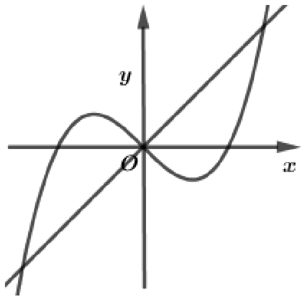
41η Άσκηση



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της περιττής πολυωνυμική συνάρτησης 3ου βαθμού της οποίας η γραφική παράσταση έχει με την ευθεία y = x τρία κοινά σημεία.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει την μορφή $f(x) = \alpha x^3 + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha(1-\beta) > 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha > 0$ και $\beta < 0$.

Έστω τώρα ότι το α είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο η C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 - x$.

ε) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$.

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{f(x)} - x\right)$

ζ) Να λύσετε την ανίσωση $6\eta\mu x - 7x \leq f(x)$.

η) Να βρείτε εφαπτομένη της C_f κάθετη στην y = x.

θ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = 6e^x - 6$ δύο κοινά σημεία.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Επειδή η C_f είναι πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού, θα είναι της μορφής $f(x)=\alpha x^3+\kappa x^2+\beta x+\lambda$.
Επειδή διέρχεται από το (0,0) ισχύει ότι $f(0)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$.
Επειδή η f είναι περιττή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow$
$\alpha(-x)^3+\kappa(-x)^2+\beta(-x)=-\alpha x^3-\kappa x^2-\beta x \Leftrightarrow -\cancel{\alpha x^3}+\kappa x^2-\cancel{\beta x}=-\cancel{\alpha x^3}-\kappa x^2-\cancel{\beta x}\Leftrightarrow$
$2\kappa x^2=0\Leftrightarrow \kappa=0$ γιατί η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=\alpha x^3+\beta x$.

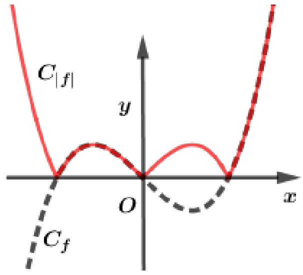
β) Επειδή η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία y = x τρία κοινά σημεία, η εξίσωση:
$f(x)=x\Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x=x\Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x-x=0\Leftrightarrow \alpha x^3+(\beta-1)x=0$ (1) έχει 3 λύσεις. Είναι
$\alpha x^3+(\beta-1)x=0\Leftrightarrow x\left(\alpha x^2+\beta-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $\alpha x^2+\beta-1=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1-\beta}{\alpha}$ (2)
Αν $\dfrac{1-\beta}{\alpha}<0$ τότε η (2) είναι αδύνατη και η (1) έχει μόνο μία λύση που είναι άτοπο.
Αν $\dfrac{1-\beta}{\alpha}=0$ τότε η (2) γίνεται $x^2=0\Leftrightarrow x=0$ (1) έχει μόνο μία λύση την 0 που είναι άτοπο.
Άρα $\dfrac{1-\beta}{\alpha}>0\Leftrightarrow \alpha(1-\beta)>0$

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει τρείς ρίζες. τις 0 και $\pm\rho$, $\rho>0$ επειδή είναι περιττή.
Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x=0\Leftrightarrow x\left(\alpha x^2+\beta\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $\alpha x^2+\beta=0\Leftrightarrow x^2=-\dfrac{\alpha}{\beta}$ (3).
Η εξίσωση (3) έχει ρίζες τα $\pm\rho$ οπότε $-\dfrac{\alpha}{\beta}>0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}<0\Leftrightarrow \alpha\beta<0$ (4)
Έστω α < 0 Τότε το πρόσημο της $f(x)=x\left(\alpha x^2+\beta\right)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$-\rho$		0		ρ	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\alpha x^2+\beta$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Στο σχήμα όμως βλέπουμε ότι για $x>\rho$ είναι $f(x)>0$ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο, άρα α > 0 και λόγω της (4): β< 0.

δ) Επειδή το σημείο Α ανήκει και στην y = x , είναι το σημείο τομής των C_f, $y=x$, οπότε το $x=\sqrt{2}$ είναι λύση της (2), οπότε $\left(\sqrt{2}\right)^2=\dfrac{1-\beta}{\alpha}\Leftrightarrow 2\alpha=1-\beta\Leftrightarrow \beta=1-2\alpha$.
Είναι $\beta<0\Leftrightarrow 1-2\alpha<0\Leftrightarrow \alpha>\dfrac{1}{2}$
Επειδή ο α είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος με $\alpha>\dfrac{1}{2}$, είναι α = 1. Τότε $\beta=1-2=-1$ και
$f(x)=x^3-x$.



ε) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x , των τμημάτων της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3-x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-1\right)\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=+\infty$

ζ) $6ημx-7x\le f(x)\Leftrightarrow 6ημx-7x-x^3+x\le 0\Leftrightarrow 6ημx-6x-x^3\le 0$ (4)

Έστω $g(x)=6ημx-6x-x^3,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=6συνx-6-3x^2,\ g''(x)=-6ημx-6x=-6(ημx+x)$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|ημx|\le|x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, οπότε:

Αν x < 0 τότε $|ημx|<-x\Leftrightarrow x<ημx<-x\Rightarrow ημx+x<0\Rightarrow g''(x)>0$ και επειδή η g' είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Αν x > 0 τότε $|ημx|<x\Leftrightarrow -x<ημx<x\Rightarrow ημx+x>0\Rightarrow g''(x)<0$ και επειδή η g' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η g' έχει μέγιστο το $g'(0)=0$, οπότε $g'(x)\le g'(0)=0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Η (4) γίνεται $g(x)\le g(0)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}x\ge 0$.

η) Έστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην ευθεία δ: y = x, αν και μόνο αν $f'(x_0)\cdot\lambda_\delta=-1\Leftrightarrow(3x_0^2-1)\cdot 1=-1\Leftrightarrow 3x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0$.

Τότε η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=-x$

θ) Αρκεί η εξίσωση $h(x)=f(x)\Leftrightarrow 6e^x-6=x^3-x\Leftrightarrow 6e^x-x^3+x-6=0$ να έχει δύο ρίζες.

Έστω $\varphi(x)=6e^x-x^3+x-6,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x)=6e^x-3x^2+1,\ \varphi''(x)=6e^x-6x=6(e^x-x)$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\ge x+1>x\Rightarrow e^x-x>0$, οπότε $\varphi''(x)>0\Rightarrow\varphi'\nearrow\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi'(0)=7,\ \varphi'(-1)=6e^{-1}-2=\dfrac{6}{e}-2<0$, δηλαδή $\varphi'(-1)\varphi'(0)<0$ και επειδή η φ' είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\rho)=0$.

Για κάθε x < ρ είναι $\varphi'(x)<\varphi'(\rho)=0\Leftrightarrow\varphi'(x)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(-\infty,\rho]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε x > ρ είναι $\varphi'(x)>\varphi'(\rho)=0\Leftrightarrow\varphi'(x)>0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[\rho,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Είναι $-1<\rho<0\overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow}\varphi(\rho)<\varphi(0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6e^x-x^3+x-6\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(6-\dfrac{x^3}{e^x}+\dfrac{x}{e^x}-6\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(6e^x-x^3+x-6\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+x-6\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, \rho)$ η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\varphi(\Delta_1) = (\varphi(\rho), +\infty)$. Επειδή το μηδέν περιέχεται στο $\varphi(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho_1) = 0$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (\rho, +\infty)$ η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\varphi(\Delta_2) = (\varphi(\rho), +\infty)$. Επειδή το μηδέν περιέχεται στο $\varphi(\Delta_2)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho_2) = 0$. Τελικά η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.