ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

❖ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – ΜΟΝΩΝΥΜΑ

1. Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές της αλγεβρικής παράστασης $\nu^2+\nu+17$ για τις ακέραιες τιμές του ν από 0 μέχρι 6. Τι έχετε να διαπιστώσετε για όλες αυτές τις τιμές.

2. Η αριθμητική τιμή του μονώνυμου $2x^5y\omega^3$ για x=1, y=4 και ω=β είναι 27.
Ποιος είναι ο αριθμός β;

3. Να βρείτε την τιμή του φυσικου αριθμού ν για την οποία η παράσταση $\sqrt{5}\cdot x^{3-2\nu}\cdot y^{3\nu-2}$ είναι μονώνυμο.

4. Να βρείτε όλα τα μονώνυμα με συντελεστή 3 και μεταβλητές α, β, γ τα οποία έχουν βαθμό 5 ως προς αβγ.

5. Θεωρούμε τα μονώνυμα $A=2x^5y^8$ και $B=4x^\nu y^\lambda$. Ποιες τιμές μπορούν να πάρουν τα ν και λ ώστε το $\frac{A}{B}$ να είναι μονώνυμο;

6. Αν $y=3-2x$ και $z=3x-4y+2$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης :
$A=3x-2y+3(z-2x)$ όταν x= -2

7. Να βρεθούν τα γινόμενα:

ι) $(4xy^3\omega).(-5x^2y^4\omega^2)$ ιι) $\frac{7}{2}x^2\cdot\left(-2x^3y^4\right)$

ιιι) $(-2x^2y).(-4xy\omega^2).(3xy^2\omega)$ ιv) $\left(-\frac{1}{2}x^3y\omega^2\right)\left(\frac{1}{3}x^2y^2\omega\right)$

v) $\left(-4xy^2\omega\right)\left(-\frac{3}{2}x^2y\right)\left(-5x^2y^3\omega\right)$ vι) $(-2x^2y)^3.(-5x).(3xy^3)^2$

vιι) $\left(-2xy^3\omega^2\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}xy^2\right)^3$ vιιι) $(3xy^2)^3.(-2x^2y).(-3xy\omega)^2$

8. Να γίνουν οι πράξεις:

ι) $(-20x^3y):(-4x^2)$ ιι) $(-36x^4y^3):(9x^4y^2)$ ιιι) $(-14x^5y^3\omega^2):(2x^4y^3\omega)$

ιv) $(-3x^2y^3\omega)^3:(-9x^4y^5\omega^2)$ v) $(-xy^2\omega)^3.(xy\omega):(x^2y^2\omega)$ vι) $(-x^2y\omega)^3.(xy^2\omega):(x^3y^4\omega)$

❖ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ

9. Να γίνει αναγωγή ομοίων όρων:

ι) $(4\alpha\beta+2\alpha-7)-\alpha\beta+8\alpha-12-(-3\alpha\beta+7\alpha-21)$

ιι) $\alpha^2-\left(\beta^2-\alpha\beta\right)+\left[2\beta^2+3\alpha\beta-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]-\left(-3\beta^2+4\alpha\beta\right)$

iii) $4x^2-\left[(7x^3-2x)+9x^2-(6x^2+5)-(-9x^3+4x-3)\right]$

iv) $(2\alpha-1)-\left[-3\alpha-\left(\alpha^2-4\right)\right]-\left\{\alpha^2-\left[5\alpha+2-\left(\alpha^2-3\right)\right]\right\}$

v) $4\alpha^2-\left\{\alpha^2-\left[2\alpha-\left(1-\alpha^3\right)\right]+7\alpha\right\}-\left\{4\alpha^3+\left[\alpha+\left(\alpha^2-1\right)-5\alpha^2\right]-2\right\}-7$

10. Ομοίως:

i) $(2x+3y)-(-x-2y+1)+(3y-2)$

ii) $(\alpha^2x^2+3\alpha x^3)+(2x^3-2\alpha^3+\alpha^3x)-(-\alpha^2x^2+\alpha^3)$

iii) $-3\alpha\beta+\left(2\beta^2-\alpha^2\right)-\left[\alpha\beta-\left(\alpha^2+\beta^2\right)+3\alpha^2\right]-\left(2\beta^2-\alpha^2\right)$

iv) $\alpha^2-2\alpha\beta-\left\{2\alpha^2-\left[3\beta^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)-3\alpha^2\right]-\alpha\beta\right\}$

v) $(2x-3)-\left[-2x-(x^2-2)\right]-\left\{x^2-\left[3x+4-(x^2-1)\right]\right\}$

vi) $3x^2-\left\{x^2-\left[x-(1-x^3)\right]+2x\right\}-\left\{2x^3+\left[x+(x^2-3)-3x^2\right]-1\right\}-4$

11. Αν $A=x^2-2xy+5y^2$, $B=-2x^2+3xy-4y^2$ και $\Gamma=6x^2-2xy+y^2$. Να βρεθούν :

i) -Α+Β+Γ ii) Α+Β-Γ

12. Αν $A=x^3-4x^2+3x-1$, $B=2x^3-5x^2-2x+3$, $\Gamma=4x^3+x^2-x-2$, να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) Α+Β ii) Α+Β+Γ iii) Α-Β iv) Α-Β+Γ v) Γ-Α-Β

13. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $3x(x^2-1)-4x^2(x+2)-3x+4(x^2-1)$

ii) $-5x^2(x^3-2x^2+4)+(1-2x)(-4x^3)-x(x-1)-2x$

iii) $2\alpha\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)-\beta^3-\left(\alpha-\beta\right)\left(-3\alpha\beta\right)-4\alpha^2\beta$

iv) $3\left[x^2-(x+4)-3\right]-2x^2\left[x^2+(x-2)\right]-5$

v) $2\alpha\left\{\alpha\beta-\left[\alpha^2-\left(-\alpha\beta+4\right)\right]+2\right\}-3\alpha\left(\alpha^2-2\right)$

14. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $5x^2+3x(2x-1)-2(4x^2-3)$

ii) $2x(3x^2-2)-4x^2(x+5)-3x+3(x^2-1)$

iii) $4[x^2-2(x+3)-1]-3x^2[x^2+3(x-4)]-2x(x+1)$

iv) $2x\left\{xy-\left[x^2-(3-xy)\right]+5\right\}-4x(x^2-1)$

15. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $2x(5x+y)(3x-4y)$ ii) $x(2xy-y^2)(3x^2-4y^2)$

iii) $2\alpha\left(3\beta-\alpha\right)\left(2\alpha-\beta\right)$ iv) $(2x^3-3x^2-4x-1)\cdot(x^2+x+1)$

16. Να γίνουν οι πράξεις:

ι) $[2x-(2y+5x)-4](x+y)-(2x-3y)[2x+(1-x-y)]$

ιι) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$

ιιι) $(2x+3y)(3x-2y)-3(x^2-y^2)+4(x^2-xy+y^2)$

ιv) $(x^2-2x+1)(x+2)-(2x^2-3x+4)(x-1)$

17. Να βρεθούν τα γινόμενα:

ι) $(x+1)(x-1)(x+3)$ ιι) $(x^2+xy+y^2)(x-y)(x^2+y^2)$

18. Αν Α=$3x^2$, Β=x^2-2xy+$3y^2$, Γ=$4y^2$ και Δ=$2x^2$-xy+y^2 να βρεθούν τα πολυώνυμα:

ι) Α(Β-Γ) ιι) $B\cdot\Delta+A\cdot(B+\Gamma)$

19. Να εκτελεστούν πρώτα οι πράξεις και στη συνέχεια να βρεθεί η αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

ι) $(x^2y-2xy^2)(2x-y)-2x^3(x+y)-(x-y)(-2y^3)$ για x= -1, y= 2

ιι) $\alpha^2+\alpha\beta^2-\left[\alpha^3-(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\right]$ για α= -2, β=$\frac{1}{2}$

ιιι) $(2x+3)(x^2+x-1)-(x^2-1)9x+2-2x^3$ για x= -2

ιv) $x(x^2-2)-(x+2)[x^2-(1-x)]$ για x= -3

20. Να αντικατασταθούν οι παρακάτω παύλες έτσι ώστε να ισχύει κάθε μια από τις παρακάτω ισότητες:

ι) $\ldots\ldots\cdot(4\beta^2-7\beta+8)=28\beta^3-49\beta^2+56\beta$

ιι) $\ldots\ldots\cdot(3x^2+8x-7)=36x^5+\ldots\ldots-\ldots\ldots$

ιιι) $5\alpha^2\beta^3(\ldots\ldots-9\beta^2+\ldots\ldots)=20\alpha^5\beta^7-\ldots\ldots+\alpha^4\beta^9$

21. Αν $A=4x-3$, $B=x+4$ και $\Gamma=2x-1$, να επαληθεύσετε την προσεταιριστική και την επιμεριστική ιδιότητα:

ι) $(A\cdot B)\cdot\Gamma=A\cdot(B\cdot\Gamma)$ ιι) $A\cdot(B+\Gamma)=A\cdot B+A\cdot\Gamma$

22. Να συμπληρωθούν τα κενά στις αναγωγές ομοίων όρων των παρακάτω πολυωνύμων: ι) $x-6+9x^2-x^4+\ldots x^2+\ldots=17x^2+x-\ldots$

ιι) $\ldots x^3+5x-12x^2+7xy-\ldots x+x^3-\ldots xy=3x^3\ldots+2x-4xy$

23. Να συμπληρωθούν τα κενά στους παρακάτω πολλαπλασιασμούς πολυωνύμων με μονώνυμα:

ι) $\ldots(3-\ldots)=-12\alpha^2+4\alpha^5$

ιι) $(\ldots-5\alpha\beta+\ldots-\beta^3)(-6\alpha^2\beta)=12\alpha^4\beta+\ldots-42\alpha^3\beta^3+\ldots$

ιιι) $(\ldots-\ldots-\frac{9}{10}x^2y^3)(-\ldots)=-35x^5y^2+24x^4y^3+27x^3y^4$

ΛΥΣΕΙΣ

1. Για ν = 0 είναι $\nu^2+\nu+17 = 17$
Για ν = 1 είναι $\nu^2+\nu+17 = 19$
Για ν = 2 είναι $\nu^2+\nu+17 = 23$
Για ν = 3 είναι $\nu^2+\nu+17 = 29$
Για ν = 4 είναι $\nu^2+\nu+17 = 37$
Για ν = 5 είναι $\nu^2+\nu+17 = 47$
Για ν = 6 είναι $\nu^2+\nu+17 = 59$
Όλες οι αριθμητικές τιμές είναι ακέραιοι και θετικοί αριθμοί αριθμοί.

2. Είναι $2\cdot 1^5\cdot 4\cdot \beta^3 = 27$ ή $8\beta^3 = 27$ ή $\beta^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$, άρα $\beta = \frac{3}{2}$.

3. Πρέπει $3-2\nu \geq 0$ ή $3 \geq 2\nu$ ή $\nu \leq \frac{3}{2}$ (1) και $3\nu - 2 \geq 0$ ή $3\nu \geq 2$ ή $\nu \geq \frac{2}{3}$ (2)
Ο φυσικός αριθμός που ικανοποιεί τις (1) και (2) είναι ο ν = 1

4. $3\alpha^3\beta\gamma,\ 3\alpha^2\beta^2\gamma,\ 3\alpha^2\beta\gamma^2,\ 3\alpha\beta^3\gamma,\ 3\alpha\beta\gamma^3$

5. $\frac{A}{B} = \frac{2x^5y^8}{4x^\nu y^\lambda} = \frac{1}{2}x^{5-\nu}y^{8-\lambda}$
Για να είναι το $\frac{A}{B}$ μονώνυμο, πρέπει: $5-\nu \geq 0$ ή $\nu \leq 5$ και $8-\lambda \geq 0$ ή $\lambda \leq 8$

6. Αν x = -2, τότε $y = 3-2(-2) = 3+4 = 7$ και $z = 3(-2)-4\cdot 7+2 = -6-28+2 = -32$
$A = 3x-2y+3(z-2x) = 3(-2)-2\cdot 7+3\left[-32-2(-2)\right] = -6-14+3(-32+4) =$
$-6-14+3(-28) = -6-14-84 = -104$

7. ι) $(4xy^3\omega)\cdot(-5x^2y^4\omega^2) = -20x^3y^7\omega^3$
ιι) $\frac{7}{2}x^2\cdot\left(-2x^3y^4\right) = -7x^5y^4$
ιιι) $(-2x^2y)\cdot(-4xy\omega^2)\cdot(3xy^2\omega) = 24x^4y^4\omega^3$
ιv) $\left(-\frac{1}{2}x^3y\omega^2\right)\left(\frac{1}{3}x^2y^2\omega\right) = -\frac{1}{6}x^5y^3\omega^3$
v) $\left(-4xy^2\omega\right)\left(-\frac{3}{2}x^2y\right)\left(-5x^2y^3\omega\right) = -30x^5y^6\omega^2$
vι) $(-2x^2y)^3\cdot(-5x)\cdot(3xy^3)^2 = \left(-8x^6y^3\right)\left(-5x\right)\left(9x^2y^6\right) = 360x^9y^9$
vιι) $\left(-2xy^3\omega^2\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}xy^2\right)^3 = \left(4x^2y^6\omega^4\right)\cdot\left(\frac{1}{8}x^3y^6\right) = \frac{1}{2}x^5y^{12}\omega^4$
vιιι) $(3xy^2)^3\cdot(-2x^2y)\cdot(-3xy\omega)^2 = \left(27x^3y^6\right)\left(-2x^2y\right)\left(9x^2y^2\omega^2\right) = -486x^7y^9\omega^2$

8. ι) $\left(-20x^3y\right):\left(-4x^2\right)=5xy$

ιι) $\left(-36x^4y^3\right):\left(9x^4y^2\right)=-4y$

ιιι) $(-14x^5y^3\omega^2):(2x^4y^3\omega)=-7x\omega$

ιv) $(-3x^2y^3\omega)^3:(-9x^4y^5\omega^2)=\left(-27x^6y^9\omega^3\right):\left(-9x^4y^5\omega^2\right)=3x^2y^4\omega$

v) $\left[(-xy^2\omega)^3\cdot(xy\omega)\right]:(x^2y^2\omega)=\left[\left(-x^3y^6\omega^3\right)\left(xy\omega\right)\right]:\left(x^2y^2\omega\right)=\left(-x^4y^7\omega^4\right):\left(x^2y^2\omega\right)=-x^2y^5\omega^3$

vι) $\left[(-x^2y\omega)^3\cdot(xy^2\omega)\right]:(x^3y^4\omega)=\left[\left(-x^6y^3\omega^3\right)\left(xy^2\omega\right)\right]:\left(x^3y^4\omega\right)=\left(-x^7y^5\omega^4\right):\left(x^3y^4\omega\right)=-x^4y\omega^3$

9. ι) $\left(4\alpha\beta+2\alpha-7\right)-\alpha\beta+8\alpha-12-\left(-3\alpha\beta+7\alpha-21\right)=4\alpha\beta+2\alpha-7-\alpha\beta+8\alpha-12+3\alpha\beta-7\alpha+21=$
$6\alpha\beta+3\alpha+2$

ιι) $\alpha^2-\left(\beta^2-\alpha\beta\right)+\left[2\beta^2+3\alpha\beta-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]-\left(-3\beta^2+4\alpha\beta\right)=$
$\cancel{\alpha^2}-\beta^2+\alpha\beta+2\beta^2+3\alpha\beta-\cancel{\alpha^2}-\beta^2+3\beta^2-4\alpha\beta=3\beta^2$

ιιι) $4x^2-\left[(7x^3-2x)+9x^2-(6x^2+5)-(-9x^3+4x-3)\right]=4x^2-\left(7x^3-2x+9x^2-6x^2-5+9x^3-4x+3\right)=$
$4x^2-7x^3+2x-9x^2+6x^2+5-9x^3+4x-3=-16x^3+x^2+6x+2$

ιv) $\left(2\alpha-1\right)-\left[-3\alpha-\left(\alpha^2-4\right)\right]-\left\{\alpha^2-\left[5\alpha+2-\left(\alpha^2-3\right)\right]\right\}=$
$2\alpha-1-\left(-3\alpha-\alpha^2+4\right)-\left[\alpha^2-\left(5\alpha+2-\alpha^2+3\right)\right]=2\alpha-1+3\alpha+\alpha^2-4-\left(\alpha^2-5\alpha-2+\alpha^2-3\right)=$
$5\alpha-5+\alpha^2-\alpha^2+5\alpha+2-\alpha^2+3=-\alpha^2+10\alpha$

v) $4\alpha^2-\left\{\alpha^2-\left[2\alpha-\left(1-\alpha^3\right)\right]+7\alpha\right\}-\left\{4\alpha^3+\left[\alpha+\left(\alpha^2-1\right)-5\alpha^2\right]-2\right\}-7=$
$4\alpha^2-\left[\alpha^2-\left(2\alpha-1+\alpha^3\right)+7\alpha\right]-\left[4\alpha^3+\left(\alpha+\alpha^2-1-5\alpha^2\right)-2\right]-7=$
$4\alpha^2-\left(\alpha^2-2\alpha+1-\alpha^3+7\alpha\right)-\left(4\alpha^3+\alpha+\alpha^2-1-5\alpha^2-2\right)-7=$
$4\alpha^2-\alpha^2+2\alpha-1+\alpha^3-7\alpha-4\alpha^3-\alpha-\alpha^2+1+5\alpha^2+2-7=-3\alpha^3+7\alpha^2-6\alpha-3$

10. ι) $(2x+3y)-(-x-2y+1)+(3y-2)=2x+3y+x+2y-1+3y-2=3x+8y-3$

ιι) $(\alpha^2x^2+3\alpha x^3)+(2x^3-2\alpha^3+\alpha^3x)-(-\alpha^2x^2+\alpha^3)=\alpha^2x^2+3\alpha x^3+2x^3-2\alpha^3+\alpha^3x+\alpha^2x^2-\alpha^3=$
$2x^3+3\alpha x^3+\alpha^3x+2\alpha^2x^2-3\alpha^3$

ιιι) $-3\alpha\beta+\left(2\beta^2-\alpha^2\right)-\left[\alpha\beta-\left(\alpha^2+\beta^2\right)+3\alpha^2\right]-\left(2\beta^2-\alpha^2\right)=$
$-3\alpha\beta+2\beta^2-\alpha^2-\left(\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2+3\alpha^2\right)-2\beta^2+\alpha^2=$
$-3\alpha\beta+\cancel{2\beta^2}-\cancel{\alpha^2}-\alpha\beta+\cancel{\alpha^2}+\beta^2-3\alpha^2-\cancel{2\beta^2}+\alpha^2=\beta^2-2\alpha^2-4\alpha\beta$

ιv) $\alpha^2-2\alpha\beta-\left\{2\alpha^2-\left[3\beta^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)-3\alpha^2\right]-\alpha\beta\right\}=\alpha^2-2\alpha\beta-\left[2\alpha^2-\left(3\beta^2-\alpha^2-\beta^2-3\alpha^2\right)-\alpha\beta\right]=$
$\alpha^2-2\alpha\beta-\left(2\alpha^2-3\beta^2+\alpha^2+\beta^2+3\alpha^2-\alpha\beta\right)=\cancel{\alpha^2}-2\alpha\beta-2\alpha^2+3\beta^2-\cancel{\alpha^2}-\beta^2-3\alpha^2+\alpha\beta=$

$-5\alpha^2+2\beta^2-\alpha\beta$

v) $(2x-3)-[-2x-(x^2-2)]-\{x^2-[3x+4-(x^2-1)]\}=2x-3-\left(-2x-x^2+2\right)-\left[x^2-\left(3x+4-x^2+1\right)\right]=$

$2x-3+2x+x^2-2-\left(x^2-3x-4+x^2-1\right)=4x-5+x^2-x^2+3x+4-x^2+1=-x^2+7x$

vi) $3x^2-\left\{x^2-[x-(1-x^3)]+2x\right\}-\left\{2x^3+[x+(x^2-3)-3x^2]-1\right\}-4=$

$3x^2-\left[x^2-\left(x-1+x^3\right)+2x\right]-\left[2x^3+\left(x+x^2-3-3x^2\right)-1\right]-4=$

$3x^2-\left(x^2-x+1-x^3+2x\right)-\left(2x^3+x+x^2-3-3x^2-1\right)-4=$

$3x^2-x^2+\cancel{x}-\cancel{1}+x^3-2x-2x^3-\cancel{x}-x^2+3+3x^2+\cancel{1}-4=-x^3+4x^2-2x-1$

11. i) $-A+B+\Gamma=-\left(x^2-2xy+5y^2\right)+\left(-2x^2+3xy-4y^2\right)+\left(6x^2-2xy+y^2\right)=$

$-x^2+\cancel{2xy}-5y^2-2x^2+3xy-4y^2+6x^2-\cancel{2xy}+y^2=3x^2-8y^2+3xy$

ii) $A+B-\Gamma=\left(x^2-2xy+5y^2\right)+\left(-2x^2+3xy-4y^2\right)-\left(6x^2-2xy+y^2\right)=$

$x^2-\cancel{2xy}+5y^2-2x^2+3xy-4y^2-6x^2+\cancel{2xy}-y^2=-7x^2+3xy$

12. i) $A+B=x^3-4x^2+3x-1+2x^3-5x^2-2x+3=3x^3-9x^2+x+2$

ii) $A+B+\Gamma=x^3-4x^2+3x-1+2x^3-5x^2-2x+3+4x^3+x^2-x-2=7x^3-8x^2$

iii) $A-B=x^3-4x^2+3x-1-2x^3+5x^2+2x-3=-x^3+x^2+5x-4$

iv) $A-B+\Gamma=x^3-4x^2+3x-1-2x^3+5x^2+2x-3+4x^3+x^2-x-2=3x^3+2x^2+4x-6$

v) $\Gamma-A-B=4x^3+x^2-x-2-\left(x^3-4x^2+3x-1\right)-\left(2x^3-5x^2-2x+3\right)=$

$4x^3+x^2-x-2-x^3+4x^2-3x+1-2x^3+5x^2+2x-3=x^3+10x^2-2x-4$