

## Ασκήσεις

- Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu^2x + 5\sigma\upsilon\nu x + 1$ .
  - Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .
  - Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.
  - Να λύσετε την εξίσωση  $(f(x) + 2\sigma\upsilon\nu^2x)^2 - 8(f(x) + 2\sigma\upsilon\nu^2x) - 20 = 0$ .
- Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = a + 2\eta\mu(2\beta x)$  και  $g(x) = a + \beta + \sigma\upsilon\nu((a + \beta)x)$ ,  $a, \beta > 0$ . Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε:
  - να αποδείξετε ότι  $a = \beta = 1$ .
  - Να βρείτε τη τιμή της παράστασης  $A = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .
  - Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + 3 = 2g(x)$  στο διάστημα  $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ .
- Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2 - \sigma\upsilon\nu 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
  - Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και την περίοδο της  $f$ .
  - Να υπολογίσετε τις τιμές της  $f$  για  $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$  και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f$  για  $0 \leq x \leq \pi$ .
  - Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ευθεία  $y = \frac{5}{2}$ .
  - Να λύσετε την εξίσωση  $(f(x) - 2)^2 + 2f(x) - 3 = 0$
- Η συνάρτηση  $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$ ,  $\omega > 0$ , έχει περίοδο  $\pi$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ .
  - Να βρείτε τα  $\rho, \omega$ .
  - Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .
  - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .
  - Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ .
- Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \sigma\phi x - 1\right)\left(\frac{1}{\eta\mu x} - \sigma\phi x + 1\right)$ .
  - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
  - Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\sigma\phi x$ .
  - Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$  στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \eta\mu(\pi + 2x)$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2\eta\mu 2x$ .

β) Να βρείτε την περίοδο  $T$  της συνάρτησης  $f$ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

δ) Να λύσετε στο διάστημα  $[0, \pi)$  την εξίσωση  $f(x) - 1 = 0$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \text{συν}(20\pi - x) + 2}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \eta\mu(5\pi - x) + 4}$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{-\eta\mu x + \text{συν} x + 2}{-\text{συν} x + \eta\mu x + 4}$ .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2}$ .

8. Έστω η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{\text{συν} x + 1}{\eta\mu x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή.

γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = \eta\mu x$ .

9. Δίνεται η παράσταση:  $f(x) = \eta\mu^2 x - 2\text{συν} x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να παραγοντοποιήσετε την  $f$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

γ) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) = 0$ .

δ) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι άρτια.

ε) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

στ) Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει μέγιστο το 4.

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{3}\epsilon\phi^2 x - (\sqrt{3} + 1)\epsilon\phi x + 1$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

α) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

β) Αν  $\theta$  η μεγαλύτερη ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{\text{συν}(2\pi + \theta)\epsilon\phi(\pi - \theta)\text{συν}\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right)}{\eta\mu(1821\pi + \theta)\text{συν}(-\theta)\sigma\phi\left(\frac{17\pi}{2} - \theta\right)} = -1$$

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x$ .

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.  
 β) Για ποιες τιμές του  $x$  παίρνει ελάχιστη τιμή η συνάρτηση;  
 γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) + \eta\mu^2 x = 3 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ .

δ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $A = \frac{f(8\pi - x)f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)f\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)f(7\pi + x)}{f^2\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)f^2(x)}$  είναι

ανεξάρτητη του  $x$ .

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.  
 β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ .  
 γ) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι άρτια.  
 δ) Να αποδείξετε ότι  $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{(4k-1)\pi}{2} - x\right)$   
 ε) Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu^3 2x - \eta\mu^2 2x - 4\eta\mu 2x + 2$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ .  
 β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .  
 γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $g(x) = 2\eta\mu^3 2x - 2\eta\mu 2x - f(x)$  καθώς και τις αντίστοιχες τιμές του  $x$ , για τις οποίες η συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή.

14. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- α)  $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}\eta\mu x\right) = 1$                       β)  $\eta\mu(\pi \cdot \sigma\upsilon\nu x) = 1$

15. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.  
 β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ .  
 γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x)f(-x) + 1 = 0$ .

16. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{16\epsilon\phi^2x}{1+\epsilon\phi^2x}$  και  $g(x) = \epsilon\phi^2x + 1$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 3g(x)$ .

γ) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 16\eta\mu^2x$  και  $g(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$ .

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $16\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x - 3 = 0$ .

17. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu(\pi - 4x) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + 4x\right) + 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \eta\mu 4x + 1$ .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τη περίοδο της  $f$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f^2(x) - 5\eta\mu^2(\pi + 4x) - 1 = 0$ .

18. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a\eta\mu\frac{2x}{3} + \beta$ ,  $a > 0, \beta \in \mathbb{R}$  η οποία έχει μέγιστο το 3 και η

γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα  $y' y$  στο 1.

α) Να αποδείξετε ότι  $a = 2$  και  $\beta = 1$ .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x' x$ .

γ) Να αποδείξετε ότι  $(f(x) - 1)^2 + \left(f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) - 1\right)^2 = 4$ .

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(6x) = f(3x)$  στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

19. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  και  $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$ .

α) Να αποδείξετε ότι είναι περιοδικές με περίοδο  $\pi$ .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών τους παραστάσεων.

γ) Να αποδείξετε ότι  $f(\pi) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ .

δ) Να αποδείξετε ότι  $f^2(x) + g^2\left(-x - \frac{\pi}{16}\right) = 1$ .

20. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) - 2\eta\mu(2\pi - 2x)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 3\eta\mu 2x$ .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τη περίοδο της  $f$  και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{3}{2}$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

δ) Να αποδείξετε ότι  $f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 9$

21. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \beta$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$  της οποίας η γραφική

παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$ ,  $B\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $a = 2$  και  $\beta = 1$

β) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης καθώς και την περίοδο της.

γ) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της  $f$ .

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$ .

ε) Να αποδείξετε ότι:  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{5\pi}{4}\right) - f\left(\frac{7\pi}{4}\right) + f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 1$ .

22. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\eta\mu^2x + \eta\mu x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

β) Να αποδείξετε ότι κανένα σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  στο διάστημα  $(0, \pi)$  με τεταγμένη 2.

δ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

23. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει ελάχιστο το  $-\frac{1}{8}$ .

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x'x$ .

δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = 2 - 3\sigma\upsilon\nu x$ .

ε) Να λύσετε στο διάστημα  $[0, \pi)$  την εξίσωση:  $f(x) = f(\pi - x)$ .

24. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1 + \eta\mu x}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Αφού αποδείξετε ότι  $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x$ , να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

γ) Να αποδείξετε ότι  $\eta\mu^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \eta\mu^2(31\pi + x) = 1$ .

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $2f^2(x) + \eta\mu x - 1 = 0$ .

25. Το βάθος του νερού σε μέτρα κάτω από τη γέφυρα του Ευρίπου δίνεται από τη

$$\text{συνάρτηση } f(t) = 20 + 4\text{συν} \frac{\pi t}{3}, \text{ όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες με } t \in [0, 24].$$

α) Να βρείτε τη περίοδο της  $f$ .

β) Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο βάθος του νερού.

γ) Αν το ύψος της γέφυρας (από τον πυθμένα της θάλασσας) είναι 30m, να εξετάσετε αν ένα σκάφος ύψους 8m από την επιφάνεια της θάλασσας μπορεί να περάσει κάτω από τη γέφυρα στις 12 το μεσημέρι.

δ) Να βρείτε το βάθος του νερού στις 1 π.μ. και στις 5 μ.μ. Ποιες άλλες ώρες της ημέρας το νερό θα έχει το ίδιο βάθος;