{\alpha} // \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}) = 0 \quad \overrightarrow{\alpha} // \overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

**Εσωτερικό γινόμενο** δυο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ , λέμε τον πραγματικό αριθμό  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συνφ}$ , όπου φημίνεται ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συνφ}$

Αν  $\vec{\alpha} = \vec{0}$  ή  $\vec{\beta} = \vec{0}$  ΤΟΤΕ  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

**Ιδιότητες**

a)  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$

b)  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

c)  $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

d)  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

e)  $|\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\alpha}|^2$

f)  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \quad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$

g) Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  τότε

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ . Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομάδων μων συντεταγμένων.

A)  $(\lambda \vec{\alpha}) \vec{\beta} = \vec{\alpha} (\lambda \vec{\beta}) = \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

B)  $\vec{\alpha} (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \vec{\beta} + \vec{\alpha} \vec{\gamma}$

I)  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$

**Συνημίτονο γωνίας** 2 διανυσμάτων

$\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

$\text{συνθ} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$  ή  $\text{συνθ} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$

**Προβολή Διανύσματος**  $\vec{v}$  σε διάνυσμα  $\vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  με  $x_1 \neq x_2$

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Συνήκη καθετότητας / παραλληλίας ευθεών**  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$  /  $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Εξίσωση ευθείας με γνωστό  $\lambda$  πότε διέρχεται από γνωστό σημείο  $A(x_0, y_0)$

$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το  $A(x_0, y_0)$ :  $x = x_0$

Οριζόντια ευθεία ( $/ / x'x$ ) που διέρχεται από το  $A(x_0, y_0)$ :  $y = y_0$

ευθεία που διέρχεται από το  $(0,0)$ :  $y = \lambda x$

Εξίσωση διχοτόμου 1<sup>ο</sup> και 3<sup>ο</sup> τεταρτημορίου (2<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup>)  $y = x$  ( $y = -x$ )

**Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας**

$Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$

**Παράλληλη** στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$

**Κάθετη** στο διάνυσμα  $\vec{n} = (A, B)$

Απόσταση σημείου  $M(x_0, y_0)$  από ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ :

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Εμβαδόν τριγώνου**  $AB\Gamma$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot |\det(\vec{AB}, \vec{AG})|$$

Απόσταση 2 παραλλήλων ευθειών

$\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$  και  $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

**ΚΥΚΛΟΣ**  $(KM) = R$

$K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $R$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

**Γενική Μορφή εξίσωσης κύκλου**

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$
 με

$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$  τότε

κέντρο  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ , ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

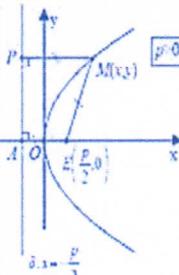
Εξίσωση κύκλου με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $R$ :  $x^2 + y^2 = R^2$

Εξίσωση εφαπτομένης του παραπάνω κύκλου στο σημείο  $A(x_1, y_1)$ :  $xx_1 + yy_1 = R^2$

**ΠΑΡΑΒΟΛΗ**  $(ME) = d(M, \delta)$

(a) Εστία  $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  διευθετούσα  $\delta: x = -\frac{p}{2}$

$$y^2 = 2px$$



εφαπτομένη στο  $M(x_1, y_1)$ :  $yy_1 = p(x + x_1)$

(b) Εστία  $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$  διευθετούσα  $\delta: y = -\frac{p}{2}$

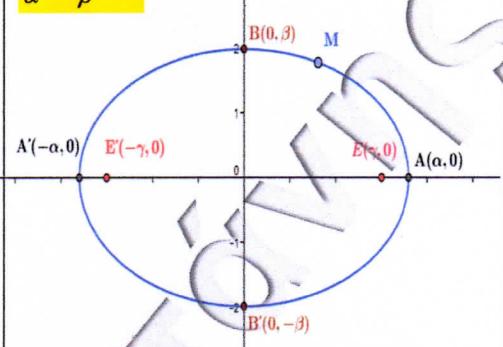
$$x^2 = 2py$$

εφαπτομένη στο  $M(x_1, y_1)$ :  $xx_1 = p(y + y_1)$

**ΕΛΛΕΙΨΗ**  $(ME) + (ME') = 2\alpha$

(a) Με εστίες  $E'(-\gamma, 0)$ ,  $E(\gamma, 0)$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{με } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad (\alpha > \gamma)$$



Μήκος Μεγάλου άξονα:  $2a$

Μήκος Μικρού άξονα:  $2b$

εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{με } \varepsilon < 1$$

εφαπτομένη στο  $A(x_1, y_1)$ :  $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

(b) Με εστίες  $E'(0, -\gamma)$ ,  $E(0, \gamma)$

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \quad \text{με } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \quad (\alpha > \gamma)$$

εφαπτομένη στο  $A(x_1, y_1)$ :  $\frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$

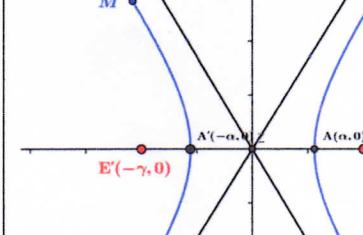
**ΥΠΕΡΒΟΛΗ**  $|(|ME) - (ME')| = 2a$

(a) Εστίες  $E'(-\gamma, 0)$ ,  $E(\gamma, 0)$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

με  $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$  ( $\gamma > \alpha$ )

μοντέλο:  $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$



εφαπτομένη στο  $M(x_1, y_1)$ :  $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

(b) Εστίες  $E'(0, -\gamma)$ ,  $E(0, \gamma)$

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{με } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \quad (\gamma > \alpha)$$

μοντέλο:  $y = \pm \frac{\alpha}{\beta} x$

εφαπτομένη στο  $M(x_1, y_1)$ :  $\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$

εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{με } \varepsilon > 1$