18η Άσκηση

Ανισώσεις 1ου Βαθμού

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α, β, λ, x με $\alpha = x^2 + (\lambda^2 - 9)x + \lambda + 2$ και $\beta = x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda^2 - 8$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση $\beta = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες και η εξίσωση $\alpha = 0$ έχει ρίζες αντίθετες.

Έστω $\lambda = -3$

β) Να λύσετε την ανίσωση $\beta > \alpha$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $|\alpha - \beta| < 2$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $|\alpha| \le |\beta|$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $|\alpha - \beta| + |1 - x| < 3$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^2 = 3x - 3$.

ζ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς α και β.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Η εξίσωση $\beta=0\Leftrightarrow x^2+(\lambda+1)x+\lambda^2-8=0$ έχει ρίζες αντίστροφες όταν έχει $\Delta>0$ και $P=x_1x_2=1$.

Είναι $P=\dfrac{\lambda^2-8}{1}=\lambda^2-8$, άρα $\lambda^2-8=1\Leftrightarrow\lambda^2=9\Leftrightarrow\lambda=\pm3$.

Αν $\lambda=3$ τότε $\beta=x^2+4x+1$ που έχει δύο ρίζες αντίστροφές αφού $\Delta>0$. Τότε $\alpha=x^2+5$ και η εξίσωση $\alpha=0$ είναι αδύνατη αφού $\alpha=x^2+5>0$.

Αν $\lambda=-3$ τότε $\beta=x^2-2x+1=(x-1)^2$ και η εξίσωση $\beta=0$ έχει διπλή ρίζα την $x=1$, οπότε οι ρίζες της είναι αντίστροφες. Τότε $\alpha=x^2-1$ που έχει δύο ρίζες αντίθετες αφού $x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$. Άρα $\lambda=-3$.

β) $\beta>\alpha\Leftrightarrow\cancel{x^2}-2x+1>\cancel{x^2}-1\Leftrightarrow-2x>-2\Leftrightarrow x<1$.

γ) $|\alpha-\beta|<2\Leftrightarrow\left|\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+2x-1\right|<2\Leftrightarrow|2x-2|<2\Leftrightarrow-2<2x-2<2\Leftrightarrow 0<2x<4\Leftrightarrow0<x<2$

δ) $|\alpha|\le|\beta|\Leftrightarrow\left|x^2-1\right|\le\left|(x-1)^2\right|\Leftrightarrow|(x-1)(x+1)|\le|x-1|^2\Leftrightarrow|x-1||x+1|-|x-1|^2\le0\Leftrightarrow$

$|x-1|\left(|x+1|-|x-1|\right)\le0$ (1). Όμως $|x-1|\ge0$ άρα η (1) γίνεται $x=1$ ή

$|x+1|-|x-1|\le0\Leftrightarrow|x+1|\le|x-1|\Leftrightarrow|x+1|^2\le|x-1|^2\Leftrightarrow(x+1)^2\le(x-1)^2\Leftrightarrow$

$x^2+2x+1\le x^2-2x+1\Leftrightarrow4x\le0\Leftrightarrow x\le0$

ε) $|\beta-\alpha|+|x-1|<3\Leftrightarrow\left|\cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}+1\right|+|x-1|<3\Leftrightarrow|-2x+2|+|x-1|<3\Leftrightarrow$

$|-2(x-1)|+|x-1|<3\Leftrightarrow2|x-1|+|x-1|<3\Leftrightarrow3|x-1|<3\Leftrightarrow|x-1|<1\Leftrightarrow-1<x-1<1\Leftrightarrow0<x<2$

στ) $\beta^2=3x-3\Leftrightarrow(x-1)^2-3(x-1)=0\Leftrightarrow(x-1)(x-1-3)=0\Leftrightarrow(x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow$

$(x-1=0\Leftrightarrow x=1)$ ή $(x-4=0\Leftrightarrow x=4)$

ζ) Από το β) ερώτημα $\beta>\alpha$ για $x<1$,οπότε $\beta<\alpha$ για $x>1$.

Τέλος $\alpha=\beta$ αν $x=1$.