ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

1. Εστω Α,Β δύο μη κενά ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-6P(A)x^2+3P(A)x-1$ και $g(x)=x^2+2P(B)x-1$, $x\in\mathbb{R}$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δέχονται στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y=x+5$.

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A), P(B)$.

Αν επιπλέον η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β είναι $\frac{3}{4}$, τότε:

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

$P(A\cap B)$, $P(A-B)$, $P(A'\cap B')$.

γ) Υλικό σημείο $M(x,y)$ με $x>0$ κινείται επι της C_g. Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο τομής της C_g με τον άξονα y΄y, η τετμημένη και η τεταγμένη του Μ μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό.

2. Εστω $\lambda,\ 2\lambda-1,\ 2\lambda,\ 2\lambda+2,\ 3\lambda-1$, $\lambda>0$ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ.

α) Να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία ο συντελεστής μεταβολής των τιμών γίνεται ελάχιστος. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία το δείγμα των τιμών είναι ομοιογενές;

β) Εστω ότι η τιμή του λ καθορίζεται από τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A=\{\lambda\in\Omega\ /\ \bar{x}>6\}$ και $B=\{\lambda\in\Omega\ /\ s>\sqrt{2}\}$, όπου $\bar{x}$ και s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του προηγούμενου δείγματος τιμών.

Να βρείτε τις παρακάτω πιθανότητες:

i. $P(A)$ **ii.** $P(B)$ **iii.** $P(B-A)$ **iv.** $P(B\cup A')$

3. Εστω πείραμα τύχης του οποίου ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Έστω $M(k,f(k))$, $k\in\Omega$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3+x^2$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει κλίση μεγαλύτερη του 5.

Β: Η εφαπτομένη της C_f στο Μ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

Γ: Η εφαπτομένη της C_f στο Μ σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

Δ: Ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της C_f στο Μ είναι θετικός.

Να βρείτε τις πιθανότητες:

α) $P(A)$ **β)** $P(B)$ **γ)** $P(\Gamma)$ **δ)** $P(\Delta)$

ε) $P(A\cap\Delta)$ **στ)** $P(B\cap\Gamma)$ **ζ)** $P(B\cap\Delta')$

4. Εστω $x_1,x_2,...,x_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ με $\sum_{i=1}^{\nu}x_i=25\nu$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-25)^2$.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

β) Αν $\sum_{i=1}^{\nu}f(x_i)=16\nu$, να βρείτε την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής του προηγούμενου δείγματος τιμών.

γ) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής της f στα σημεία της C_f με τετμημένες τα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι ίση με μηδέν.

δ) Εστω ότι το πλήθος ν των παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι πολλαπλάσιο του 6. Αν στο $\frac{1}{3}$ των παρατηρήσεων προσθέσουμε 12, στο $\frac{1}{2}$ των παρατηρήσεων προσθέσουμε 6 και στις υπόλοιπες αφαιρέσουμε το 18, να βρείτε τη μέση τιμή των νέων τιμών.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-5}{x+1}$, $x \neq -1$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(7,6)$.

β) Εστω $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2), ..., M_{10}(x_{10},y_{10})$ 10 τυχαία σημεία της προηγούμενης εφαπτομένης. Αν οι τετμημένες τους έχουν μέση τιμή 9 και τυπική απόκλιση 2, να βρείτε:

i. τη μέση τιμή και τη τυπική απόκλιση των τεταγμένων των σημείων αυτών.

ii. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τεταγμένων είναι ομοιογενές και αν δεν είναι να βρείτε θετικό αριθμό που πρέπει να προστεθεί στις τεταγμένες ώστε το δείγμα τους να είναι οριακά ομοιογενές.

γ) Υλικό σημείο $K(x,f(x))$, $x>-1$ κινείται επί της γραφικής παράστασης της f και η τετμημένη του σε σχέση με το χρόνο δίνεται από το τύπο $x(t)=t^2-6t+10$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

6. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ ενός πειράματος τύχης με πιθανότητες $P(\omega_1)=\rho_1$, $P(\omega_2)=\rho_2$ και $P(\omega_3)=\rho_3$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $f(x)=\rho_1x^2+\rho_2x+\rho_3$ της οποίας ο ρυθμός μεταβολής στο σημείο $\left(0,\frac{3}{10}\right)$ είναι $\frac{1}{5}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{3}{10}$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$ με τους άξονες.

γ) Ενα υλικό σημείο $M(x,y)$ κινείται επί της προηγούμενης εφαπτομένης. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$, η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ορθογωνίου που σχηματίζουν οι προβολές του Μ στους άξονες.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_2,\omega_3\}$ και $B=\{\omega_1,\omega_3\}$

δ) Να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A)$ **ii.** $P(B)$ **ii.** $P(A'\cap B)$ **iv.** $P[(A'\cap B)\cup(B'\cap A)]$

7. Εστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X και η συνάρτηση $f(x)=e^{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-x)^2}$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $A(10,e^\nu)$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}=10$ και $s=1$.

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f διαρκώς αυξάνεται.

γ) Εστω ότι η κατανομή των $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι περίπου κανονική. Επιλέγουμε στη τύχη μία από τις $x_1, x_2, ..., x_\nu$. Αν όλες οι τιμές έχουν την ίδια πιθανότητα να επιλεγούν, να βρείτε τη πιθανότητα να επιλεγεί αριθμός του διαστήματος $(11,13)$.

δ) Αυξάνουμε μία από τις τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$ κατά 2 και η μέση τιμή του νέου δείγματος είναι $10,01$.

i. Να αποδείξετε ότι $\nu = 200$.

ii. Πόσες τιμές περιέχονται στο διάστημα $(8,9)$;

8. Εστω Α,Β ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και Α΄ το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-1)P(A)P(A')$, όπου $P(A) = \frac{x-1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο όταν $P(A) = \frac{2}{3}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $P^2(A) \le \frac{1}{4}P(B)\left[3P(A)+P(B)\right]$.

δ) Αν $P(A) - 2P(A') + 3P(B) \ge 2P(A\cup B) + 2P(A\cap B)$, να αποδείξετε ότι $A = B$.

ε) Αν η C_f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{3}x$, να αποδείξετε ότι:

i. $P(A) = \frac{1}{3}$ **ii.** $P(A\cup B) \ge \frac{1}{3}$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda^2\frac{x^3}{3} - 2\lambda x^2$, $\lambda, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Θεωρούμε δειγματικό χώρο $\Omega = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ που αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα και $\lambda \in \Omega$.Έστω τα ενδεχόμενα

Α: η ευθεία ε είναι κάθετη στην ευθεία η: $x = 5$.

Β: η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία στην ευθεία ζ: $y = -4x + 3$.

Γ: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lambda^2$

β) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$.

γ) Να βρείτε τη πιθανότητα των ενδεχομένων:

Δ: πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα Α,Β,Γ.

Ε: δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β,Γ.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$, $x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο $M(\omega, f(\omega))$, $\omega \in \Omega$ της C_f. Να βρείτε τη πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: Το σημείο βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Β: Ο άξονας x΄x εφάπτεται της C_f στο M.

Γ: Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και δεν ταυτίζεται με αυτόν.

11. Μια ομάδα μαθητών μετρήθηκε ως προς το ύψος και τα αποτελέσματα καταγράφηκαν στον διπλανό πίνακα. Διαλέγουμε τυχαία έναν από τους μαθητές της ομάδας.

α) Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε να έχει ύψος:

Α: από 165 έως 170 cm;

Β: το πολύ 175 cm;

Γ: τουλάχιστον 175 cm;

Ύψος (cm) $[...,...)$	Αριθμός παιδιών ν_i
160,165	6
165,170	16
170,175	20
175,180	24
180,185	9

β) Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι συμμετρικά κατανεμημένος σε κάθε κλάση. Να βρείτε τη πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε να έχει ύψος από 173 έως 180 cm.

γ) Από τους μαθητές που έχουν ύψος μικρότερο του 180 επιλέγουμε στη τύχη έναν. Να βρείτε τη πιθανότητα το ύψος του να είναι από 165 έως 170 cm.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{8\sqrt{x+5}-24}{x^2-16}$ και πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω.

Εστω Α,Β ενδεχόμενα του Ω με $P(A\cup B)=\dfrac{15}{16}$, $P(A)=2k^2-k+1, k\in\mathbb{R}$ και $P(B)=\lim\limits_{x\to 4}f(x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α,Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Να βρείτε τη τιμή του k για την οποία η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα Α,Β είναι ελάχιστη.

δ) Εστω $k=\dfrac{1}{4}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

i. $P(A-B)$ **ii.** $P(A\cup B')$ **iii.** $P(A'\cup B')$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x-2, & 1\le x\le 3 \\ \dfrac{5}{2}x-\dfrac{7}{2}, & 3\le x\le 5 \\ 3x-6, & 5\le x\le 7 \\ \dfrac{5}{2}x-\dfrac{5}{2}, & 7\le x\le 9 \end{cases}$. Αν η γραφική παράσταση της f είναι το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων μιας κατανομής με 4 κλάσεις ίσου πλάτους, τότε:

α) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

β) Να κατασκευάσετε πίνακα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των τιμών της κατανομής.

δ) Αυξάνουμε όλες τις τιμές κατά 10% ποια είναι η μεταβολή του συντελεστή μεταβλητότητας;

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-sx+\overline{x}$, όπου s και $\overline{x}>0$ η τυπική απόκλιση και η μέση τιμή ν παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Χ. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ και ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι 20%, να βρείτε:

α) τα $\overline{x}$ και s.

β) Αν επιπλέον η κατανομή είναι περίπου κανονική, να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(8,14)$.

γ) Αν όλες οι τιμές της μεταβλητής Χ αυξηθούν κατά 10%, να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση.

δ) Σημείο Μ κινείται επί της C_f. Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

15. Εστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$.

α) Να αποδείξετε ότι: $2P(B)\left[2P(B)-P(A)\right]\ge P^2(B)+P^2(A)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3-5x^2+2x+1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Αν $P(A),P(B)\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$, να αποδείξετε ότι

$4P^3(A)-5P^2(A)+2P(A)\geq 4P^3(B)-5P^2(B)+2P(B)$

γ) Εστω ότι τα $P(A),P(B)$ είναι οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

i) Να αποδείξετε ότι: $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$.

ii) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A\cap B)$ και $P(B\cap A')$.

δ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της C_f στη θέση του τοπικού μεγίστου είναι αρνητικός.

16. Εστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ και $P(B)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$. Δίνεται επίσης η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-P(A\cap B), & x\neq\frac{1}{2} \\ \frac{1}{16}, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A)=2P(B)$.

β) Να βρείτε τη πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
Κ: πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α και Β.
Λ: πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα Α και Β.
Μ: πραγματοποιείται μόνο το Α.
Ν: δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β.

γ) Υλικό σημείο κινείται επί της C_f. Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του, αν αυτή είναι μεγαλύτερη από το $\frac{1}{2}$.

17. Εστω 1 , 3 , 4 , 5 , 7, x με $x>0$, οι τιμές μιας μεταβλητής Χ.

α) Να αποδείξετε ότι για τη διασπορά των προηγούμενων τιμών, ισχύει:
$s^2=\frac{1}{36}(5x^2-40x+200)$.

β) Να βρείτε τη τιμή του x για την οποία η διασπορά γίνεται ελάχιστη.

γ) Να βρείτε τη τιμή του x για την οποία ο συντελεστής μεταβολής των προηγούμενων τιμών γίνεται ελάχιστος. Υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες το δείγμα των τιμών είναι ομοιογενές;

δ) Εστω ότι το σύνολο $\Omega=\{1,2,3,...,10\}$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα και $x\in\Omega$.Να βρείτε τη πιθανότητα η τυπική απόκλιση των τιμών να είναι μικρότερη του $\frac{\sqrt{165}}{6}$.

18. Εστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$ και A',B' τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα. Δίνεται ακόμη η συνάρτηση $f(x)=x(1-x)^3$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $P(A)P^3(A')\leq\frac{27}{256}$.

γ) Αν $P(B) \leq \frac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι $P(A)P^3(A') \leq P(B)P^3(B')$.

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $K(2, f(2))$.

ε) Υλικό σημείο κινείται επί της προηγούμενης εφαπτομένης και η τετμημένη του $x \in \left[0, \frac{12}{7}\right]$ αυξάνεται με ρυθμό 1cm/sec. Να βρείτε

i. το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

ii. το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου που σχηματίζει το σημείο με τις προβολές του στους άξονες και την αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $M(1, 5)$.

19. Εστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X με μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση s. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - x)^2$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι η καμπύλη συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής X.

α) Να αποδείξετε ότι οι παρατηρήσεις με τιμή $\overline{x}$ έχουν τη μικρότερη συχνότητα την οποία και να βρείτε.

β) Αν $\overline{x} = 5\nu$ και $f(\overline{x}) = \frac{\nu^5}{10000}$, να βρείτε

i. το μέγιστο πλήθος των τιμών x_i που απαιτείται, ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

ii. τη μέση τιμή των παρατηρήσεων $x_1^2, x_2^2, ..., x_\nu^2$ στη περίπτωση αυτή.

20. Εστω $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εστω τώρα ότι οι αριθμοί $2\kappa - 3$, 4κ, $3\kappa + 3$ έχουν μέση τιμή $\overline{x}$ διάμεσο δ και τυπική απόκλιση s. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{\kappa \in \Omega \,/\, \overline{x} < 18\}$, $B = \left\{\kappa \in \Omega \,/\, s^2 < \frac{26}{3}\kappa\right\}$ και $\Gamma = \{\kappa \in \Omega \,/\, \delta = 4\kappa\}$.

α) Να βρείτε τη πιθανότητα των ενδεχομένων Α,Β,Γ.

β) Να βρείτε τη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α και όχι το Β.

γ) Να βρείτε τη πιθανότητα να μην πραγματοποιηθούν τα Α και Γ.

δ) Να βρείτε τη πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α,Β,Γ.

21. Εστω $\Omega = \{2, 4, 6, ..., 2\kappa\}$, όπου κ θετικός ακέραιος, ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Έστω τώρα ότι τα απλά ενδεχόμενα του Ω είναι τιμές μιας μεταβλητής Χ με μέση τιμή $\overline{x} = 11$.

α) Να βρείτε τα στοιχεία του Ω.

β) Τη διάμεσο δ και το εύρος R των τιμών.

γ) Να αποδείξετε ότι $s^2 = 3\overline{x}$, όπου s^2 η διακύμανση των τιμών της μεταβλητής X.

δ) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα: $A = \{\alpha \in \Omega \,/\, \text{το } \alpha \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 4\}$ και

$B = \left\{\alpha \in \Omega \,/\, \frac{(\alpha^2 - 18\alpha + 80)(\alpha^2 - 16)}{\alpha + 4} = 0\right\}$. Να βρείτε τη πιθανότητα των ενδεχομένων:

i. $A \cup B$, **ii.** $A \cap B$, **iii.** $A - B$

22. Εστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\lambda - 1}}{\lambda} + \ln(x^2 + 1)$, $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τη τιμή του λ για την οποία το ελάχιστο της f παίρνει τη μικρότερη τιμή του.

Εστω $\lambda = 1$.

γ) Αν $f(P(B)) = P(A)$, να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B είναι αδύνατο ενδεχόμενο.

δ) Εστω $P(A) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(0)-f'(x)}{(x-1)^2}$, $P(B) = f'(3)$ και $P(A\cup B) = \dfrac{4}{5}$.

i. Να εξετάσετε αν τα A,B είναι ασυμβίβαστα.

ii. Να υπολογίσετε τη πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

K: Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.

Λ: Μόνο ένα από τα A και B πραγματοποιείται.

23. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Έστω ότι οι πιθανότητες $P(\omega_i)$, $i = 1,2,3,4,5$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση $\dfrac{1}{100}$.

α) Να εξετάσετε αν το δείγμα των $P(\omega_i)$ είναι ομοιογενές.

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\left(P(\omega_1)-\frac{1}{5}\right)^2+\left(P(\omega_2)-\frac{1}{5}\right)^2+\left(P(\omega_3)-\frac{1}{5}\right)^2+\left(P(\omega_4)-\frac{1}{5}\right)^2+\left(P(\omega_5)-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{20}\bar{x}$$

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων $y_i = P^2(\omega_i) + 2P(\omega_i)$, $i = 1,2,3,4,5$.

24. Δίνεται ο διπλανός πίνακας συχνοτήτων του οποίου οι τιμές έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$.

x_i	ν_i
2	ν_1
3	2
4	ν_3
5	4
Σύνολο	10

α) Να βρείτε τις συχνότητες ν_1, ν_3.

β) Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος και να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές.

γ) Αν από όλες τις τιμές αφαιρέσουμε τη μέση τιμή και διαιρέσουμε με την τυπική τους απόκλιση, να αποδείξετε ότι οι νέες τιμές έχουν μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.

δ) Εστω νέες τιμές $y_i = \alpha x_i + \beta$, $i = 1,2,3,4$ με μέση τιμή $\bar{y} = 12$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $A(2, f(2))$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τιμών y_i.

25. Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι απουσίες που έκαναν 40 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2-2)^4$.

Εστω ότι το ν_1 ισούται με τη κλίση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = -1$, $\nu_2 = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x}{x^2-5x+6}$ και το ν_3 είναι το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x) = 2x^2 - 8x + 18$.

Κλάσεις $[\ldots-\ldots)$	Συχνότητα ν_i
$0-25$	ν_1
$25-50$	ν_2
$50-75$	ν_3
$75-100$	ν_4

α) Να βρείτε τις συχνότητες ν_i.

β) Να κατασκευάσετε πίνακα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των απουσιών.

δ) Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έκαναν από 60 έως 75 απουσίες.

ε) Υλικό σημείο κινείται επί της C_g και η τετμημένη του μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό.

Να βρείτε τη θέση του τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

στ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της C_f στο διάστημα $(2,+\infty)$ είναι θετικός.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ και οι τιμές $x_1<x_2<x_3<x_4$ με αντίστοιχες συχνότητες ν_1,ν_2,ν_3,ν_4, μέση τιμή $\bar{x}$, οι οποίες έχουν τυπική απόκλιση 2 και για τις οποίες ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\nu_i}{f'(x_i-\bar{x})}\right)=200.$$

α) Να βρείτε το πλήθος ν του δείγματος.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της, σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με σταθερό εμβαδό.

γ) Αν $\bar{x}=20$, να βρείτε τη μέση τιμή των τιμών x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2.

δ) Εστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{-\nu_i}{f\left(\dfrac{x-\bar{x}}{s}\right)}$.

Να αποδείξετε ότι: **i.** $\sum_{i=1}^{4}g(x_i)=0$ **ii.** $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\nu_i}g^2(x_i)=\nu$

27. Εστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες P(A), P(B) αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει ότι: $P(A)=\frac{P(B)}{2}$. Έστω ότι οι παρατηρήσεις:

$$P(\varnothing),\ P(A\cap B),\ P(B),\ P(A),\ P(B),\ P(A\cup B),\ P(\varnothing),\ P(B),\ P(A\cap B)$$

έχουν διάμεσο $\delta=\frac{1}{3}$ και $P(A-B)=\frac{1}{6}$.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A),\ P(B),\ P(A\cup B),\ P(A\cap B)$.

β) Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των προηγούμενων παρατηρήσεων.

γ) Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του θετικού ακεραίου c που πρέπει να προστεθεί σε όλες τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το νέο δείγμα τιμών που θα προκύψει να είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι $\sqrt{30}\cong 5{,}47$

28. Εστω $x_1,x_2,...,x_\nu$ οι βαθμοί στο διαγώνισμα 1^{ου} τετραμήνου στο μάθημα «Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής» των ν μαθητών της Γ΄ Λυκείου ενός σχολείου.

Α) Αν το δείγμα των βαθμών έχει συντελεστή μεταβολής 12,4% , αν οι ίδιοι μαθητές στο αντίστοιχο διαγώνισμα του 2^{ου} τετραμήνου είχαν βαθμολογία κατά 3 μονάδες μεγαλύτερη και το δείγμα των βαθμών τους ήταν οριακά ομοιογενές, να βρείτε:

i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s των βαθμών των μαθητών στο 1^{ο} τετράμηνο.

ii. τη μέση τιμή των παρατηρήσεων $x_1^2,x_2^2,...x_\nu^2$.

iii. τον μεγαλύτερο βαθμό στο διαγώνισμα του 1^{ου} τετράμηνο, αν γνωρίζετε ότι ο μικρότερος βαθμός ήταν 8 και η κατανομή των βαθμών είναι περίπου κανονική.

Β) Από τους προηγούμενους μαθητές το 70% γνωρίζει Αγγλικά, το 80% δεν γνωρίζει Γαλλικά, ενώ το 10% γνωρίζει και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή.

i. Να βρείτε τη πιθανότητα ο μαθητής να γνωρίζει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες.

ii. Ποιοι είναι περισσότεροι, οι μαθητές που γνωρίζουν μόνο Αγγλικά ή οι μαθητές που γνωρίζουν μόνο Γαλλικά και γιατί;

iii. Αν οι μαθητές που γνωρίζουν Γαλλικά είναι 8, να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές της Γ Λυκείου αυτού του σχολείου.

29. Εστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες P(A), P(B) αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει ότι: $P(A)=P(B)+\frac{1}{6}$. Έστω οι παρατηρήσεις:

$$P(A),\ P(B),\ P(A\cap B),\ P(A\cup B)$$

α) Να αποδείξετε ότι για το εύρος R των παρατηρήσεων ισχύει: $0<R\le 1$

β) Να αποδείξετε ότι $R=P(A-B)+P(A'-B')$

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-P(B)x^2+6\big(P(A)-1\big)x+P(A)$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν οι παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή $\frac{1}{4}$ και εύρος $\frac{1}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

$P(A),\ P(B),\ P(A\cap B),\ P(A\cup B),\ P(A-B),\ P(A'-B')$

30. Εστω ότι οι θετικές τιμές $x_1,x_2,...,x_\nu$ μιας μεταβλητής X, που δεν είναι όλες ίσες, έχουν μέση τιμή $\bar{x}$, τυπική απόκλιση s, συντελεστή μεταβολής CV=20% και έστω ότι το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 41.600.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3s^2}-2s}{\sqrt{x}-\sqrt{s}} & ,x\ge 0 \text{ και } x\ne s\\[2mm] \dfrac{\bar{x}}{10} & ,x=s\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}=10\sqrt{s}$.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος ν των τιμών της μεταβλητής X.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\big(\sqrt{x}-2\big)f(x)$, $x\ge 0$ και $x\ne 4$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $M\big(11,g(11)\big)$.

ii. Αν ένα υλικό σημείο κινείται επί της γραφικής παράστασης της g και τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το Μ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 13 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.Έστω 1821 σημεία της C_f με τετμημένες $x_1<x_2<...<x_{1821}<-1$ που έχουν διάμεσο -3.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τη διάμεσο των τεταγμένων τους.

γ) Εστω $y_i=-\frac{2}{f'(x_i)}$, όπου x_i, $i=1,2,...,1821$ οι τετμημένες των προηγούμενων σημείων οι οποίες έχουν μέση τιμή -4 και τυπική απόκλιση 1. Να αποδείξετε ότι:

i. $x_1^2+x_2^2+...+x_{1821}^2=30.957$ **ii.** $\bar{y}=10$

32. Δίνονται οι τιμές $x_1,x_2,...,x_\nu$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X με μέση τιμή 2 και έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+12x-5$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^{\nu} f'(x_i) = 3\nu s^2$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f.

δ) Αν η κατανομή των προηγούμενων τιμών είναι περίπου κανονική με τυπική απόκλιση 0,5, να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων αν γνωρίζετε ότι στο διάστημα $(1,2)$ βρίσκονται 950 παρατηρήσεις.

33. Εστω ότι το δείγμα των τιμών $t_1, t_2, ..., t_\nu$ μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ, είναι ομοιογενές με μέση τιμή $\bar{x} = 20$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της τυπικής απόκλισης.

Εστω $s = 2$ και $t_1^2 + t_2^2 + ... + t_\nu^2 = 40.400$.

β) Να βρείτε το πλήθος ν του δείγματος.

γ) Να αποδείξετε ότι $0 \le t_i \le 40$, $i = 1,2,...,100$.

δ) Εστω ότι η κατανομή των τιμών t_i είναι περίπου κανονική. Επιλέγουμε στη τύχη μια από τις τιμές. Να βρείτε τη πιθανότητα να είναι μεγαλύτερη από το 24.

34. Εστω $x_1, x_2, ..., x_{100}$ θετικές τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ καθώς και η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (s + \bar{x})x + \bar{x} \cdot s$. Αν η f έχει ελάχιστο το $-\frac{81}{4}$ και $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 100(1 + \bar{x}^2)$, όπου s και $\bar{x}$ η τυπική απόκλιση και η μέση τιμή αντίστοιχα των προηγούμενων τιμών, να αποδείξετε ότι:

α) $s = 1$ και $\bar{x} = 10$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1: y = x + 1821$.

γ) Αν (x_i, y_i), $i = 1,2,...,100$ είναι 100 σημεία της ε, όπου τα x_i είναι οι προηγούμενες τιμές, τότε:

i. να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων y_i των σημείων.

ii. αν $z_i = x_i^2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{z}$.

35. Εστω $\Omega = \{1,2,...,\nu\}$, ν περιττός φυσικός αριθμός, ο δειγματικός χώρος πειράματος τύχης. Τα στοιχεία του Ω έχουν διάμεσο δ και εύρος R για τα οποία ισχύει $\delta + 4 = R$.

α) Να αποδείξετε ότι $\nu = 11$.

Εστω $P(1) = P(2) = ... = P(5) = 2P(6) = 2P(7) = 2P(8) = 3P(9) = 3P(10) = 3P(11)$

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω.

γ) Αν $A = \{2,4,6,8,10\}$, $A \cap B = \{6,10\}$ και $A' \cap B = \{3,11\}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(B)$ **ii.** $P(A \cap B')$ **iii.** $P(A' \cap B')$

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Εστω $-2 < x_1 < x_2 < ... < x_{99}$ με διάμεσο 10.

Να βρείτε τη διάμεσο των τιμών:

i. $f(x_{20}), f(x_{21}), ..., f(x_{80})$ **ii.** $f'(x_{20}), f'(x_{21}), ..., f'(x_{80})$

και να αποδείξετε ότι $12f(x_{51}) < 13$

γ) Υλικό σημείο κινείται επί της γραφικής παράστασης της f και η τετμημένη του έχει ταχύτητα $2\ cm/s$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

37. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α,Β δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση $f(x)=4P^2(A)x^3-6P(A)x^2+3x-5$.

Αν η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $A(2,f(2))$ και ο ρυθμός μεταβολής της f' στο σημείο $M(P(B),f(P(B)))$ είναι ίσος με -2, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{4}$

β) $f(P(A\cap B))\le f(P(A\cup B))$

γ) $P(B)=\frac{2}{3}$

δ) $P(A\cup B)\le\frac{11}{12}$

ε) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=3x-5$.

38. Εστω 2, 2, x, 3, 5, οι τιμές μιας μεταβλητής Χ.

α) Να αποδείξετε ότι για τη διασπορά των τιμών αυτών ισχύει ότι: $s^2=\frac{4x^2-24x+66}{25}$.

β) Να βρείτε τη τιμή του x για την οποία οι προηγούμενες τιμές έχουν ελάχιστη διασπορά. Ποιός είναι ο συντελεστής μεταβολής τους σε αυτή τη περίπτωση; ($\sqrt{30}\simeq 5,48$)

γ) Εστω ότι το σύνολο $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ είναι δειγματικός χώρος πειράματος τύχης. Έστω τώρα ότι οι τιμές 2, 2λ, 3, 3λ, 5 έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και διάμεσο δ.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A=\{\lambda\in\Omega\,/\,\bar{x}=\lambda^2-2\lambda+4\}$ και $B=\{\lambda\in\Omega\,/\,\delta=3\}$. Αν $P(1)=P(2)=2P(3)=3P(4)=3P(5)$, να βρείτε τις πιθανότητες:

$P(A)$, $P(B)$, $P(B\cap A')$

39. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ ενός πειράματος τύχης, ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.. Έστω Α,Β ενδεχόμενα του Ω για τα οποία ισχύει ότι: $A-B=\{1,2\}$, $A\cap B=\{3,4\}$ και $B\cap A'=\{5\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{2}{3}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$.

β) Αν Γ ενδεχόμενο του Ω με $P(\Gamma)=P(B)$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{6}\le P(A\cap\Gamma)\le\frac{2}{3}$.

γ) Θεωρούμε τις τιμές $P(B)$, $P(B)$, $P(A)$, $P(A\cap B)$, $P(\varnothing)$, $P(\Omega)$

i. Να αποδείξετε ότι $R=\bar{x}+\delta$

ii. Το δείγμα των προηγούμενων τιμών δεν είναι ομοιογενές.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω ενδεχόμενα Α,Β δειγματικού χώρου Ω.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) με $A\subseteq B$ και $A\ne\varnothing$, να αποδείξετε ότι:

i. $e^{-P(A)}-e^{-P(B)}\le P(B)-P(A)$ **ii.** $\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(A')}\ge 4$ **iii.** $3P^2(A)\le P(B)(2P(A)+P(B))$

γ) Εστω ότι οι πιθανότητες $P(\varnothing)$, $P(\Omega)$, $P(A)$, $P(A\cap B)$, $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$ αποτελούν τις τιμές μιας μεταβλητής Χ. Αν $P(A)+P(B)=\frac{3}{2}$, $\delta=0,7$ και $\bar{x}=\frac{9}{14}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(B-A)$ **ii.** $P(A'\cap B')$ **iii.** $P(B\cup A')$

41. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α,Β δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες:

$$P(A)=\frac{1}{4},\ \ P(\varnothing),\ \ P(\Omega),\ \ P(A\cap B),\ \ P(B)=\frac{1}{2},\ \ P(A\cup B)$$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσό τους.

β) Να αποδείξετε ότι για τη διασπορά τους ισχύει: $s^2=\frac{1}{3}P^2(A\cap B)-\frac{1}{4}P(A\cap B)+\frac{137}{576}$.

γ) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ για τις οποίες η προηγούμενη διασπορά γίνεται ελάχιστη.

δ) Για τις προηγούμενες τιμές των $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

i. $P(A\cap B')$ **ii.** $P\left[(A\cap B')\cup(B\cap A')\right]$ **iii.** $P(A'\cap B')$

42. Εστω $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$,...,$A_{20}(x_{20},y_{20})$ σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=(x-1)^3+1$ των οποίων οι τετμημένες $x_1,x_2,...,x_{20}$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}=1$ και τυπική απόκλιση 1.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία $A_1, A_2,...,A_{20}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^{20} f''(x_i)=0$. **γ)** Να αποδείξετε ότι $\overline{x^2}=2$.

δ) Υλικό σημείο $M(x,y)$ κινείται επί της C_f. Να βρείτε τη θέση του τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι τριπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

43. Εστω $x_1,x_2,...,x_\nu$ οι τιμές μιας μεταβλητής X και η συνάρτηση $f(x)=10s\cdot x^4-\bar{x}\cdot x^3+\bar{x}\cdot x+4$, όπου s και $\bar{x}$ η τυπική απόκλιση και η μέση τιμή του δείγματος των τιμών x_i, $i=1,2,...,\nu$.

α) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2\bar{x}\cdot x+1821$, να αποδείξετε ότι το δείγμα των τιμών x_i είναι οριακά ομοιογενές.

β) Αν ο ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο της $A(1,14)$ είναι ίσος με 30, τότε:

i. να αποδείξετε ότι το δείγμα των τιμών x_i δεν είναι ομοιογενές.

ii. να βρείτε τον ελάχιστο θετικό αριθμό που πρέπει να προστεθεί σε όλες τις τιμές x_i, ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

iii. Αν $\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2=2600$, να αποδείξετε ότι $\nu=100$ και $\overline{x^2}=26$.

44. Εστω $x_1,x_2,...,x_\nu$ οι θετικές τιμές μιας μεταβλητής X, όπου ν άρτιος φυσικός αριθμός διαφορετικός του μηδέν. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $f(x)=\bar{x}\cdot x^3-30s\cdot x^2+\bar{x}\cdot x+3\bar{x}-2$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση του προηγούμενου δείγματος.

α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το δείγμα των τιμών x_i, $i=1,2,...,\nu$ είναι ομοιογενές.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των τιμών x_i, αν γνωρίζετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,8)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-100x+200$,

Εστω $\bar{x}=20$ και $s=3$.

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων $x_1^2+x_2^2+...+x_\nu^2$.

δ) Αν στις μισές παρατηρήσεις προσθέσουμε 2, να αποδείξετε ότι η μέση τιμή του δείγματος αυξάνεται κατά 1.

ε) Αν η κατανομή των x_i είναι περίπου κανονική και 20 τιμές είναι μεγαλύτερες από το 26, να βρείτε το πλήθος ν του δείγματος.

45. Εστω Α,Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ αντίστοιχα, και η συνάρτηση $f(x)=2\ln 2x-4x+\frac{14}{5}$ η οποία έχει μέγιστη τιμή στο $P(A)$ ίση με $P(B)$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{4}{5}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α,Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Να αποδείξετε ότι $P(A\cap B)\le \frac{1}{2}e^{2P(A\cap B)-1}$.

δ) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(\frac{3}{10},f\left(\frac{3}{10}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=8P(A\cap B)x+5$ να βρείτε τις πιθανότητες: **i.** $P(A\cap B)$ **ii.** $P(B-A)$ **iii.** $P(B\cup A')$

ε) Να αποδείξετε ότι η κλίση των εφαπτόμενων της C_f διαρκώς ελαττώνεται.

46. Εστω ότι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις πλάτους c με κεντρικές τιμές $x_1<x_2<x_3<x_4$ και αντίστοιχες σχετικές συχνότητες 0,1 , 0,2 , 0,3 και 0,4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sum_{i=1}^{4}\left[(x_i-x)^2\cdot i\right]$ της οποίας η γραφική παράσταση δέχεται στο σημείο της $A(30,1000)$ οριζόντια εφαπτομένη.

α) Να δείξετε ότι $c=10$ και να βρείτε τις κλάσεις.

β) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}=30$ και $s=2$, όπου $\bar{x}$ και s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των παρατηρήσεων.

γ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

δ) Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της σταθεράς λ που πρέπει να προστεθεί σε όλες τις τιμές ώστε το νέο δείγμα τιμών να είναι ομοιογενές.

ε) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της είναι θετικός αριθμός.