Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

7ο Διαγώνισμα

6-4-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 ,στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

μονάδες 7

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Σε μαθητή δόθηκε η παρακάτω πρόταση Σωστού Λάθους με αιτιολόγηση:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες .

Με πρόχειρη σκέψη ο μαθητής απάντησε ψευδής και το αιτιολογεί ως εξής:

Αν εφαρμόσουμε το ΘΜΤ για την f και την g στο $[\alpha, \beta]$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta) : f'(x_0) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και

$x_1 \in (\alpha,\beta) : g'(x_1) = \dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$ είναι βέβαια $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$ όμως αυτό δεν εξασφαλίζει ότι τα x_0, x_1 είναι ίσα οπότε δεν είναι βέβαιο ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτομένες να είναι παράλληλες .

Να απαντήσετε αν ο μαθητής έχει δίκιο . Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η ευθεία $y = \beta$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = +\infty$.

β) Αν $f''(x) = x^2$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x, x \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα της.

μονάδες 4

Β2. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2021$.

μονάδες 7

Β3. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα.

μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

μονάδες 3+4

Θέμα Γ

Σε μια καλλιέργεια βακτηριδίων παρατηρήσαμε ότι αρχικά ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τους $N'(t)$ ήταν σταθερός και ίσος με 1 (εκατομμύρια βακτηρίδια ανά ώρα). Η καλλιέργεια αναπτύσσεται ομοιόμορφα πάνω σε μια γυάλινη πλάκα σχήματος κυκλικού δίσκου ακτίνας R=64mm ξεκινώντας από το κέντρο.

Μετά από χρόνο $t_1 = 1$ ώρες εκτιμήσαμε ότι ο αριθμός των βακτηριδίων ήταν $N(1) = 10$ (εκατομμύρια) και μετρήσαμε ότι η καλλιέργεια κατελάμβανε μια κυκλική επιφάνεια που είχε ακτίνα R_1=8mm με κέντρο το κέντρο της γυάλινης πλάκας.

Γ1. Να βρείτε τον αρχικό αριθμό βακτηριδίων καθώς και την επιφάνεια Ε(1) που καταλαμβάνουν αυτά τη χρονική στιγμή $t_1 = 1$.

μονάδες 4

Στην συνέχεια παρατηρήθηκε ότι ο αριθμός αύξησης έπαψε να είναι σταθερός και προέκυψε ότι το πλήθος των βακτηρίων ακολουθεί την εκθετική μεταβολή $N(t) = e^{kt} \cdot e^{c}$ με k, c σταθερές με $t \geq 1$.

Εκτιμήθηκε ότι ο πληθυσμός τετραπλασιάστηκε μια ώρα μετά την t_1. Δεχόμαστε ακόμη ότι από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά η επιφάνεια που καταλαμβάνει η καλλιέργεια είναι ανάλογη του αριθμού των βακτηριδίων.

Γ2. Να αποδείξετε ότι κ=ln4, $e^{c} = \frac{5}{2}$ και $N(t) = 10 \cdot 4^{t-1}$.

μονάδες 6

Γ3. Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης $N(t)$ η οποία θα δίνει τον πληθυσμό των βακτηριδίων σε κάθε χρονική στιγμή μέχρι και τη χρονική στιγμή t=4.

μονάδες 2

Γ4. Να βρείτε το τύπο που δίνει το εμβαδόν της κυκλικής επιφάνειας που καταλαμβάνουν τα βακτηρίδια για $1 \leq t \leq 4$.

μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε τον τελικό αριθμό βακτηριδίων και τον απαιτούμενο χρόνο όταν η καλλιέργεια έχει εξαπλωθεί σε όλη την γυάλινη πλάκα.

μονάδες 4

Γ6. Την χρονική στιγμή t=4 αρχίζει να ενεργεί η κολπικίνη, μια ουσία η οποία σταματάει την αύξηση των βακτηριδίων και τα εξολοθρεύει μειώνοντας το πλήθος τους με ρυθμό $N'(t) = -12{,}8(t-4)$, $t \geq 4$. Να βρείτε από πια χρονική στιγμή και μετά δεν θα υπάρχουν βακτηρίδια .

μονάδες 4

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}$.

Δ1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να δείξετε ότι τα τοπικά ακρότατα της f είναι ακρότατα της f.

μονάδες 4

Δ3. Να βρεθεί η ευθεία , η οποία ανήκει στις ευθείες : $Ax + By + 2B - A = 0, A, B \in \mathbb{R}^*, A \neq 2B$ και απέχει την μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων .

μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι :

α) η f είναι κοίλη για $x \geq 2$

β) υπάρχει μία ακριβώς εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{5}x + 2021$, σε σημείο της με τετμημένη μεγαλύτερη ή ίση του 2 .

μονάδες 3+5

Καλή Τύχη!