

## Γενικές Ασκήσεις Τριγωνομετρίας

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu^2x + 5\sin x + 1$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

**β)** Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $(f(x) + 2\sin^2 x)^2 - 8(f(x) + 2\sin^2 x) - 20 = 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2 - \sin 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και την περίοδο της  $f$ .

**β)** Να υπολογίσετε τις τιμές της  $f$  για  $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$  και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f$  για  $0 \leq x \leq \pi$ .

**γ)** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ευθεία  $y = \frac{5}{2}$ .

**δ)** Να λύσετε την εξίσωση  $(f(x) - 2)^2 + 2f(x) - 3 = 0$

3. Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \mu(\omega x)$  έχει περίοδο  $\pi$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ .

**α)** Να βρείτε τα  $\rho, \omega$ .

**β)** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .

**γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

**δ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$4. \text{ Δίνεται η συνάρτηση: } f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(20\pi - x) + 2}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \eta\mu(5\pi - x) + 4}.$$

**α)** Να απλοποιήσετε τον τύπο της  $f$ .

**β)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**γ)** Να αποδείξετε ότι είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

**δ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2}$ .

5. Δίνεται η παράσταση:  $f(x) = \eta\mu^2x - 2\sin x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**α)** Να παραγοντοποιήσετε την  $f$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**γ)** Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) = 0$ .

**δ)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

**ε)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .

**στ)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει μέγιστο το 4.

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x$ .

**α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

**β)** Για ποιες τιμές του  $x$  παίρνει ελάχιστη τιμή η συνάρτηση;

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) + \eta\mu^2x = 3 + \sin x$ .

**δ)** Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $A = \frac{f(8\pi - x)f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)f\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)f(7\pi + x)}{f^2\left(\frac{13\pi}{2} + x\right)f^2(x)}$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ .

7. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \alpha + 2\eta\mu(2\beta x)$  και  $g(x) = \alpha + \beta + \sin((\alpha + \beta)x)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν την ίδια μέγιστη τιμή και την ίδια περίοδο, τότε:

**a)** να αποδείξετε ότι  $\alpha = \beta = 1$ .

**b)** Να βρείτε τη τιμή της παράστασης  $A = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{\pi}{4}\right)$

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + 3 = 2g(x)$  στο διάστημα  $[\pi, 2\pi]$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \sigma\varphi x - 1\right)\left(\frac{1}{\eta\mu x} - \sigma\varphi x + 1\right)$ .

**a)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**b)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$  στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \eta\mu(\pi + 2x)$

**a)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2\eta\mu 2x$ .

**β)** Να βρείτε την περίοδο  $T$  της συνάρτησης  $f$ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

**γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

**δ)** Να λύσετε στο διάστημα  $[0, \pi]$  την εξίσωση  $f(x) - 1 = 0$ .

10. Εστω η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\eta\mu x}$

**a)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**β)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιπτή.

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = \eta\mu x$

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{3}\epsilon\varphi^2 x - (\sqrt{3} + 1)\epsilon\varphi x + 1$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**α)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

**β)** Αν  $\theta$  η μεγαλύτερη ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{\sin((2\pi + \theta)\epsilon\varphi(\pi - \theta))\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right)}{\eta\mu(1821\pi + \theta)\sin(-\theta)\sin\left(\frac{17\pi}{2} - \theta\right)} = -1$$

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x \cdot \epsilon\varphi x}{1 - \sin x}$ .

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**β)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 1 + \frac{1}{\sin x}$ .

**γ)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι άρτια.

**δ)** Να αποδείξετε ότι  $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{(4k-1)\pi}{2} - x\right)$

**ε)** Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα

σημεία  $A\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$ ,  $B\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ , τότε:

- α)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 1$
- β)** Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης καθώς και την περίοδο της.
- γ)** Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της  $f$ .
- δ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$ .
- ε)** Να αποδείξετε ότι:  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{5\pi}{4}\right) - f\left(\frac{7\pi}{4}\right) + f\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 1$

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\eta\mu^2x + \eta\mu x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .
- β)** Να αποδείξετε ότι κανένα σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x$ .
- γ)** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  στο διάστημα  $(0, \pi)$  με τεταγμένη 2.
- δ)** Να λύσετε στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  την εξίσωση:  $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

15. Να λυθεί η εξίσωση:  $7 - |\eta\mu x - 3| - 4\eta\mu^2 x = \sigma\mu\nu^2 x + |2 - \eta\mu x|$

16. Δίνεται η εξίσωση:  $\sqrt{3}\sigma\mu\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 0$

- α)** Να λύσετε την εξίσωση.
- β)** Ποιες από τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα  $(\pi, 2\pi)$ ;

17. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς  $\kappa, \lambda$  για τους οποίους η παράσταση

$$\Pi = \lambda^2 \sin vx + 4\lambda\eta\mu\left(\frac{23\pi}{2} - x\right) + 4\sin(-x) - \kappa^2 \sin(9\pi - x) \text{ είναι ανεξάρτητη του } x.$$

18. Αν για τις οξείες γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  τριγώνου  $ABC$  ισχύει ότι  $\eta\mu B = \frac{\sqrt{11}}{4}$  και  $\eta\mu\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{4}$ , να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Στέλιος Μιχαήλογλου