

Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας



2019 - 2020



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

7ο Διαγώνισμα

25 - 4 - 2020

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

μονάδες 7

A2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα μιας συνάρτησης f ορισμένης σ' ένα διάστημα Δ ;

μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο A και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο A ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 1+3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

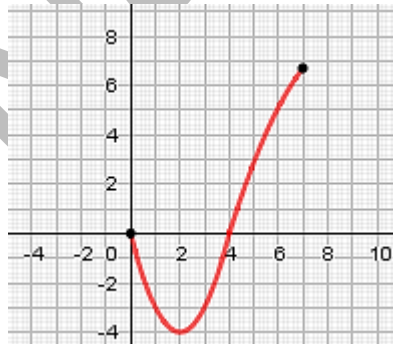
α) Αν για τις παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 4$, $f'(0) = 3$, $f'(5) = 6$, $g(0) = 5$, $g'(0) = 1$, $g'(4) = 2$, τότε $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$.

β) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$.

γ) Αν $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in D_f$, τότε η f έχει μέγιστο το M .

Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 7]$.



Αν η C_f διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και ισχύουν οι σχέσεις $f(2) - f(0) = f(4) - f(2) = -3$ και $f(7) - f(4) = 5$, τότε:

B1. Να βρείτε τα $f(2), f(4), f(7)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) = -10^{-2020}.$$

μονάδες 6

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

μονάδες 3

B3. Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της f , καθώς και το σύνολο τιμών της.

μονάδες 7

B4. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{xe^{-x}}{f(x)+6}$. μονάδες 4

B5. Έστω g παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0,7]$ με $g'(x) = f'(x) + 2x + 1$ για κάθε $x \in [0,7]$ και $g(2) = 5$. Να δείξετε ότι για την συνάρτηση h με $h(x) = g(x) - f(x)$ ισχύει ότι $h(x) = x^2 + x + 2$, $x \in [0,7]$

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3a^x + \beta^x}{a^x + \beta^x}$ με $a > 0$, $\beta > 0$ και $a \neq \beta$

Γ1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $A(\lambda, \lambda)$ με $\lambda \in (0,3)$.

μονάδες 5

Γ2. Αν υποθέσουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x$ και σε ένα ακόμη σημείο με τετμημένη $\mu > 3$, να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

μονάδες 6

Γ3. Έστω $a < \beta$.

α) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 5

β) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)a^x + \left(x - \frac{1}{3}\right)\beta^x = (a^x + \beta^x) \ln x$ είναι αδύνατη.

μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει κρίσιμα σημεία..

μονάδες 3

Θέμα Δ

Δίνονται οι δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} συναρτήσεις f, F για τις οποίες ισχύει :

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0 - h)}{h} = 2f(x_0)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x_0 .
- $F(1) = 0 = F(2)$, $F(3) = 2 = F(4)$, $F'(5) = 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{F(x)+1}{x-2} + \frac{F(x+2)+2}{x-1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

μονάδες 4

Δ3. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,3]$. Να δείξετε ότι $f(3) < 2 < f(2)$.

μονάδες 4

Δ4. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

μονάδες 4+3

Δ5. Έστω $f(x) \leq (x-a)^2(x-\beta)^2(x-5)^2$ όπου $a, \beta \neq 5$ δύο από τις ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Δ4α. Να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(a,0), B(\beta,0)$ και $\Gamma(5,0)$.

μονάδες 5