31η Άσκηση

Γενική στις παραγώγους

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+3f(x)+1=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική της παράσταση δέχεται πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε: $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2+6x}{f(x)+2x-4}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

γ) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=1$.

Έστω ότι η f είναι συνεχής.

δ) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ε) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Να δείξετε ότι η f δεν μπορεί να έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

ζ) Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

η) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$.

θ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ και να δείξετε ότι είναι παράλληλη στην ασύμπτωτη της στο $+\infty$.

ι) Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο με τετμημένη $x_1\in(0,1)$,παράλληλη στην ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x+1821$.

κ) Να λύσετε την εξίσωση $f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)=x^3-1$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Έστω ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=\lambda x+\beta$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta$.

Για κάθε $x>0$ είναι

$f^3(x)+3f(x)+1=x^3 \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x^3}+3\frac{f(x)}{x^3}+\frac{1}{x^3}=\frac{x^3}{x^3}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-1=0$. Άρα και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-1\right]=0\Leftrightarrow\lambda^3-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$$

$f^3(x)+3f(x)+1=x^3\Leftrightarrow f^3(x)-x^3=-3f(x)-1\Leftrightarrow\left(f(x)-x\right)\left(f^2(x)+xf(x)+x^2\right)=-3f(x)-1$ (1)

Επειδή το τριώνυμο $\omega^2+x\omega+x^2$ ως προς $\omega=f(x)$ έχει $\Delta=-3x^2<0$, είναι $f^2(x)+xf(x)+x^2>0$

για κάθε $x>0$, άρα $f(x)-x=\frac{-3f(x)-1}{f^2(x)+xf(x)+x^2}\Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3f(x)-1}{f^2(x)+xf(x)+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}+1}=\frac{0-0}{1+1+1}=0$$

, άρα $\beta=0$, οπότε

η ευθεία ε: $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2+5x}{f(x)+2x-4}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(f(x)-x+5\right)}{\cancel{x}\left(\frac{f(x)}{x}+2-\frac{4}{x}\right)}=\frac{0+6}{0+2-0}=3$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=1\cdot1=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\underset{u\to0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

γ) Για $x=1$ είναι $f^3(1)+3f(1)+1=1\Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+3\right)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f^2(1)=-3$ αδύνατο

$f^3(x)+3f(x)+1=x^3\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=x^3-1\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3-1}{f^2(x)+1}$.

Είναι $\left|f(x)\right|=\left|\frac{x^3-1}{f^2(x)+1}\right|=\frac{\left|x^3-1\right|}{f^2(x)+1}$

Είναι $1+f^2(x)\ge1\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)+1}\le1\overset{x\ne1}{\Leftrightarrow}\frac{\left|x^3-1\right|}{f^2(x)+1}\le\left|x^3-1\right|$ άρα $\left|f(x)\right|\le\left|x^3-1\right|\Leftrightarrow-\left|x^3-1\right|\le f(x)\le\left|x^3-1\right|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to1}\left|x^3-1\right|=\lim\limits_{x\to1}\left(-\left|x^3-1\right|\right)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x=1$.

δ) Είναι $f^3(x)+3f(x)=x^3-1(1)$ και για $x=x_0$: $f^3(x_0)+3f(x_0)=x_0^3-1\,(2)$.

Από $(1)-(2)\Rightarrow f^3(x)-f^3(x_0)+3f(x)-3f(x_0)=x^3-x_0^3\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right)+3\left(f(x)-f(x_0)\right)=\left(x-x_0\right)\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\right)=(x-x_0)\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)$ (3)

Το τριώνυμο $\omega^2+\omega f(x_0)+f^2(x_0)+3$ έχει $\Delta=f^2(x_0)-4f^2(x_0)-12=-3f^2(x_0)-12<0$ άρα $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3>0$ για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$, οπότε για $x\neq x_0$ η (3) γίνεται:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2+xx_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+xx_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3}\Rightarrow f'(x_0)=\frac{3x_0^2}{3f^2(x_0)+3}\ .$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{3x^2}{3f^2(x)+3}=\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}$.

ε) Είναι $f'(x)=\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}>0$ για κάθε $x\neq 0$. Η f είναι συνεχής, οπότε είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Έστω ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=\beta$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\beta\in\mathbb{R}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^3(x)+3f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-1\right)\Leftrightarrow\beta^3+3\beta=-\infty$ που είναι αδύνατο.

ζ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)\notin\mathbb{R}$ θα είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ τότε $f(\mathbb{R})=\left(+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$ που είναι αδύνατο, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

η) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}{\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

θ) Είναι $f'(1)=\dfrac{1^2}{f^2(1)+1}=1$, οπότε η εφαπτομένη στο $x=1$ είναι η ευθεία ε:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$ Επειδή $\lambda_\varepsilon=1=\lambda_{\alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau\eta\varsigma}$, η ε είναι παράλληλη στην $y=x$.

ι) Για να υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο με τετμημένη $x_1\in(0,1)$,παράλληλη στην ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x+1821$, αρκεί να υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=\dfrac{1}{2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x,\ x\in[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2}$.

Είναι $g'(0)=f'(0)-\dfrac{1}{2}=0-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}<0$ και $g'(1)=f'(1)-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$.

Επειδή $g'(0)<0$ είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}<0$, οπότε υπάρχει $x_2\in(0,1)$ με x_2 πολύ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε $\dfrac{g(x_2)-g(0)}{x_2}<0\overset{x_2>0}{\Rightarrow}g(x_2)-g(0)<0\Leftrightarrow g(x_2)<g(0)$ (1)

Επειδή $g'(1)>0$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}>0$, οπότε υπάρχει $x_3\in(0,1)$ με x_3 πολύ κοντά στο 1 τέτοιο, ώστε $\dfrac{g(x_3)-g(1)}{x_3-1}>0\overset{x_3<1}{\Rightarrow} g(x_3)-g(1)<0\Leftrightarrow g(x_3)<g(1)$ (2).

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, οπότε θα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Από τις (1), (2) διαπιστώνουμε ότι η g δεν παρουσιάζει ελάχιστο στα 0 και 1, οπότε υπάρχει $x_1\in(0,1)$ στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο. Τότε όμως από το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $g'(x_1)=0\Leftrightarrow f'(x_1)-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow f'(x_1)=\dfrac{1}{2}$

2ος τρόπος

Επειδή $f'(x)=\dfrac{3x^2}{3f^2(x)+3}=\dfrac{x^2}{f^2(x)+1}$, η f' είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $f'(0)=0\neq f'(1)=1$, το $\dfrac{1}{2}$ βρίσκεται ανάμεσα στο $f'(0)$ και στο $f'(1)$ άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=\dfrac{1}{2}$.

κ) Αν στη σχέση $f^3(x)+3f(x)=x^3-1$ αντικαταστήσουμε όπου x το ημx προκύπτει:
$f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)=\eta\mu^3 x-1$, τότε η εξίσωση $f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)=x^3-1$ γίνεται:
$\eta\mu^3 x-1=x^3-1\Leftrightarrow \eta\mu^3 x=x^3\Leftrightarrow \eta\mu x=x\Leftrightarrow x=0$